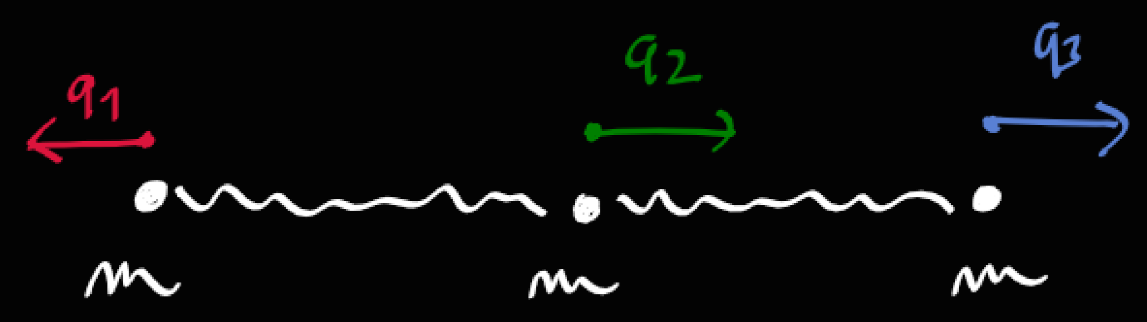
Připomenutí z minulého týdne



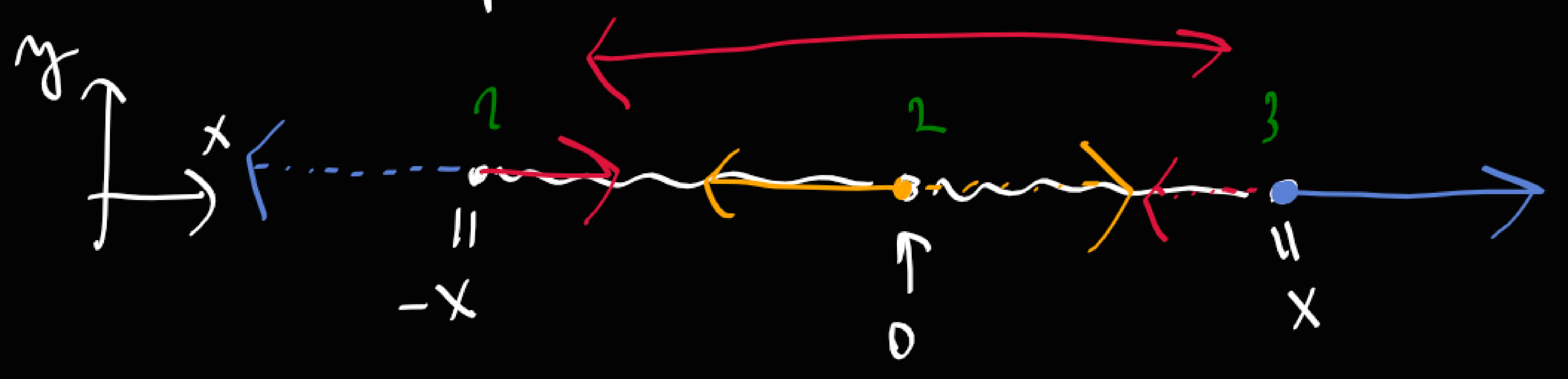
$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$(\check{C}V) \qquad \frac{d q^2}{dt^2}(t) + F(q(t)) = 0$$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární a symetrický operátor

rovnici (ČV) umíme explicitně vyřešit, pokud najdeme vlastní vektory operátoru F, dále umíme experimentálně měřit vlastní čísla F,

Problém: neznáme tvar molekuly, známe vlastní čísla operátoru F, z vlastních čísel zkusíme určit alespoň grupu symetrií F, zde využíváme pozorování, že grupa symetrií působí i na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ malých vychýlení z rovnovážného stavu, v našem příkladě máme dvě symetrie, a to identické zobrazení a dále symetrii prohazující krajní atomy a nechávající prostřední atom v počátku

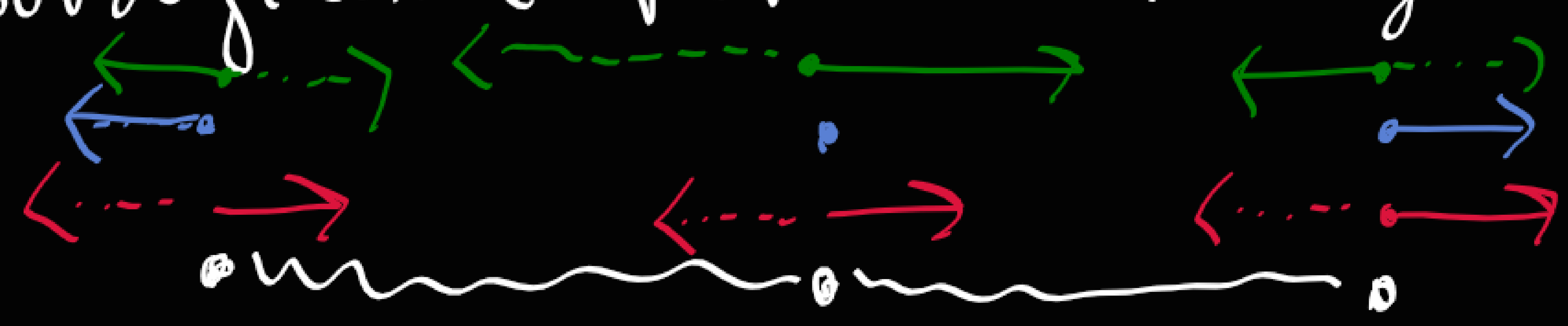


$S(u) = -u, \; u \in \mathbb{R}$

Vidíme, že S je reprezentováno maticí

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{na } \mathbb{R}^3.$$

Jelikož S komutuje s operátorem síly F, pak víme, že S musí zachovat vlastní podprostory F, tj. podprostory vlastních vektorů F. Skutečně, víme, že F má celkem 3 vlastní čísla $0, 1, 3$ s odpovídajícími vlastními vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



V dalším budeme studovat, jak vektorový prostor malých vychýlení z rovnovážného stavu vypadá jako reprezentace grupy symetrií molekuly.

Vektorové bandly nad konečnými množinami

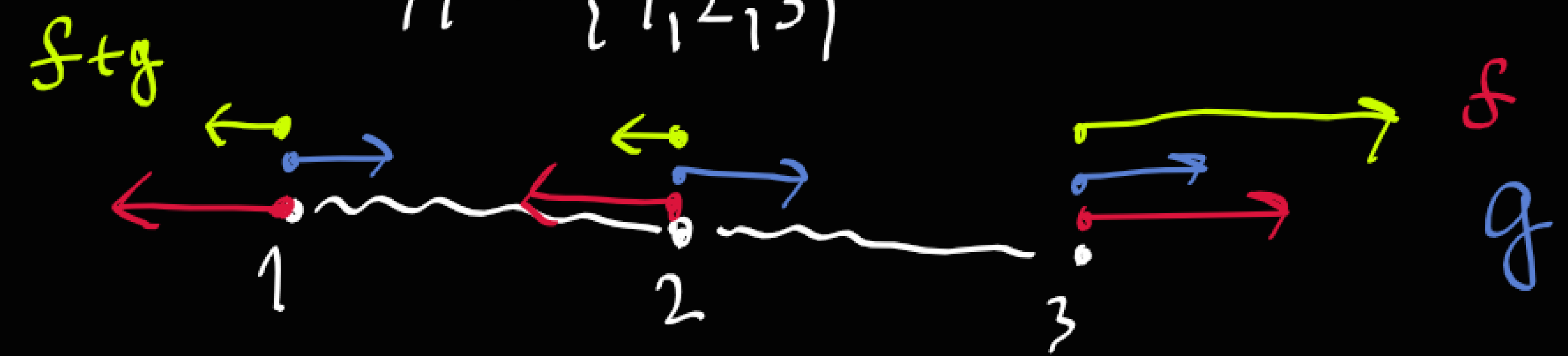
Definice Vektorový bandl dimenze n nad konečnou množinou M je trojice (E, M, π) (někdy se píše $\pi: E \to M$), kde

1) M je konečná množina,
2) $E = \dot{\bigcup}_{x \in M} E_x$ je disjunktní sjednocení vektorových prostorů $E_x, x \in M$, (nad $\mathbb{R}$) dimenze n a
3) $\pi: E \to M$ je kanonická projekce $E_x \ni v \mapsto x \in M$.

E se říká totální prostor, M se říká báze a množině $E_x, x \in M$, se říká fibr nad bodem $x \in M$.

Příklad

$$E = \bigcup_{x \in M} E_x, \quad E_x \cong \mathbb{R}$$
$$M = \{1, 2, 3\}$$



Varování E není přirozeným způsobem vektorový prostor, protože neexistuje přirozený způsob jak sčítat $u \in E_x, v \in E_y$ pro $x \neq y$.

Definice Řezem vektorového bandlu (E, M, π) je zobrazení $f: M \to E$ takové, že $\pi \circ f: M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\pi} M$ se rovná identitě Id_M na M. Množinu všech řezů značíme $\Gamma(E)$.

Tvrzení Množina $\Gamma(E)$ spolu s operacemi

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,

kde $x \in M$, $f, g \in \Gamma(E)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, je reálný vektorový prostor dimenze $n \cdot \# M$, kde $\# M$ je počet prvků M.

Důkaz je nechán jako cvičení. □

Definice Akcí grupy G na množině M je zobrazení

$$r: G\times M \longrightarrow M \quad \text{takové, že}$$

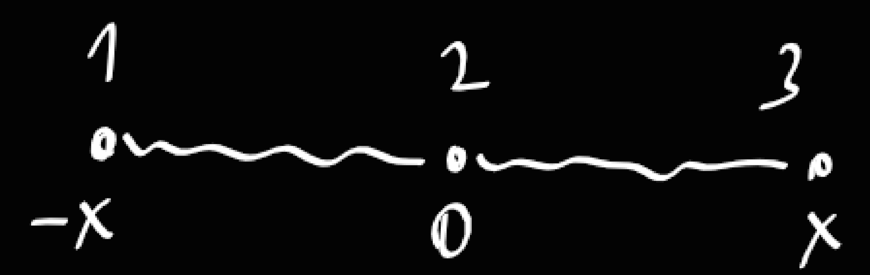
(A1) $r(e,m) = m$ a

(A2) $r(a, r(b,m)) = r(ab,m)$,

kde $a,b \in G$, $m \in M$ a $e \in G$ je neutrální prvek.

Notace Budeme psát též $a.m$ místo $r(a).m := r(a,m)$, pokud nehrozí pomýlení.

Příklad M je molekula v $\mathbb{R}^3$, G je grupa symetrií molekuly, pak G má kanonickou akci na M.



$M \subset \mathbb{R}$

$G = \{Id_M, S\}$

$r: G\times M \longrightarrow M$

$r(S,1) = 3$

$r(S,2) = 2$

$r(S,3) = 1$

Definice Nechť (E,M,π) je vektorový bundl dimenze n a nechť G je konečná grupa. Pak říkáme, že (E,M,π) je G-homogenní bundl, jestliže G má akci

$r_E: G\times E \longrightarrow E$ na E a na M má akci

$r_M: G\times M \longrightarrow M$ tak, že

(VB1) $\pi(r_E(g,v)) = r_M(g,\pi(v))$ a

(VB2) $\forall x\in M$ a $\forall g \in G$ je indukované zobrazení

$$E_x \longrightarrow E_{r_M(g,x)}, \quad v \longmapsto r_E(g,v)$$

je lineární.

Všimněte si, že (VB1) tvrdí následující:

pro pevné g diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g."] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circ"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "g."] & M \end{tikzcd},$$

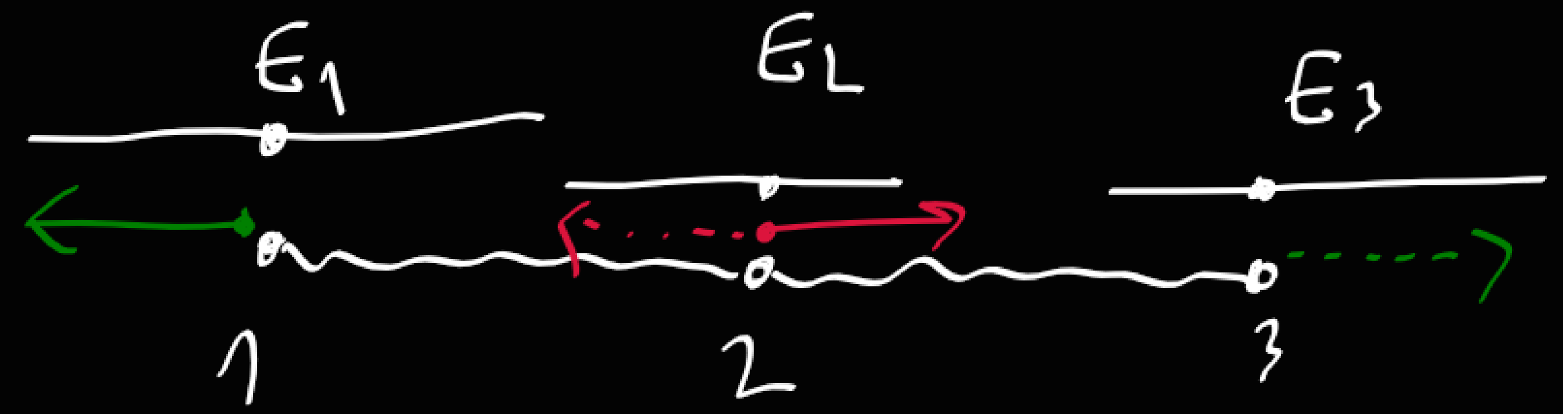
pro pevné $x \in M$, je restrikce g na E_x zobrazení z

$$E_x \longrightarrow E_{g.x}.$$

$$\begin{tikzcd} E_x \arrow[r, "g\cdot"] \arrow[d, "\pi"'] & E_{g\cdot x} \arrow[d, "\pi"] \\ x \in M \arrow[r, "g\cdot"] & gx \in M \end{tikzcd}$$

(VB2) říká, že zobrazení
$$E_x \longrightarrow E_{g\cdot x}$$
je lineární zobrazení (dokonce lineární isomorfismus)

<u>Příklad</u>



$G = \{ Id_M, S \}$

$E_1 \simeq \mathbb{R}$ $\quad E_2 \simeq \mathbb{R}$ $\quad E_3 \simeq \mathbb{R}$

$g_M(S,1) = 3$ $\qquad g_E(S): E_2 \longrightarrow E_2, \quad x \longmapsto -x$

$g_M(S,3) = 1$ $\qquad g_E(S): E_1 \longrightarrow E_3, \quad x \longmapsto -x$

$g_M(S,2) = 2$ $\qquad g_E(S): E_3 \longrightarrow E_1, \quad x \longmapsto -x$

<u>Tvrzení</u> Nechť (E, M, π) je G-homogenní bandl.
Pak předpis

$$(A\check{R}) \qquad r_{\Gamma(E)}: G \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$
$$r_{\Gamma(E)}(g, f)(x) = r_E(g, f(r_M(g^{-1}, x)))$$

definuje akci G na $\Gamma(E)$, která je navíc lineární.

Část důkazu: všimněte si, že předpis v $(A\check{R})$ skutečně dává prvek $\Gamma(E)$, neboť

$$\begin{tikzcd} f(g^{-1}x) \arrow[r, "g\cdot"] & E_x \\ M \ni g^{-1}\cdot x \arrow[u, "f"] & x \in M \arrow[l, "g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

g zobrazí $E_{g^{-1}x}$ do $E_{g\cdot(g^{-1}x)} = E_{(g\cdot g^{-1})x} = E_x$

Zbytek si sami rozmyslete, že tato akce je lineární, tj.
$r_{\Gamma(E)}(g, (f+h)) = r_{\Gamma(E)}(g, f) + r_{\Gamma(E)}(g, h)$, $r_{\Gamma(E)}(g, \lambda f) = \lambda\, r_{\Gamma(E)}(g, f)$

pro každé $f, h \in \Gamma(E)$, $g \in G$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Nás zajímá reprezentace grupy symetrií molekuly na vektorovém prostoru všech řezů vektorového bandlu všech malých vychýlení z rovnovážného stavu. Tato informace dává silné omezení na počet různých vlastních čísel operátoru F.

Representace konečných grup

Definice Representací grupy G na komplexním vektorovém prostoru V konečné dimenze rozumíme akci

$$r_V : G \times V \longrightarrow V \quad \text{takovou, že}$$

$\forall g$ je zobrazení : $V \ni v \longmapsto r_V(g, v) =: g.v \in V$
lineární. (Dokonce lineární isomorfismus.)

Alternativně je reprezentace G na V homomorfismus grup

$$G \longrightarrow \underbrace{GL(V)}_{\text{grupa všech lineárních isomorfismů na } V.}$$

Definice Dvě representace (V, r_V) a (W, r_W) grupy G se nazývají ekvivalentní, jestliže existuje lineární isomorfismus

$$T : V \longrightarrow W \quad \text{tak, že}$$

$$\forall g \in G, \ \forall v \in V : \ T(r_V(g, v)) = r_W(g, T(v)).$$

Definice Nechť (V, r_V) je representace grupy G.
Vektorový podprostor $W \subset V$ se nazývá G-invariantní, jestliže $\forall g \in G \ \forall w \in W : \ g.w \in W$.
Representace (V, r_V) se nazývá ireducibilní, jestliže

$\{0\}, V$ jsou jediné G-invariantní podprostory ve V.

Poznámka: Je-li W G-invariantní podprostor ve V, pak předpis

$$G \times W \longrightarrow W, \ (g,w) \longmapsto r_V(g,w)$$

je reprezentace G na W a tato reprezentace se nazývá restrikce V na W a značíme ji $(W, r_V|_W)$.

DÚ. (stačí za dva týdny)

Najděte a popište grupy symetrií

1) rovnostranného trojúhelníku, (1 bod)
2) čtverce a (1 bod)
3) čtyřstěnu. (2 body).