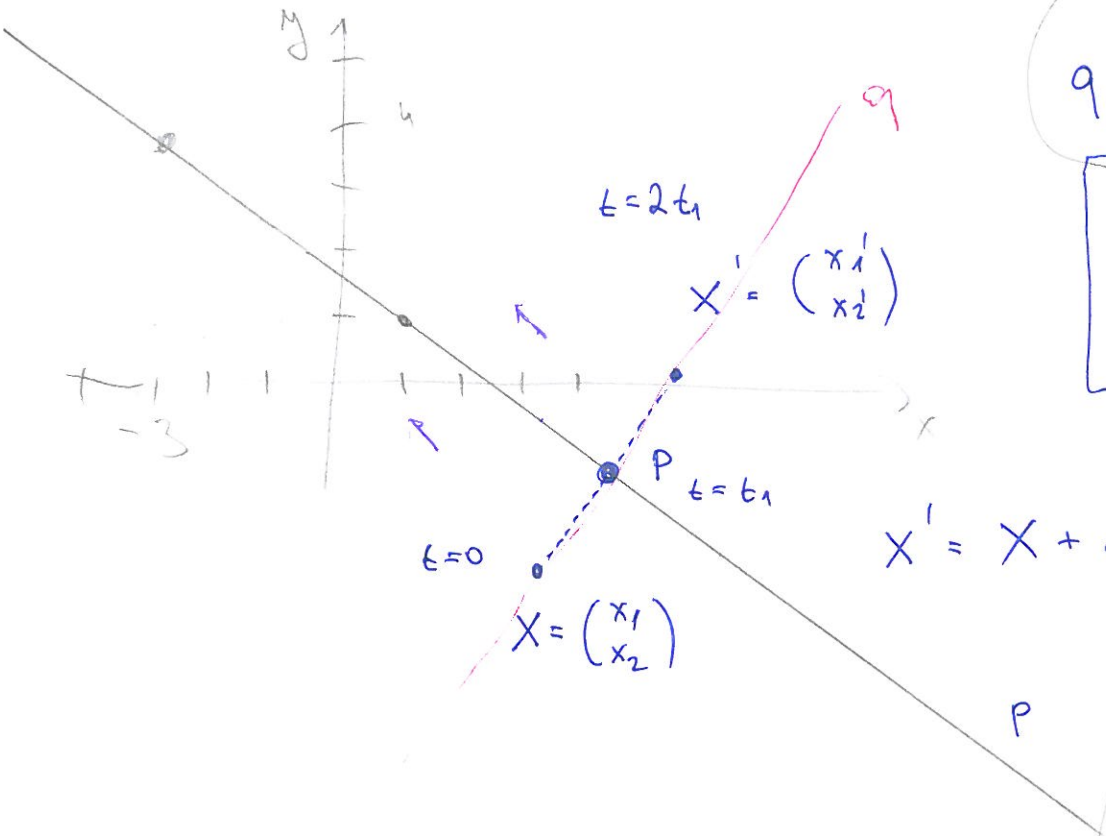
Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : 3x + 4y - 7 = 0$.



$$q : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + 3t \\ y &= x_2 + 4t \end{aligned}}$$

$$X' = X + 2(P - X)$$

$$P = p \cap q : \quad 3(x_1 + 3t) + 4(x_2 + 4t) - 7 = 0$$

$$25t = 7 - 3x_1 - 4x_2$$

$$\boxed{t = \frac{7 - 3x_1 - 4x_2}{25}} = t_1$$

$$\boxed{t = \frac{14 - 6x_1 - 8x_2}{25}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= \frac{7}{25}x_1 - \frac{24}{25}x_2 + \frac{42}{25} \\ x_2' &= -\frac{24}{25}x_1 - \frac{7}{25}x_2 + \frac{56}{25} \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + $$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí $||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$.

Lemma 1.3. Přímo z definice plyne, že složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost.

$\mathbb{R}^n$ ... metrický prostor

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad ||\vec{X} - \vec{Y}|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

<u>Shodnost je prostá</u> $\qquad \left(||\vec{X} - \vec{Y}|| = 0\right) \Leftrightarrow \vec{X} = \vec{Y}$

$$f(\vec{X}) = f(\vec{Y}) \Rightarrow ||f(\vec{X}) - f(\vec{Y})|| = 0 \Rightarrow ||\vec{X} - \vec{Y}|| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{\vec{X} = Y}$$

<u>Složení</u> $\qquad f, g$ shodnosti

$$||g(f(\vec{X})) - g(f(\vec{Y}))|| = ||f(\vec{X}) - f(\vec{Y})|| = ||\vec{X} - \vec{Y}||$$

<u>Inverz</u>

$A, B \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ ~~Ex~~ $A = f(X) \qquad B = f(Y)$
$\in \mathrm{Im}(f)$
$\Rightarrow \qquad X = f^{-1}(A) \qquad Y = f^{-1}(B)$

$$||f^{-1}(A) - f^{-1}(B)|| = ||X - Y|| = ||f(X) - f(Y)|| =$$
$$= ||A - B||$$

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Poznámka 1.5. V definici shodnosti se využívá pouze toho, že $\mathbb{R}^n$ je metrický prostor. Předchozí věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru.

Důsledek 1.6. Shodnosti jsou surjektivní a vzhledem ke skládání tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}, \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + q)$$

1.6 $\quad f(x) = A \cdot X + p \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$Y = A \cdot X + p$

$A^{-1}(Y - p) = X \qquad \boxed{A^{-1} = A^T}$

$A^{-1}Y - Y^{-1} \cdot p$

SKLÁDÁNÍ $\qquad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$

$(g \circ f)(x) = B \cdot (AX + p) + q = (B \cdot A)X + (B \cdot p + q)$

opět shodnost

GRUPA

Definice 1.7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$.

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{p}, \quad (g\circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}.$$

$A^T A = 1$

$\det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

$(B,q)\circ(A,p) =$

$= (B\cdot A,\ Bp+q)$

$ON(n) \ltimes \mathbb{R}^n = \mathbb{E}(n)$

$\mathbb{E}(n)$ ... shodnosti

$\mathbb{E}_+(n)$ ... přímé

$f(x) = \underset{I_n}{A}\cdot X + p \qquad A = I_n$

$A = I_n$ ... posunutí ... kopie $\underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$

$p = \vec{0} \qquad f(x) = A\cdot X \qquad ON(n)$

Věta 1.8. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + \ \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} Ax+p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1)\times(n+1)$, tedy

$$f \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} & \frac{42}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{56}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & Bp+q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice 1.9. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$. Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Definice 1.10. Množina M je samodružná množina zobrazení f, jestliže ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť). Přesněji jestliže platí

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{X} \in M \implies f(\mathbf{X}) \in M.$$

$$f_A(\vec{n}) = A \cdot \vec{n}$$

PŘ

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{42}{25} \\ \frac{56}{25} \end{pmatrix}$$

① SAMODRUŽNÉ BODY

$$x_1 = \frac{7}{25} x_1 - \frac{24}{25} x_2 + \frac{42}{25} \quad \Big| \cdot 25$$

$$x_2 = -\frac{24}{25} x_1 - \frac{7}{25} x_2 + \frac{56}{25} \quad \Big| \cdot 25$$

$$\left.\begin{array}{ll} 18x_1 + 24x_2 = 42 & \cdot \frac{1}{6} \\ 24x_1 + 32x_2 = 56 & \cdot \frac{1}{8} \end{array}\right\} \quad \underline{3x_1 + 4x_2 = 7}$$

② SAMODRUŽNÉ SMĚRY

$$A - \lambda I_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{7}{25} - \lambda & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} - \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{(25)^2}\left[(7-25\lambda)\cdot(-7-25\lambda) - 24^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(25)^2}\left[\underbrace{-7^2 - 24^2}_{-25^2} + 25^2\lambda^2\right] = \lambda^2 - 1$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}}$$

$\underline{\lambda=1}$ $(A - \lambda I_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & -\frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-18x_1 - 24x_2 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

$| \cdot -\frac{1}{6}$

$(-4, 3)$

$\langle (-4, 3) \rangle \quad \lambda = 1$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\begin{pmatrix} \frac{32}{25} , & -\frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(4, -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\langle (3, 4) \rangle \quad \lambda = -1$

Věta 1.11. Pro každou shodnost $f \in E(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
  - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
  - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1. V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středov~~á~~ou souměrnost.
  - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí.
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastím číslem -1 a
  - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
  - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

$\mathbb{R}^2$

$$f(x) = Ax + p$$

$\underline{\det A = 1}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad *$$

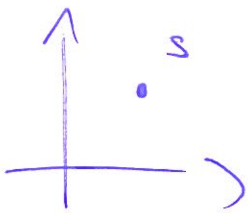
$$\det \,\llcorner\, = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + 1$$

$$= 2(1-\cos\alpha) \geq 0$$

$$= 0 \iff \underline{\underline{\alpha = 0}}$$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow *$ má právě jedno řešení $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!$ SAMODRUŽNÝ BOD S



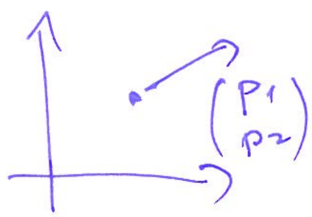
$\underline{\alpha = 0}$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

má ∞ řešení (libovolné $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$) když

$\boxed{\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$ $f(x)$ identita

$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ žádný pevný bod



SAMODRUŽNÉ SMĚRY

vl. vektory $A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix}\cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = \underline{1 - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 = 0}$$

$$D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) \leq 0$$

$= 0 \Leftrightarrow \alpha$ / 0 $\dashrightarrow$ $\underline{\underline{\lambda = 1}}$

\ π $\dashrightarrow$ $\underline{\underline{\lambda = -1}}$

$A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ... středová souměrnost

$\underline{\det A = -1}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

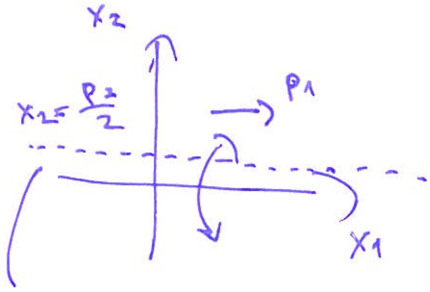
$\langle (1,0) \rangle \qquad \langle (0,1) \rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= x_1 + p_1 \\ x_2 &= -x_2 + p_2 \end{aligned}}$$

$\underline{p_1 = 0}$

$2x_2 = p_2 \qquad x_1 =$ libov.

$$x_2 = \frac{p_2}{2}$$



SAMODRUŽNÁ PŘÍMKA

$\underline{p_1 \neq 0}$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

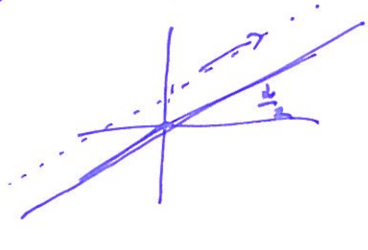
$$\det \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = -(\cos^2\alpha - \lambda^2) - \sin^2\alpha =$$

$$= \lambda^2 - 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}}$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$ ... $\left\langle \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2} \right) \right\rangle$

$\lambda_1 = -1$ ... $\left\langle \left(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2} \right) \right\rangle$



$\boxtimes$