$\mathbb{P}_2$ $(x_1, x_2 x_3)$

$(2,-1,0)$

$Q: \ x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$

$$(x_1, x_2, x_3)\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underset{-1}{}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim_{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \sim_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\sim \boxed{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P}$$

$$\boxed{P^T B \cdot P = D}$$

zobrazeni

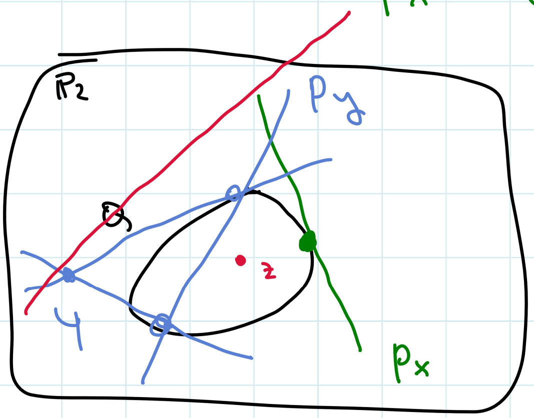
$$\begin{tikzcd} K : \ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \arrow[d, "P"] \\ Q \end{tikzcd}$$

$X = (2,-1,0)$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{B}$$

$$(2,-1,0)\,B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2,-1,0)\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^{*}} = 0$$

$p_x = (1,2,1)^*$ $\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$



$Y = \underline{(1,0,0)} \Rightarrow p_x = BY = (1,1,0)^*$

Lemma 4.20 (O polaritě)**.** Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q. Pak

1. Množina bodů sdružených s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ je nadrovina, kterou nazveme *polára k* X a označíme p_X.
2. Každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím *pólem*.
3. Pro libovolné dva body X, Y platí

$$X \in p_y \Leftrightarrow Y \in p_X.$$

4. Bod je X sdružen sám se sebou (nebo-li leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q. V takovém případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X.

Pevní souřadnice $\mathbb{P}^n$

$Q \quad \dots \quad B$

$\uparrow$ matice

$$\underline{X = (x_1, \dots, x_{n+1})}$$

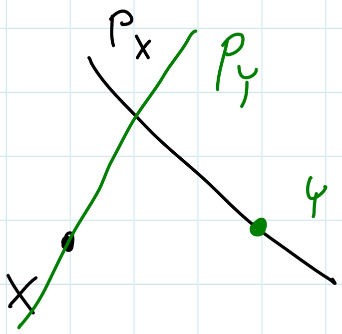
$$p_X: B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \text{nadrovina}$$

② Nadrovina

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n+1} \end{pmatrix}^T = B \cdot Y$$

$$Y = \underline{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_{n+1} \end{pmatrix}} \cdot B^{-1} \quad \text{pól.}$$

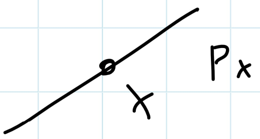
③

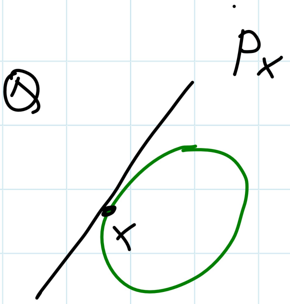


④ $X^T \cdot B X = 0 \iff X \in Q$

$\iff$

X sdružen s X





Lemma 4.21. Mějme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v něm regulární kvadriku Q. Pak

1. Pro libovolnou přímku p platí, že $Q \cap p$ je prázdná, jednoprvková nebo dvouprvková množina a všechny tyto případy nastávají. Jeden průsečík mají právě tečny ke Q.
2. Každým bodem X prochází 0, 1 nebo 2 tečny ke Q a všechny tyto případy nastávají. Jedna tečna prochází bodem X právě tehdy, když $X \in Q$.

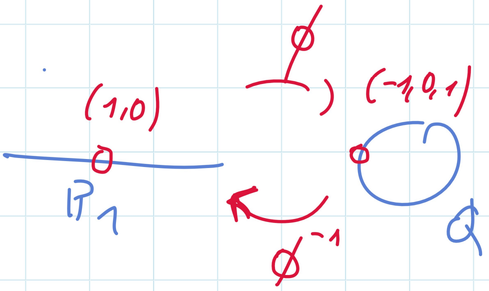
Stačí dokazovat pouze pro $Q: x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}^a \qquad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$

Parametrizuji Q

$$\phi : \underset{\underset{\mathbb{P}^1}{\cap}}{(t, s)} \longrightarrow \boxed{(s^2 - t^2, 2st, s^2 + t^2)}$$

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow Q \supset \mathbb{P}^2$$



$$\phi^{-1} : \overset{\mathbb{P}^2}{(x_1, x_2, x_3)} \longrightarrow (\overset{t}{x_2}, \overset{s}{x_1 + x_3})$$

zobraz. definováno mimo

$\left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l}(1,0,-1) = \\ = \boxed{(-1,0,1)}\end{array}}$

$$\phi^{-1} \circ \phi : \underline{(t, s)} = (2st, s^2 - t^2 + s^2 + t^2) =$$

$$= (2st, 2s^2) = 2s\,\underline{(t, s)} \qquad \underline{\underline{s \neq 0}}$$

$$s = 0 \Rightarrow (t, 0) = \underline{\underline{(1, 0)}}$$

DEF: $\phi^{-1}(-1, 0, 1) =$
$= (1, 0)$

$\underline{\phi^{-1} \circ \phi \text{ je identita}}$ na celém $\mathbb{P}^1$. $\Rightarrow \phi$ je prosté.

$$\phi \circ \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\overset{x_1}{(x_1 + x_3)^2 - x_2^2}, \overset{x_2}{\underline{2(x_1 + x_3)} \cdot x_2}, \overset{x_3}{(x_1 + x_3)^2 + x_2^2} \right) =$$

$$= \Big(\underbrace{x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2^2}_{2(x_1+x_3)\cdot x_1 - \boxed{(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)}_{=0}}, 2(x_1 + x_3) \cdot x_2, 2(x_1+x_3)x_3 + \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)}_{0} \Big)$$

$$= 2(x_1 + x_3)\,\underline{(x_1, x_2, x_3)}$$

$\phi \circ \phi^{-1}$ je identita na Q

$\Rightarrow \phi$ je $\underline{\underline{\text{na}}}$

1. Pro libovolnou přímku p platí, že $Q \cap p$ je prázdná, jednoprvková nebo dvouprvková množina a všechny tyto případy nastávají. Jeden průsečík mají právě tečny ke Q.

2. Každým bodem X prochází 0, 1 nebo 2 tečny ke Q a všechny tyto případy nastávají. Jedna tečna prochází bodem X právě tehdy, když $X \in Q$.

$Q: \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad p: \quad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$

$(s^2 - t^2, 2sd, s^2 + t^2) \longrightarrow$

$$\boxed{t^2(-p_1+p_3) + st(2p_2) + s^2(p_1+p_3) = 0}$$

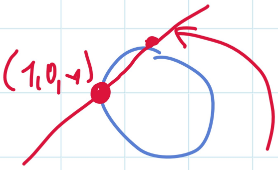
$s \cdot 1$, s^2

$\boxed{\begin{matrix} s=0 \\ \vdots \\ (1,0) \end{matrix}} \Rightarrow \quad t^2(-p_1+p_3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{p_1 = p_3}$

$$st(\cancel{2}p_2) + s^2(\cancel{2}p_1) = 0$$

$$s\,(\underbrace{tp_2 + sp_1}) = 0$$

$\leftarrow$ $\underline{s=0}$



$s = -p_2 \quad t = p_1 \qquad (\overset{t}{p_1}, \overset{s}{-p_2})$

jen jeden průsečík $p_2 = 0$

tedy přímka $(1,0,1)^*$

$(1,0,1)$ je polárou $(1,0,-1) \in K$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$\boxed{s \neq 0}$

$(t,s) = (\overset{d}{\frac{t}{s}}, 1)$

$$d^2(-p_1+p_2) + d(2p_2) + (p_1+p_2) = 0$$

$$D = 4p_2^2 - 4(-p_1+p_2)(p_1+p_2) = \underline{4(p_1^2+p_2^2-p_3^2)}$$

$D > 0$ … 2 průs. (např. $p = (1,0,0)^*$)

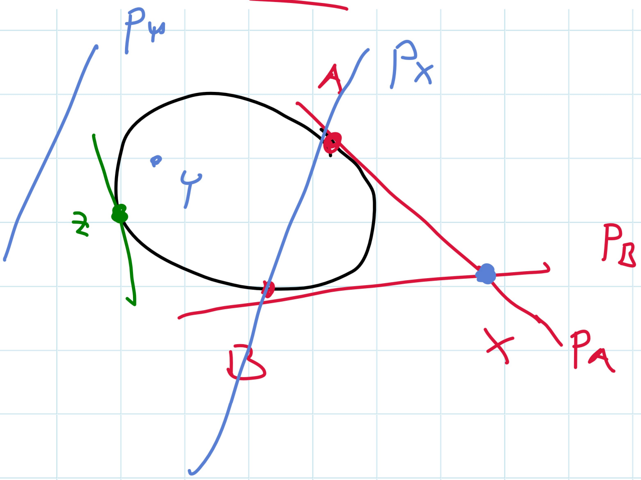
$D < 0$ … 0 průsečíků (např. $p = (0,0,1)^*$)

$D = 0$ … 1 průsečík např.: $\underline{p(1,0,1)}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0} \quad \dashrightarrow \quad p_X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \rightarrow D=0$

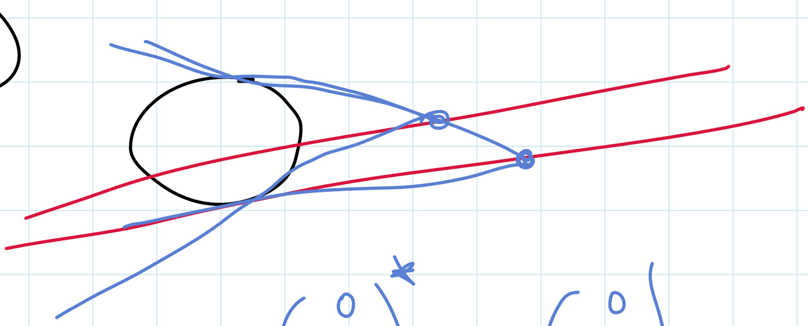
pól k $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}^*$ je $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}$

2. Každým bodem X prochází 0, 1 nebo 2 tečny ke Q a všechny tyto případy nastávají. Jedna tečna prochází bodem X právě tehdy, když $X \in Q$.
3. Na každé přímce existují body, kterými procházejí dvě tečny.
4. Jestliže A, B jsou dva různé body na Q, pak se tečny p_A, p_B protínají v pólu přímky $\overleftrightarrow{AB}$.



$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad p_x = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

③



$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in p$$

$$p_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^* \quad D > 0.$$

2 tečny

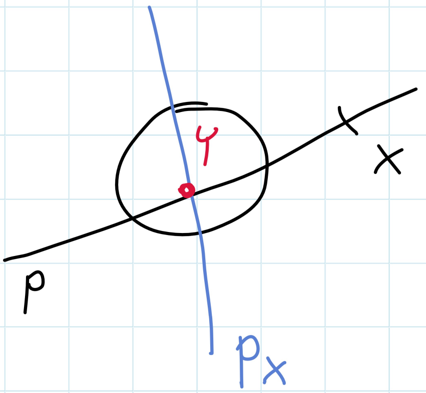
$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}^* \qquad \boxed{X = \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$X \in p$$

$$p_x = \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \\ 0 \end{pmatrix}^* \qquad \underline{\underline{D > 0}}$$

5. Mějme přímku p, která není tečnou ke Q a $X \in p$. Pak existuje právě jeden $Y \in p$ tak, že X a Y jsou polárně sdružené. Navíc platí $X \neq Y$ jestliže $X \notin Q$.

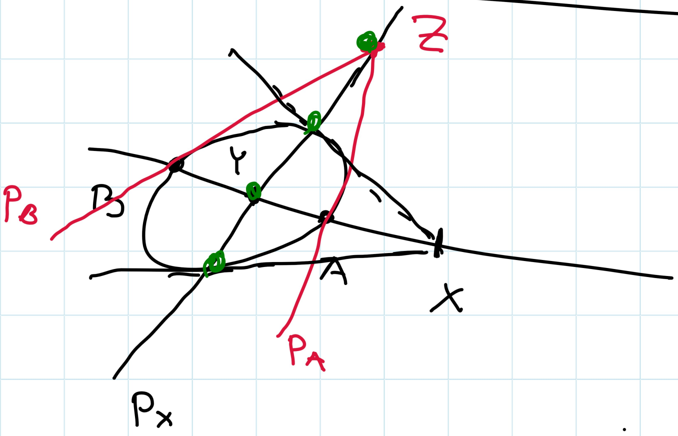
6. Mějme přímku p, která protíná Q ve dvou různých bodech A, B. Nechť $X \in p$ různé od A, B a nechť $Y = p_X \cap p$. Pak (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici. Navíc je přímky p_A, p_B a p_X protínají v jednom bodě, který je pólem přímky p.



$p_X = p$ … $X \in p_X$ => p_X je tečna.

---

⑥



$(X, Y, A, B) = -1$

$X = Lo(\vec{x})$ $\boxed{b(\vec{x}, \vec{y}) = 0}$

$Y = Lo(\vec{y})$

$A = Lo(\alpha_1 \vec{x} + \beta_1 \vec{y})$

$B = Lo(\alpha_2 \vec{x} + \beta_2 \vec{y})$

Definice 4.15. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem zůzné body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \underline{\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}} \\ \mathbf{d} &= \underline{\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}}. \end{aligned}$$

$$b(\alpha_1 \vec{x} + \beta_1 \vec{y}, \alpha_1 \vec{x} + \beta_1 \vec{y}) = 0$$

//

$$\alpha_1^2 \cdot b(\vec{x}, \vec{x}) + 2\alpha_1 \beta_1 \underset{0}{\cancel{b(\vec{x}, \vec{y})}} + \beta_1^2 b(\vec{y}, \vec{y})$$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

$$\boxed{(X, Y, A, B) = -1}$$

$$\alpha_1^2 \cdot b(\vec{x}, \vec{x}) + \beta_1^2 b(\vec{y}, \vec{y}) = 0$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \sqrt{-\frac{b(\vec{x}, \vec{x})}{b(\vec{y}, \vec{y})}} \quad A$$

$$\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2 = -\frac{b(\vec{x}, \vec{x})}{b(\vec{y}, \vec{y})}$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\sqrt{-\frac{b(\vec{x}, \vec{x})}{b(\vec{y}, \vec{y})}} \quad B$$

$$\left(\frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2}\right) = \text{—//—}$$

Definice 4.22. Mějme n-dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem T a $(n+1)$-dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \to B$ a bod $\mathbf{P} \in B \setminus Im(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \to \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

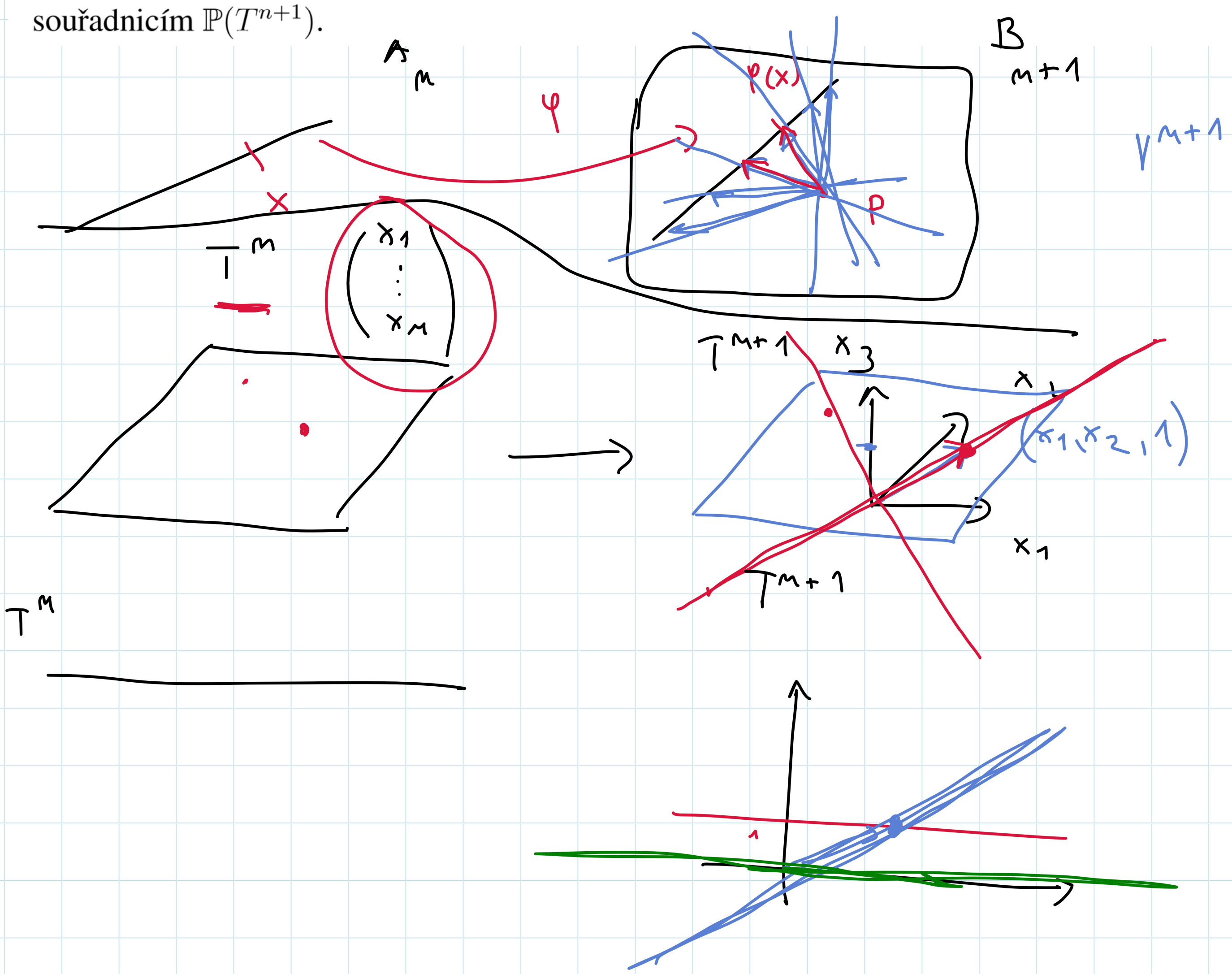
$$\Phi(\mathbf{X}) := \underline{LO\{\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{P}\}}, \quad \in \quad \mathbb{P}(V^{n+1})$$

prosté a nazývá se *vnoření* A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$.

Definice 4.23. Pro libovolné těleso splňuje zobrazení $\Phi : T^n \to \mathbb{P}(T^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = LO\{(x_1, \ldots, x_n, 1)\}$$

definici 4.22 a nazývá se *kanonické vnoření* aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru stejné dimenze. $\mathbb{P}(T^{n+1})$ se pak nazývá kanonickým projektivním rozšířením nebo též zúplněním afinního prostoru T^n. Přiřazení $(x_1, \ldots, x_n) \to \underline{(x_1, \ldots, x_n, 1)}$ je zároveň vyjádřením Φ vůči kanonickým afinním souřadnicím T^n a kanonickým homogenním souřadnicím $\mathbb{P}(T^{n+1})$.



Definice a lemma 4.25. Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n, pak

1. $\boxed{\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}}$, kde $\mathbb{P}^{n-1}$ je nadrovina s homogenní rovnicí $\boxed{x_{n+1} = 0}$, tedy se souřadnicemi $(0, \dots, 0, 1)^*$. Tato nadrovina se nazývá nevlastní nadrovina, označuje se p_∞ a její body se nazývají nevlastní body. Ostatní nadroviny $\mathbb{P}^n$ se nazývají vlastní.

2. Pro každou nadrovinu $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, která není nevlastní platí, že $A^{n-1} = \Phi^{-1}(\mathbb{P}^{n-1} \cap Im(\Phi))$ je afinní nadrovina prostoru T^n. O $\mathbb{P}^{n-1}$ hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění nadroviny A^{n-1} a o A^{n-1} hovoříme jako o afinní verzi $\mathbb{P}^{n-1}$. Toto přiřazení je zároveň bijekcí mezi všemi vlastními nadrovinami $\mathbb{P}^n$ a všemi nadrovinami T^n. Nevlastní body $\mathbb{P}^{n-1}$ považujeme i za nevlastní body A^{n-1}.

T^n

$$[x_1, \dots, x_n] \xhookrightarrow{\phi} (x_1, \dots, x_n, 1)$$

$0 \ \dots \quad x_{n+1} = 0$

$\in \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^*$

$$(x_1, \dots x_n, \overset{\neq 0}{x_{n+1}}) \cdot \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$\left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right] \hookrightarrow \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right)$$

$\mathbb{R}^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^2$

$$[x, y] \longrightarrow (x, y, 1)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \quad \begin{cases} \cancel{x}\ x_3 = 0 \leftarrow p_\infty \\ x_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right] \qquad \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)$$

②

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n+1} \end{pmatrix}^*$$

$X \in p$

$$\boxed{x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n + x_{n+1} p_{n+1} = 0}$$

$$[x_1, \dots, x_n]$$

$$\boxed{x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n + p_{n+1} = 0} \leftarrow \text{podprostor}$$

$\mathbb{R}^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^2$

$[x,y] \longrightarrow (x,y,1)$ $\qquad$ $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^*$

$\boxed{x + 2y + 3 = 0}$ $\qquad$ $\boxed{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0}$

$x_3 = 0$

p_∞

$x_1 + 2x_2 = 0$

$\longleftarrow \underline{X = (-2,1,0)} \in p$

$[-1,-1] \longleftarrow Y = (1,1,-1) = (-1,-1,\underline{1})$

$$\begin{tikzcd} x+2y+3=0 \\ {[-1,-1]} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Příklad 4.26 (Počítání v afinní a projektivní rovině)**.** Uvažujme afinní rovinu $\mathbb{R}^2$ s kanonickými afinními souřadnicemi $[x, y]$ a její kanonické projektivní rozšíření $\mathbb{P}^2$ s kanonickými homogenními souřadnicemi (x_1, x_2, x_3). $\to [x, y] \hookrightarrow (x, y, 1)$

1. Nalezněte projektivní bod, který odpovídá afinnímu bodu $\underline{A = [3, -1]}$, přesněji tedy nalezněte $\Phi(A)$.
2. Nalezněte afinní bod, který odpovídá projektivnímu bodu $B = (-6, 9, 3)$, přesněji tedy nalezněte $\Phi^{-1}(B)$.
3. Nalezněte projektivní rozšíření afinní přímky $\underline{2x+3y+4 = 0}$ a určete všechny její nevlastní body.
4. Nalezněte afinní verzi přímky s duálními souřadnicemi $(2, -1, 5)^*$.
5. Rozhodněte, zda-li afinní body $A = [1, 2]$, $B[4, -4]$ a $C[3, -2]$ leží na přímce. Určete obecnou rovnici této přímky.
6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3, 5]$, $E = [1, 7]$.

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right) \uparrow \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right]$$

① $(3, -1, 1) = (3\omega, -\omega, \omega)$

② $(-6, 9, 3) = (-2, 3, \underline{1}) \longleftrightarrow [-2, 3]$

③ $\to \boxed{2x + 3y + 4 = 0}$

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}}$$

$$2\frac{x_1}{x_3} + 3\frac{x_2}{x_3} + 4 = 0 \quad \Big| \, x_3$$

$$\boxed{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0}$$

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^* \qquad p_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* \qquad p \cap p_\infty = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

④ $(2, -1, 5)^*$ $\qquad 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{2x - y + 5 = 0}$$

⑤
$$\begin{array}{l} A \hookrightarrow \\ B \hookrightarrow \\ C \hookrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} (1, 2, 1) \\ (4, -4, 1) \\ (3, -2, 1) \end{vmatrix} = \cancel{-4} + \cancel{6} - \cancel{8} + \cancel{12} - \cancel{8} + \cancel{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

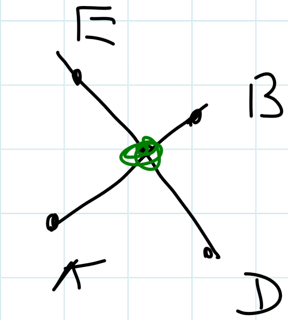
$$\overleftrightarrow{AB} \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}^*$$

6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3,5]$, $E = [1,7]$.

$\overleftrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}^{*}$

$\overleftrightarrow{DE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -16 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}^{*}$



$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 \end{pmatrix}$

$\overleftrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ ① \end{pmatrix}$

$\swarrow$

$[-4, 12]$.

Definice 4.27. Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n, pak

1. O množině $\tilde{Q} \subset A$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže existuje regulární kvadrika Q v $\mathbb{P}^n$ taková, že $\Phi(\tilde{Q}) = Q \cap Im(\Phi)$. O Q hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění $\tilde{Q}$ a o $\tilde{Q}$ hovoříme jako o afinní verzi Q. Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body $\tilde{Q}$.
2. Tečné nadroviny k $\tilde{Q}$ definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.
3. Jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastní bod T^n, pak jej nazýváme středem kvadriky $\tilde{Q}$.
4. Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadrovinu, která je vlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k $\tilde{Q}$.

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 1 = 0}$$

$$\frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 \cdot x_2 = x_3^2}$$

$$\boxed{x \cdot y = 1}$$

$$\left[4, \tfrac{1}{4}\right]$$

$$\to \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{x_1}{x_3} \\ y = \frac{x_2}{x_3} \end{array}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_3^2$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \to (1,0,0) \\ \to (0,1,0) \end{array}}$$ nevlastní body

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}^*$$

$$x_1 + 16x_2 - 8x_3 = 0$$

$$\boxed{x + 16y - 8 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}^* = \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^*$$

$$x_2 = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^*} \leftarrow$$

pól $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x = 0 \end{array}} \leftarrow$$

$$[0, 0]$$

Definice 4.30. Regulární kuželosečku v $\mathbb{R}^2$ nazveme *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky.

Příklad 4.31. Ukažte, že afinní kuželosečka $x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0$ je regulární, určete její afinní typ, nalezněte její střed (pokud existuje) a asymptoty (pokud existují).

$$x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0 \qquad x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 2\frac{x_1}{x_3}\cdot\frac{x_2}{x_3} - 2\frac{x_2}{x_3} + 2 = 0 \quad \Big|\, x_3^2$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$$

$$\boxed{\text{regulární}} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\cap\ x_3 = 0$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 = 0$$

$$x_1(x_1 + 2x_2) = 0$$

Hyperbola!

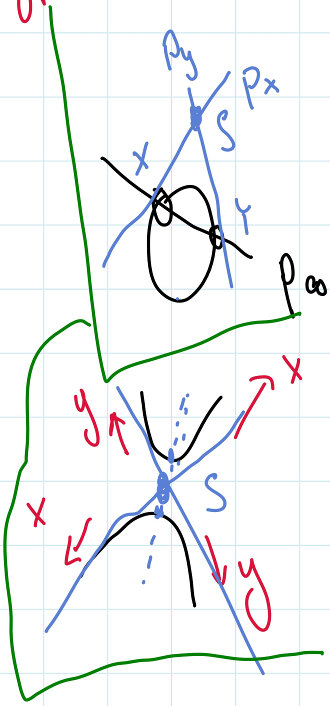
$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_1 \quad x_2$

$X = \underline{(0,1,0)}$ $\qquad$ $Y = \underline{(2,-1,0)}$

asympt.

$$p_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^* \qquad x_1 - x_3 = 0 \qquad \boxed{x - 1 = 0}$$

$$p_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^* \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \qquad \boxed{x + 2y + 1 = 0}$$



$$S = p_x \cap p_y = [1,-1] \rightsquigarrow \underline{(1,-1,1)}$$