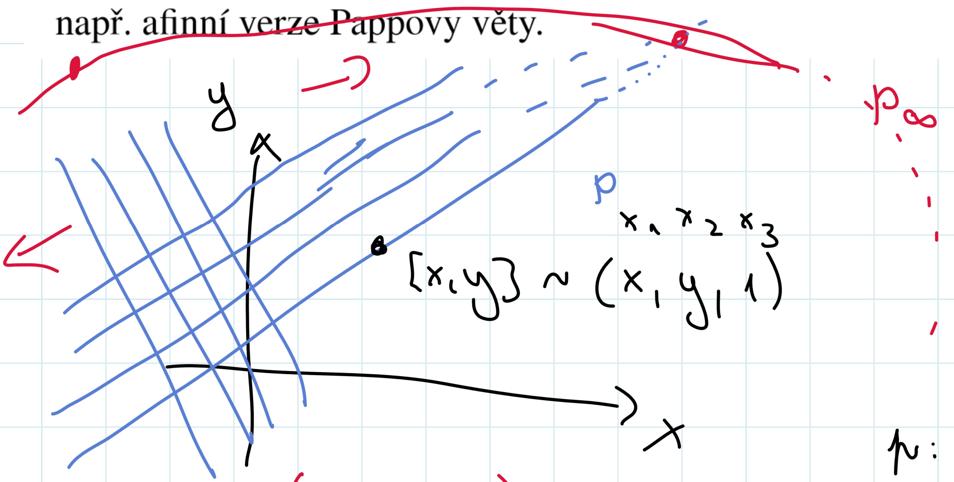
Věta 4.32. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ má každá afinní přímka p v $\mathbb{R}^2$ se směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat *směr* p.

Poznámka 4.33. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ se všechny rovnoběžky protínají v jednom nevlastním bodě - ve svém směru. Přitom všechny nevlastní body leží na (projektivní) přímce $(0, 0, 1)^*$. Reálnou projektivní rovinu $\mathbb{P}^2$ je tedy možno chápat jako $\mathbb{R}^2$, ke kterému se přidá jeden bod v každém směru. Přitom ale po tomto přidání vznikne dokonale symetrická (projektivní) geometrie. Mnoho různých afinních problémů je možno převést na stejný projektivní problém - např. afinní verze Pappovy věty.



$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ [x, y] \sim & (x, & y, & 1) \end{matrix}$$

$$p_\infty = (0, 0, 1)^*$$

$$(v_x, v_y, 0) = (-v_x, -v_y, 0)$$

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

$p:\quad ax + by + c = 0$

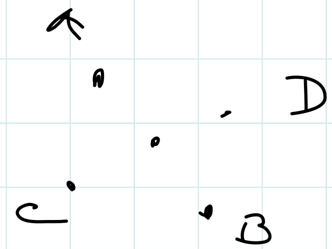
$$-v_y x + v_x y + c = 0$$

proj.:

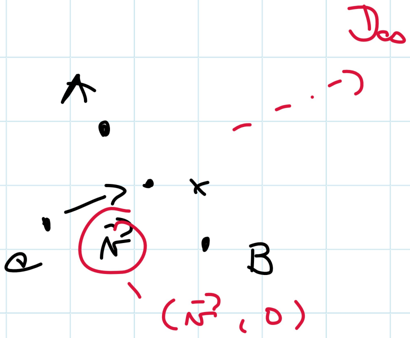
$$-v_y \cdot x_1 + v_x \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 0$$

$$-v_y \cdot x_1 + v_x x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$$

$$(v_x, v_y, 0)$$

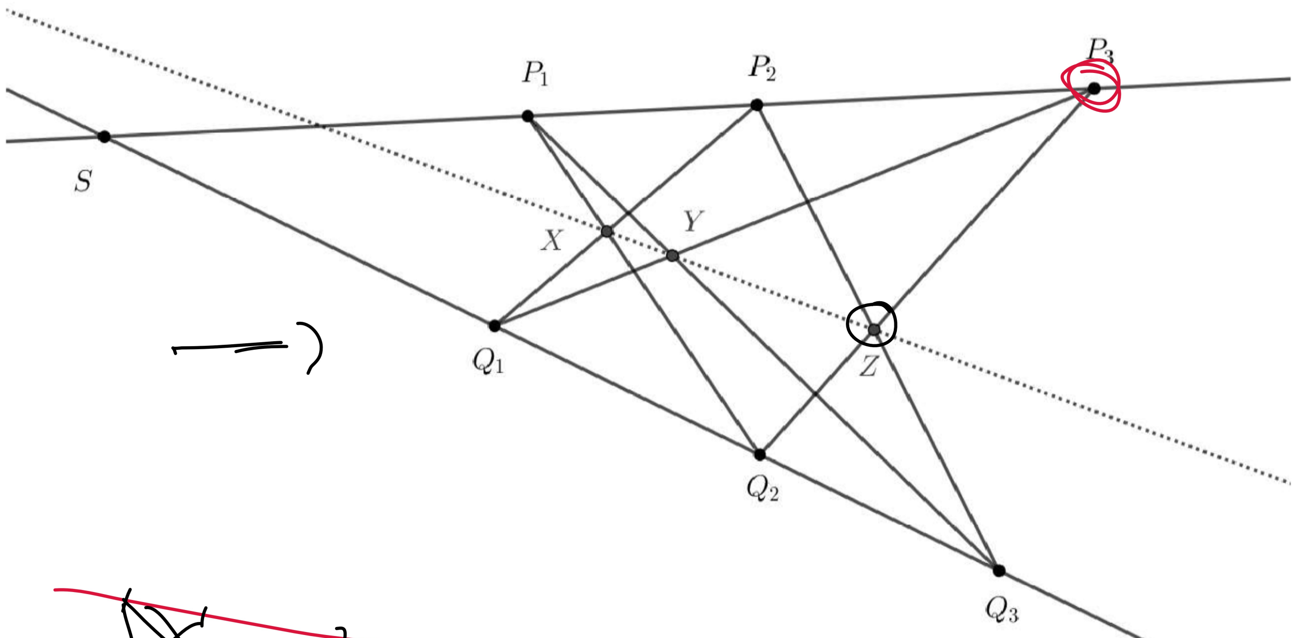


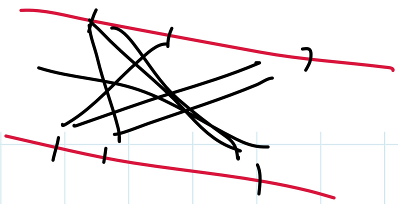
$$X = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$$

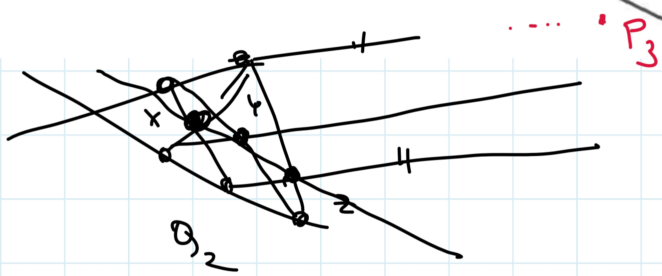


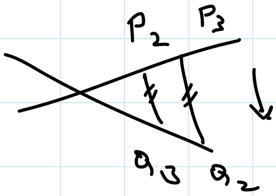
$$X = \overleftrightarrow{AB} \cap (C + \langle \vec{v} \rangle)$$

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD_\infty}$$


S
P_1
P_2
P_3
X
Y
Z
Q_1
Q_2
Q_3




P_3
X
Y
Z
Q_2


P_2
P_3
Q_3
Q_2

Definice a lemma 3.27. Mějme tři body A, B, X na afinní přímce nad tělesem T, přičemž $A \neq B$ a $X \neq B$. Pak dělící poměr

$$\frac{AX}{XB} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(B - X) = (X - A)$. Potom platí, že X je afinní kombinací bodů A, B

$$X = \frac{1}{\lambda + 1} A + \frac{\lambda}{\lambda + 1} B$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice X v soustavě (A, B), pak

$$\frac{AX}{XB} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Definice a lemma 4.15. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem zůzné body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců.

Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$
$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Jestliže $(A, B, C, D) = -1$ řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*. Pak ovšem harmonickou čtveřici tvoří i body v pořadí (B, A, C, D), (A, B, D, C), (B, A, D, C), (C, D, B, A), (C, D, A, B), (D, C, A, B), (D, C, B, A).

Věta 4.34. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělící poměry platí

1. Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak
$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$
2. Jestliže D je nevlastní,pak
$$(A, B, C, D) = -\frac{AC}{CB}.$$
3. Speciálně, pokud je (A, B, C, D) harmonická čtveřice a bod D je nevlastní, pak C je středem AB.

-1 $\Rightarrow \frac{AC}{CB} = 1$

(1) v $\mathbb{R}^2$

$A = [a_x, a_y] \sim (a_x, a_y, 1) = \vec{a}$

$B = [b_x, b_y] \sim (b_x, b_y, 1) = \vec{b}$

$C = [c_x, c_y] \sim (c_x, c_y, 1) = \vec{c}$

$D = [d_x, d_y] \sim (d_x, d_y, 1) = \vec{d}$

bary. souřadnice

$\boxed{\vec{c} = c_1 \cdot \vec{a} + c_2 \cdot \vec{b}}$

$\vec{d} = d_1 \cdot \vec{a} + d_2 \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow (A, B, C, D) = \frac{d_1 \cdot c_2}{c_1 \cdot d_2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{C = c_1 A + c_2 B}$, $D = d_1 \cdot A + d_2 B$ $\Rightarrow$ $\frac{AC}{CB} = \frac{c_2}{c_1}$ $\quad \frac{AD}{DB} = \frac{d_2}{d_1}$

$c_1 + c_2 = 1$

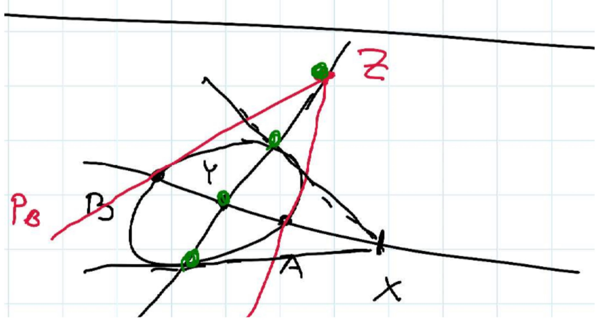
$d_1 + d_2 = 1$

(2) $D = \overleftrightarrow{AB} \cap p_\infty = (b_x - a_x, b_y - a_y, 0) = \vec{d}$

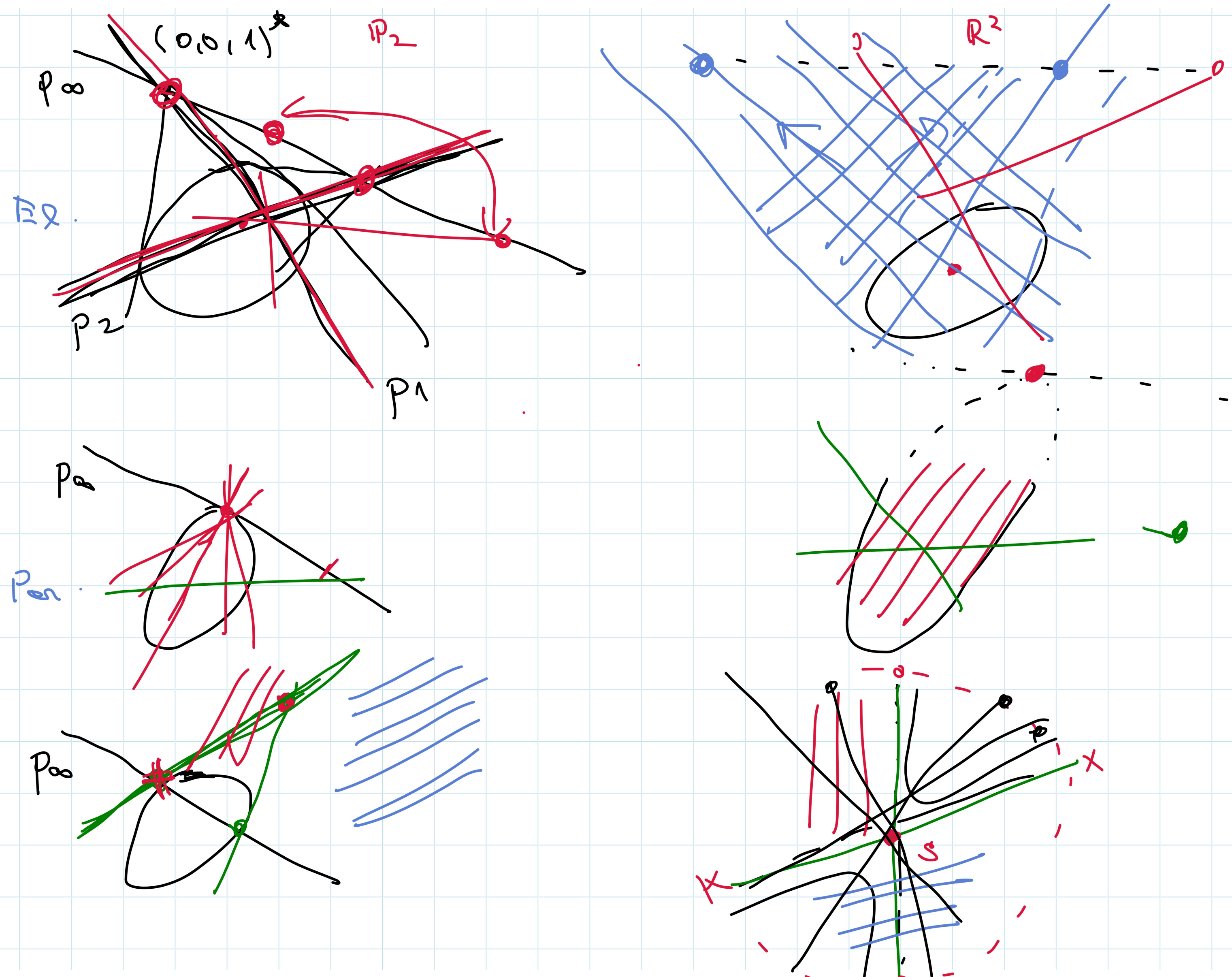
$\Rightarrow \vec{d} = (-1)\vec{a} + (1) \cdot \vec{b}$

$(A, B, C, D) = \frac{c_2 \cdot (-1)}{c_1 \cdot 1} = -\frac{c_2}{c_1} = -\frac{AC}{CB}$ ☒

$\boxed{4.21.}$ ~~6.~~ Mějme přímku p, která protíná Q ve dvou různých bodech A, B. Nechť $X \in p$ různé od A, B a nechť $Y = p_X \cap p$. Pak (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici. Navíc se přímky p_A, p_B a p_X protínají v jednom bodě, který je pólem přímky p.



Definice a lemma 4.30. Regulární kuželosečku v $\mathbb{R}^2$ nazveme *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají.

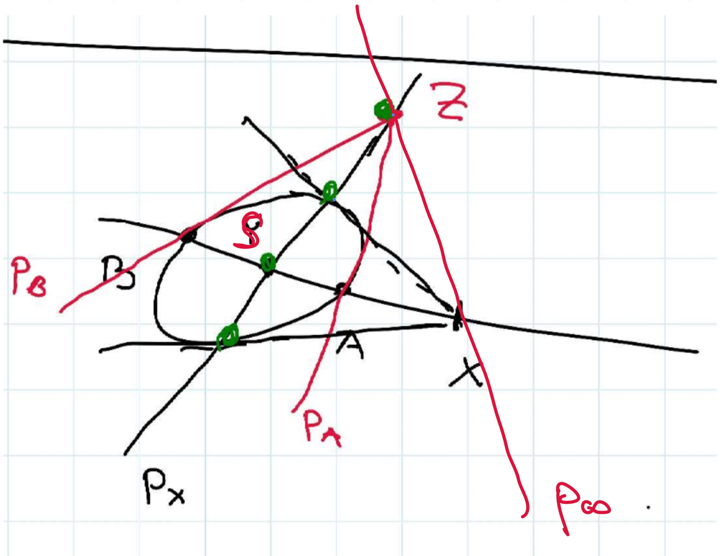


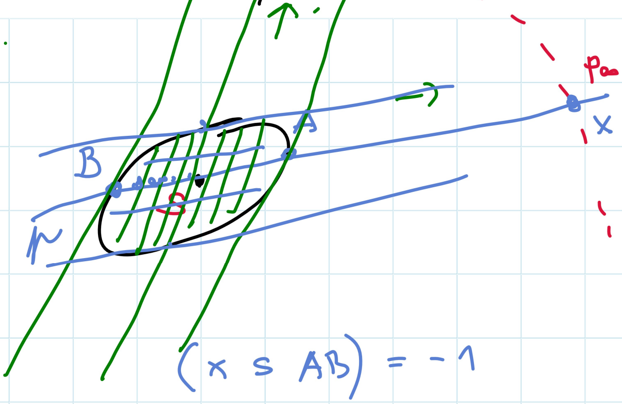
Definice a lemma 4.35. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme regulární kuželosečku Q. O dvou afinních přímkách řekneme, že mají sdružené směry, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q.

Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Věta 4.36. Nechť přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B. Pak

- S je středem úsečky AB.
- Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p.
- Jestliže má přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky C, D, pak přímka $\cancel{P}$ p půlí úsečku CD.





$(X\ S\ AB) = -1$

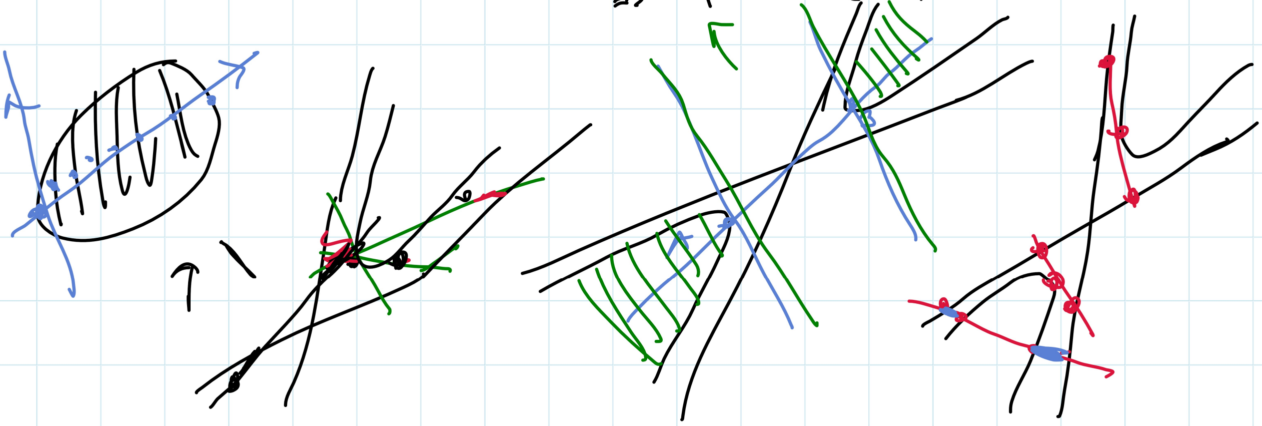
X je nevlastní

S je sdružený k A

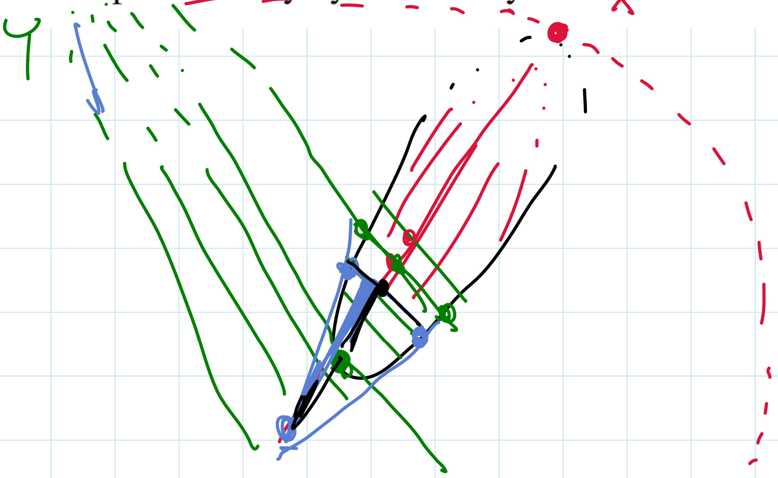
$p \ni S$

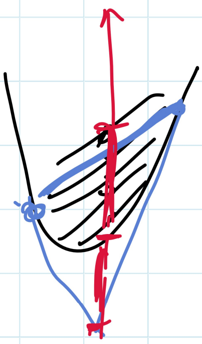
$S = $ pól p_∞

$\Rightarrow$ pól $p \in p_\infty$



Důsledek 4.37. Uvažujme parabolu a směr X jejího nevlastního bodu a nějaký další směr Y. Uvažujme všechny rovnoběžky se směrem Y. Některé parabolu neprotnou, jedna z nich bude tečna s bodem dotyku A a ostatní protnou parabolu ve dvou bodech. Pak přímka procházející AO půlí všechny vyťaté úsečky.

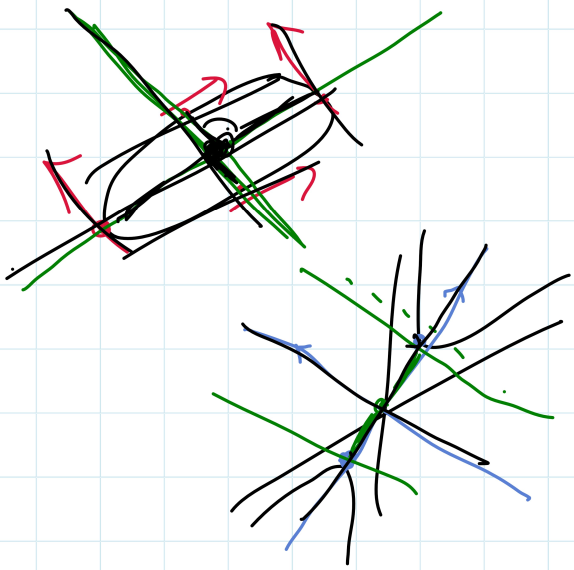


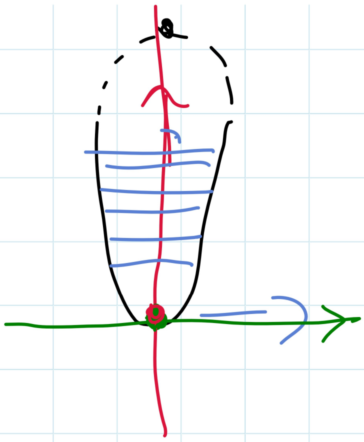


$y = x^2$

Definice 4.38. Směr nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Bod A kuželosečky nazveme vrcholem, jestliže v něm má tečna p_A hlavní směr. Přímka, která prochází vrcholem a je kolmá na tečnu se nazývá osa. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Věta 4.39. Elipsa má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly.





B' B

$$Q \dots (x,y,0)\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{x_3 = 0}$ změna q na

ORTONORMÁLNĚ DIAGONALIZOVATELNÁ

B' pozit. def ⇒ elipsa

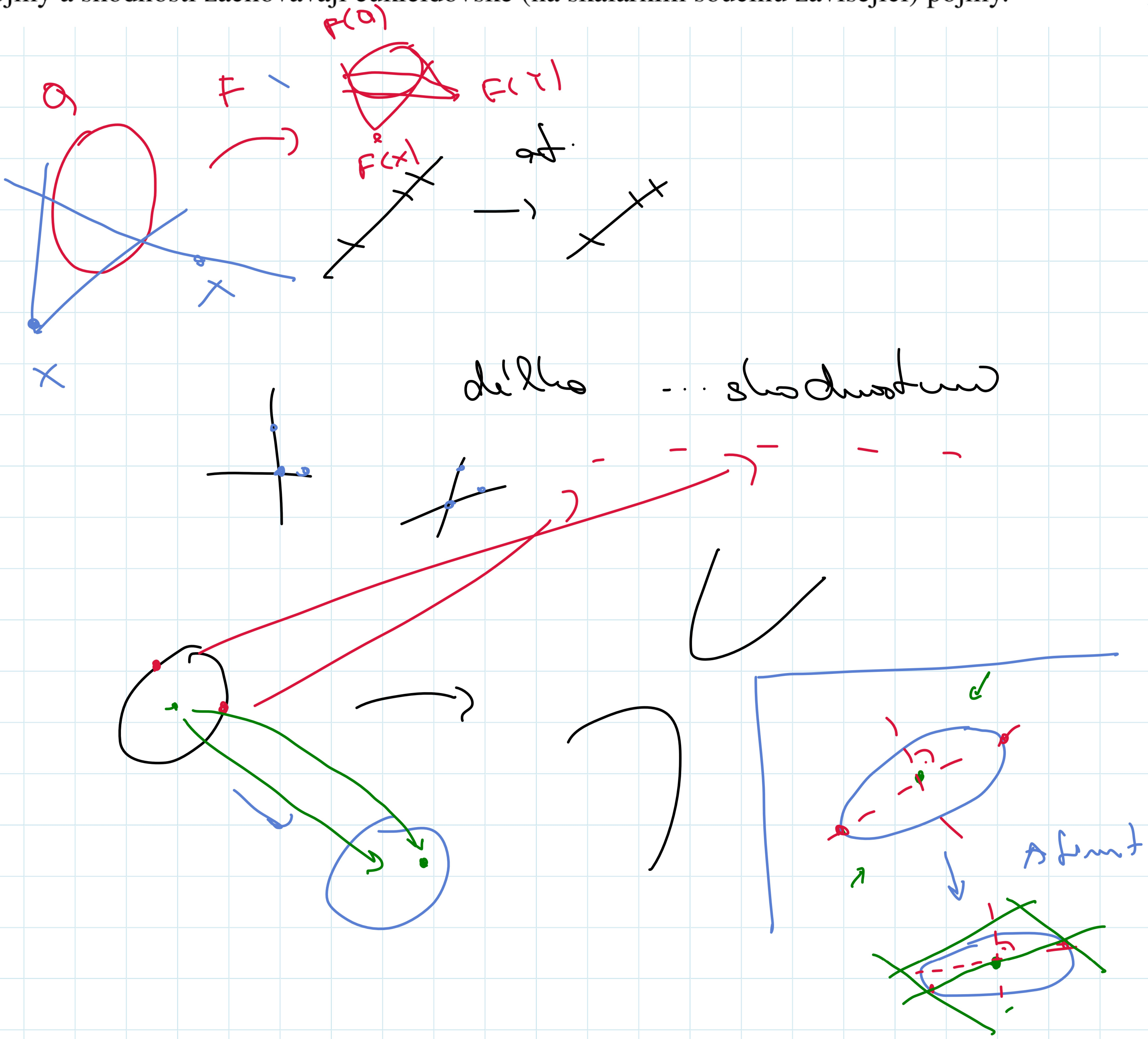
B' singulár ⇔ parabola

B' (1, 1, 0) ⇔ hyperbola

N2 N1

$$(0, 1)\begin{pmatrix} \bar b_{11} & 0 \\ 0 & \bar b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Poznámka 4.40 (Meta-věta o projektivních, afinních a eukleidovských pojmech)**.** Projektivní zobrazení zachovávají (správně zobrazují) projektivní pojmy, afinní zobrazení zachovávají afinní pojmy a shodnosti zachovávají eukleidovské (na skalárním součinu závisející) pojmy.



Věta 4.41. Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor T^n. Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ty, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body. Eukl. < Aff < Proj

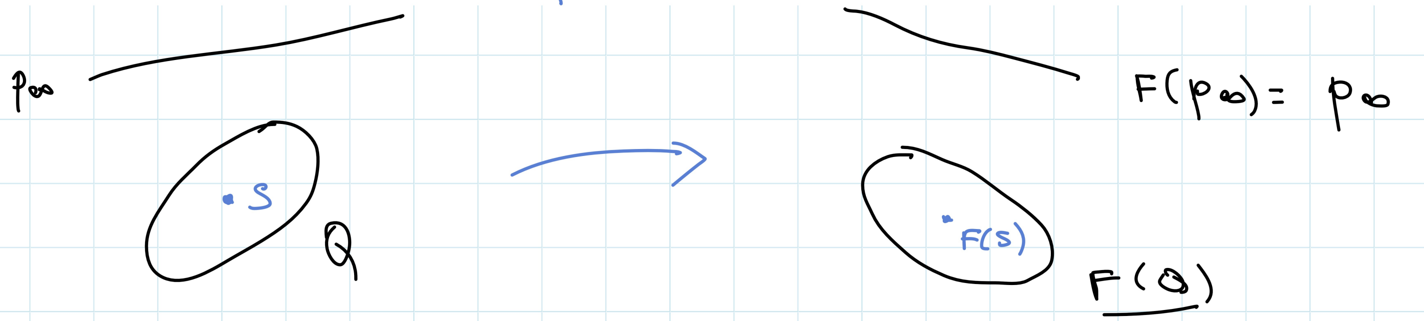
Dk v $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} = 0 & \cancel{a_{32}} = 0 & \boxed{a_{33}} = 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ \cancel{a_{31}x} + \cancel{a_{32}y} + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{A}$ … ny, F, 1

$$\bar{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta 4.42 (Příklad afinně zachovaného pojmu)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme elipsu Q se středem S. Jestliže F je $\underbrace{\text{afinní transformace}}_{\text{afinita}}$, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.



$$Q \cap p_\infty = \emptyset \Rightarrow F(Q) \cap \underset{\substack{\parallel \\ p_\infty}}{F(p_\infty)} = \emptyset$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ b(x,x)}}{q(x)} = 0$$

$F(Q)$

$$\bar{b}(x,y) = b(F^{-1}(x), F^{-1}(y))$$

$$\forall X \in p_\infty: \quad b(X,S) = 0$$

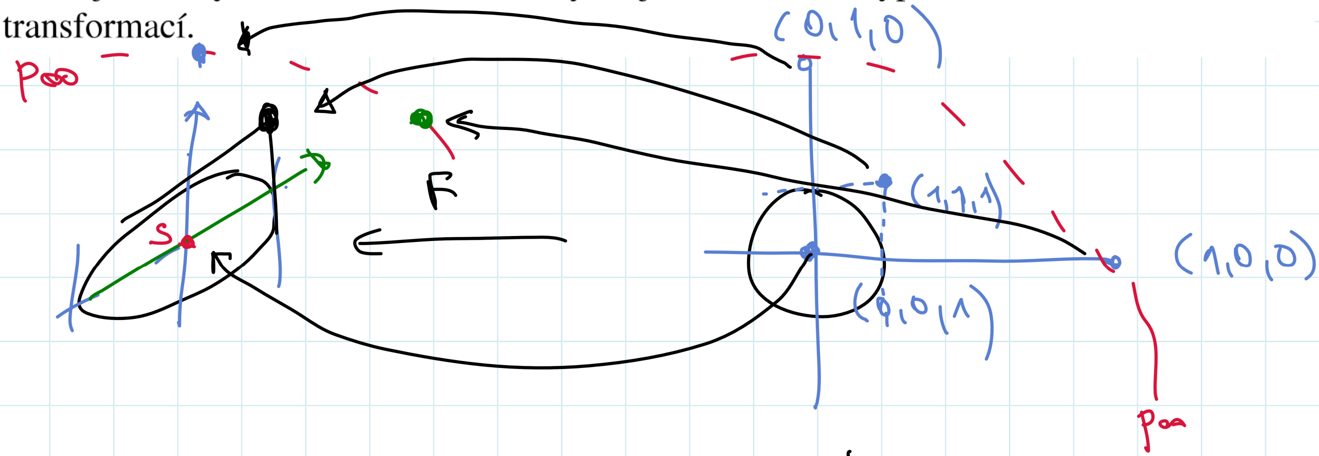
$$\forall Y \in p_\infty: \quad \bar{b}(F(S), Y) = 0$$

$$\bar{b}(F(S), Y) = b(F^{-1}(F(S)), F^{-1}(Y)) = b(S, \underbrace{F^{-1}(Y)}_{X \in p_\infty}) = 0$$

Věta 4.43. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ platí, že

1. každá elipsa je afinní transformací elipsy $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
2. každá parabola je afinní transformací paraboly $x^2 - y = 0$,
3. každá hyperbola je afinní transformací hyperboly $xy - 1 = 0$.

V důsledku jsou tedy každé dvě kuželosečky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.



Projektivně : Věta 4.18

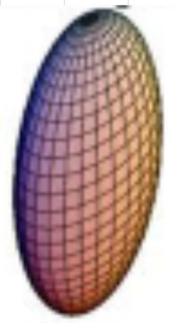
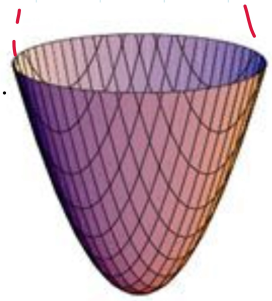
$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 \qquad \text{(nepřímková kvadrika)} \\
x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 \qquad \text{(přímková kvadrika).}
\end{aligned}
$$

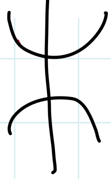
Věta 4.44 (Afinní klasifikace kvadrik v prostoru)**.** V projektivně rozšířeném prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik

1. *elipsoid* jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,
2. *eliptický paraboloid*, jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,
3. *dvojdílný hyperboloid* jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
4. *jednodílný hyperboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
5. *hyperbolický paraboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku

Každé dvě kvadriky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

ρ_∞ ρ_∞ ρ_∞

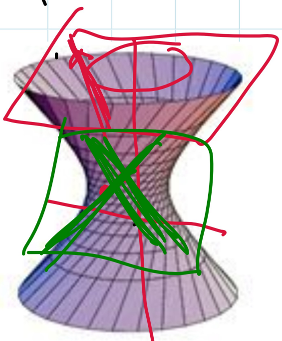
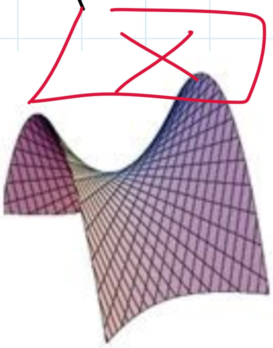


⇐ nepřímkové

elipsoid

el. paraboloid

2-dílný hyperboloid

⇐ přímkové

1-dílný hyperboloid

hyperbolický paraboloid