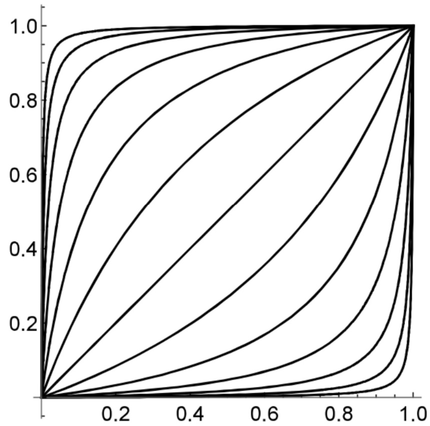
Věta 5.1. Funkce reálné proměnné

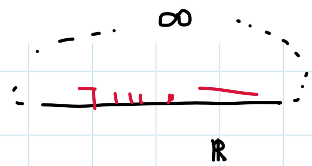
$$f_a(x) = \frac{ax}{(a-1)x+1}, \qquad a \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty),$$

jsou rostoucí difeomorfismy intervalu $[0,1]$ na sebe. Pro libovolné hodnoty $x_0, y_0 \in (0,1)$ existuje právě jedno $a \in \mathbb{R}_+$ takové, že $f_a(x_0) = y_0$. Tyto funkce tvoří vzhledem ke skládání grupu, která je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}_+, *)$. Jedná se o zúžení na interval $[0,1]$ prvků podgrupy projektivní grupy $PGL(\mathbb{RP}^1)$.



Funkce f_a pro několik hodnot parametru a.

$P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{RP}^1$



$[x] \hookrightarrow (x,1)$

$(1,0) = \infty$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{ax+b}{cx+d} \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro $cx+d \neq 0$

$x \neq -\frac{d}{c}$

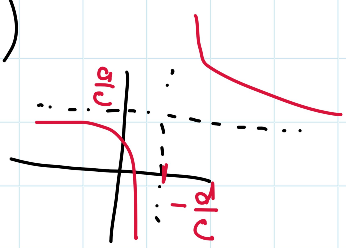
2×2

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad g(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$$

$g \circ f$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa+Bc & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$



$$f\begin{pmatrix} -\frac{d}{c} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \infty$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix}$$

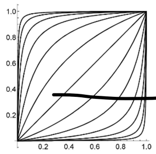
$$P(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^*$$

$(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \dots *)$

Věta 5.1. Funkce reálné proměnné

$$f_a(x) = \frac{ax}{(a-1)x+1}, \qquad a \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty),$$

jsou rostoucí difeomorfismy intervalu $[0,1]$ na sebe. Pro libovolné hodnoty $x_0, y_0 \in (0,1)$ existuje právě jedno $a \in \mathbb{R}_+$ takové, že $f_a(x_0) = y_0$. Tyto funkce tvoří vzhledem ke skládání grupu, která je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}_+, *)$. Jedná se o zúžení na interval $[0,1]$ prvků podgrupy projektivní grupy $PGL(\mathbb{RP}^1)$.



Funkce f_a pro několik hodnot parametru a.

0

$f_a(x_0) = y_0$

$$\frac{a x_0}{(a-1)x_0 + 1} = y_0$$

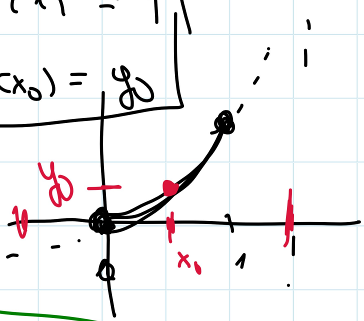
$a x_0 = (a-1)x_0 y_0 + y_0$

$$a = \frac{-x_0 y_0 + y_0}{x_0 - x_0 y_0} = \frac{y_0(1-x_0)}{x_0(1-y_0)}$$

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(x_0) = y_0$

$f_a(0) = 0$
$f_a(1) = 1$
$-\frac{d}{c} = \frac{1}{1-a} \to \infty$

$\frac{1}{1-a} \notin [0,1] \Longrightarrow$



$n = 1$

Důsledek 4.11.

projektivní zobrazení dáno $n+2$ 3 body

$$\begin{array}{ccccc} f_a & & f_b & & f(ab) \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} b & 0 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} ab & 0 \\ ab-1 & 1 \end{pmatrix} \\ a & & b & & ab \end{array}$$

$(\mathbb{R}^+, *)$

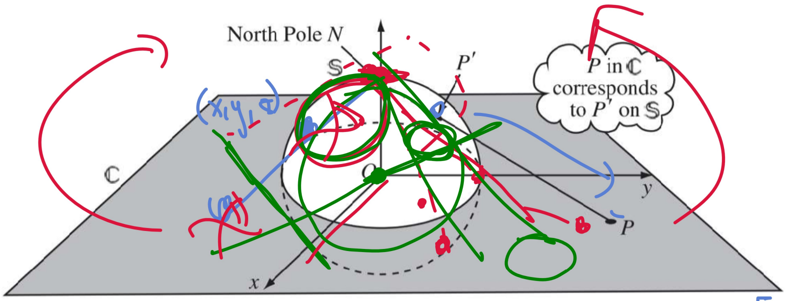
$a \longleftrightarrow f_a$ grupový homomorf

Definice 5.2. Komplexní projektivní přímka má vlastní body $[z] \sim (z, 1)$ a jeden nevlastní bod $(0, 1)$, který budeme též označovat ∞ a tedy psát $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Jsou-li z_i vlastní body pak

$$(z_i \to \infty) \Leftrightarrow (|z_i| \to +\infty)$$

$(\mathbb{C}_2 \setminus \{\vec{0}\}) / \mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^1$

a jestliže ztotožníme $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$, pak ∞ leží na každé přímce a na žádné kružnici. Správnou představu o $\mathbb{CP}^1$ získáme, když zobrazíme $\mathbb{C}$ na sféru $\mathbb{S}$ pomocí projekce π z bodu $N = (0, 0, 1)$ (tak zvaná stereografická projekce).



$\pi^{-1}(x, y, z) = \left[\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right]$

Dostaneme tak obrazy všech vlastních bodů:

$$\pi(z) = \pi(x + y\mathbf{i}) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

a navíc definujeme $\pi(\infty) \to \underbrace{(0, 0, 1)}_{N}$. Pak je π homeomorfismem (oboustranně spojitou bijekcí) $\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{CP}^1$, které nazýváme také *Riemannova sféra*. Obrazy přímek a kružnic v $\mathbb{R}^2$ jsou kružnice na $\mathbb{S}$, tyto křivky souhrně nazýváme *kruhové křivky*.

Grupa projektivních transformací $PGL(\mathbb{CP}^1)$, pokud se uvažuje na Riemannově sféře $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}$, se nazývá též Möbiova a její prvky Möbiovy transformace.

Definice 5.3. Na Riemannově sféře definujme *kruhovou inverzi ρ vzhledem k jednotkové kružnici* předpisem

$$\rho(z) = \frac{1}{\bar{z}} \text{ pro } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \rho(0) = \infty, \quad \rho(\infty) = 0.$$

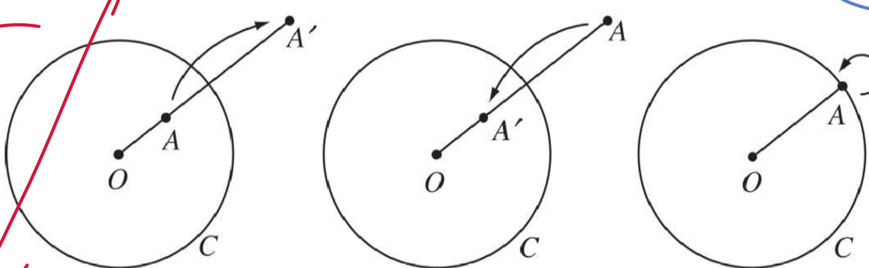
$PGL(\mathbb{CP}^1)$

$\frac{az+b}{cz+d}$

Jestliže $z = x + y\mathbf{i} \neq 0$, pak v reálných souřadnicích máme

$$\rho(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

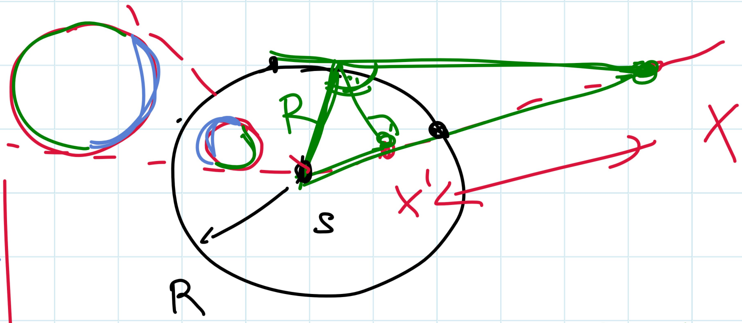


$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{z}{|z|^2}$

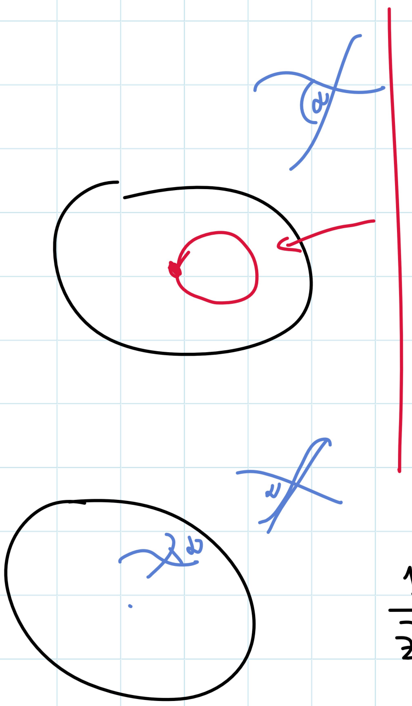
Zobrazení $z \to \frac{1}{z}$ nazýváme *převrácená kruhová inverze*.

$\rho \circ \rho = \mathrm{Id}$

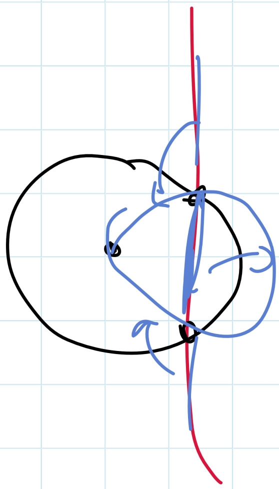
$\frac{1}{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = z$

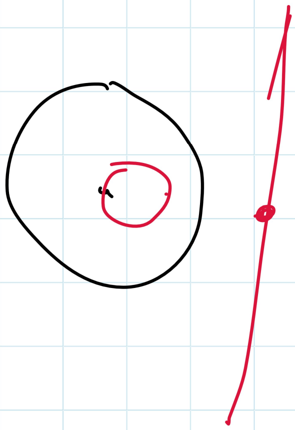


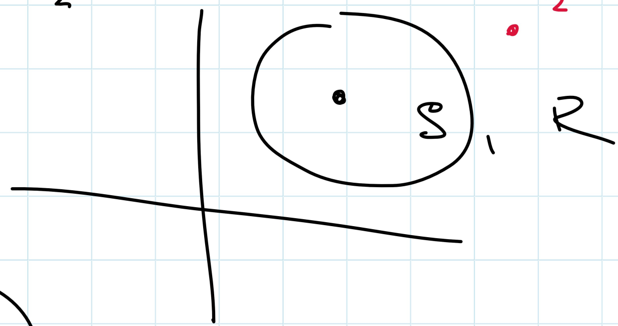
$$|sx| \cdot |sx'| = R^2$$

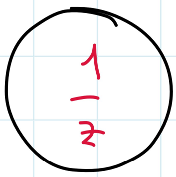


$\frac{1}{z}$









$\cancel{\frac{1}{z}}$

$$\frac{z-S}{R} \rightsquigarrow \boxed{\frac{R^2}{\bar{z}-S}+S}$$

$z \to$

Věta 5.4. Každou Möbiovu transformaci lze vyjádřit jako složení posunutí, otočení, stejnolehlosti a převrácené kruhové inverze.

$$\boxed{\frac{1}{z}} \qquad \boxed{\frac{az+b}{cz+d}}$$

$a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

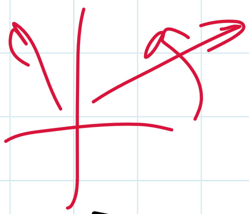
stejnolehl. otočení

$$f(z) = a \cdot z = |a| (\cos\alpha + i \sin\alpha) \cdot z$$

$$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$



$$\frac{az+b}{cz+d} \quad \begin{cases} c = 0 & \frac{a}{d} \cdot z + \frac{b}{d} \\ c \neq 0 & \end{cases}$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \frac{ac \cdot z + a \cdot d - ad + b}{cz+d} = \frac{1}{c}\left[a + \frac{b-ad}{cz+d}\right] \cdot$$

$$= \frac{b-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

$\frac{1}{z}$ pos

ot. + st. ot. + st. pos.

$at + ad$

$$f = \left[P \circ OS \circ \tfrac{1}{z} \circ P \circ OS\right]$$

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \to w \cdot z = (a+bi)(x+yi) = (ax-by) + i(ay+bx)$$

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$

$$w = a + bi$$

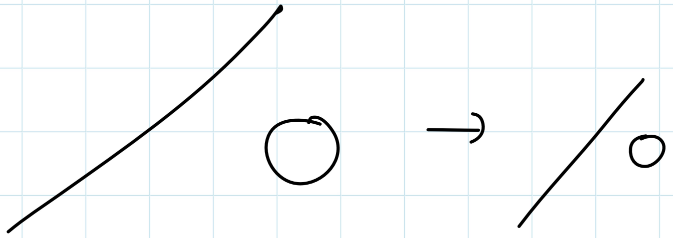
$z = x + yi$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix}$$

Věta 5.5. Každá Möbiova transformace i kruhová inverze zachovává kruhové křivky. Jinými slovy, obrazem přímky nebo kružnice je přímka nebo kružnice.

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \qquad \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

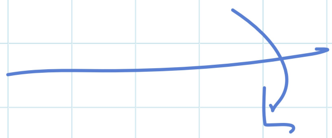
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad \boxed{\frac{1}{z}}$$

otočení + stejnolehlost, posunutí

$$\boxed{f(\infty) = \infty}$$



Kruhové křivky

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad w \in \mathbb{C}$

$$|w|^2 > \alpha \cdot \beta$$

$\alpha = 0$ $\quad |w|^2 > 0$

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \alpha \cdot z \cdot \bar{z} - \underbrace{(z\bar{w} + \bar{z} \cdot w)}_{\beta} + \beta = 0 \right\}$$

$$\sim \boxed{(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0}$$

$R^2 > 0$

$$\underset{\alpha}{1} \cdot \underset{z \cdot \bar{z}}{(x^2 + y^2)} - \underbrace{(2x \cdot S_x + 2y \cdot S_y)}_{\beta} - R^2 + \underbrace{S_x^2 + S_y^2}_{\beta} = 0$$

$$\boxed{w = S_x + i S_y}$$

$$z \cdot \bar{w} = (x + iy)(S_x - i S_y) =$$
$$= (x \cdot S_x + y S_y) + i(\quad)$$

$\beta = 2$

$$\boxed{\alpha = 0} \Rightarrow \text{přímky}$$

$0x + 0y$

$$\alpha \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\bar{z}} - \left(\frac{1}{z} \cdot \bar{w} + \frac{1}{\bar{z}} \cdot w\right) + \beta = 0 \quad \Big| \, z \cdot \bar{z}$$

$$\alpha - (\bar{z} \cdot \bar{w} + z \cdot w) + \beta \cdot z \cdot \bar{z} = 0$$

$\alpha \leftrightarrow \beta$
$w \to \bar{w}$

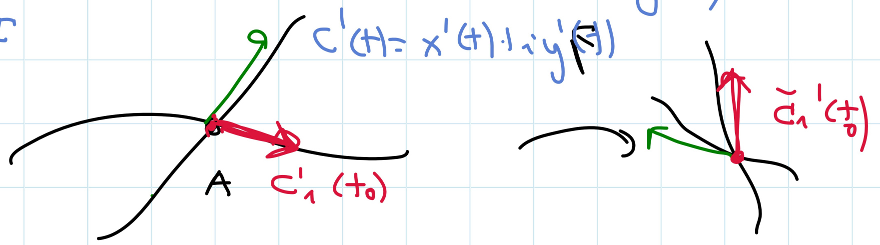
Věta 5.6. Každá Möbiova transformace i kruhová inverze zachovává úhly mezi křivkami (je to tedy konformní zobrazení). Přesněji, mějme rovinné regulární hladké křivky $c_1(t)$ a $c_2(s)$ takové, že $c_1(t_0) = c_2(s_0) = A \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ a Möbiovu transformaci F, přičemž $B = F(A) \neq \infty$. Definujme $\tilde{c}_1(t) = F(c_1(t))$ a $\tilde{c}_2(s) = F(c_2(s))$. Pak vektory $\tilde{c}_1'(t_0)$, $\tilde{c}_2'(s_0)$ svírají stejný úhel jako vektory $c_1'(t_0)$, $c_2'(s_0)$.

$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$c(t) = x(t) + i\,y(t)$

$c'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$

$F \quad \dfrac{az+b}{cz+d}$



$F(z) = \dfrac{1}{z}$

$$\tilde{c}_1(t)' = \left[\frac{1}{c_1(t)}\right]' = \boxed{\left[-\frac{1}{c_1^2(t)}\right]} \cdot c_1'(t)$$

$\Rightarrow$ $F'(A)$

$\left[-\dfrac{1}{A^2}\right] \cdot c_1'(t)$

$\left[-\dfrac{1}{A^2}\right] \cdot c_2'(t)$

$\tilde{c}_2$ zachovává úhly

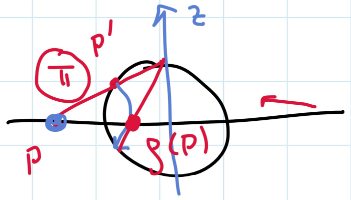
$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left[\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{F_1(x,y)},\ \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{F_2(x,y)}\right]$$

$$\boxed{J} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{c}_1'(t) = J \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Cauchy-Riemannovy podmínky $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$



$\boxed{\pi^{-1} \circ i \circ \pi(P) = \rho(P)}$

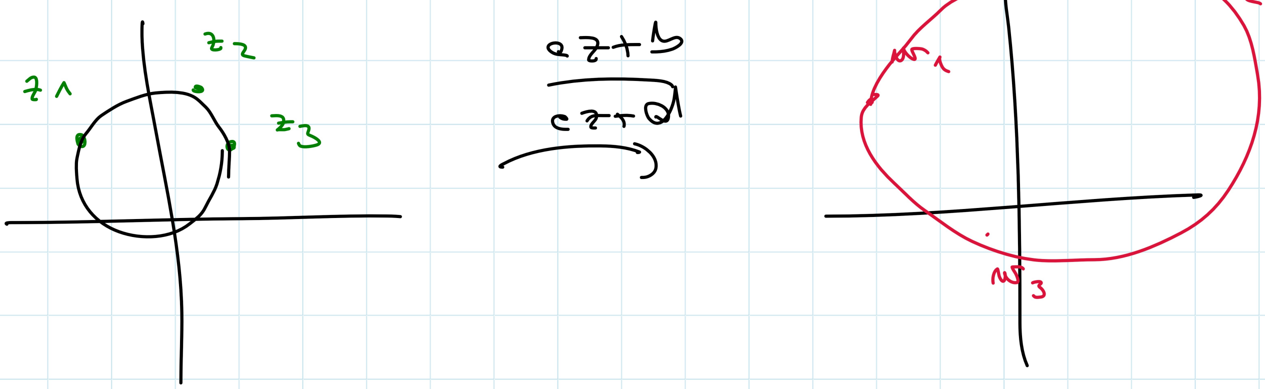
x, y

$i : (x,y,z) \to (x,y,-z)$

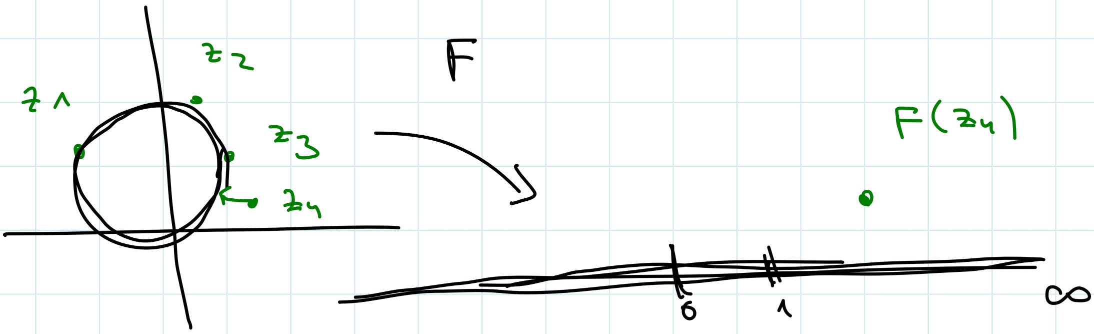
příklad 4.11 $\quad n=1$

Věta 5.7. Jsou-li dány tři různé vzory $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{CP}^1$ a tři různé obrazy $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{CP}^1$, pak existuje právě jedna Möbiova transformace F taková, že $F(z_i) = w_i$, pro $i = 1, 2, 3$.

Věta 5.8. Čtyři různé body $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{CP}^1$ leží na kruhové křivce právě tehdy, když je jejich dvojpoměr (z_1, z_2, z_3, z_4) reálné číslo.



Důkaz 5.8.



$z_4 \in \bigcirc \iff F(z_4) \in \mathbb{R}$

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) = (\underset{w_1}{F(z_1)}, \underset{w_2}{F(z_2)}, \underset{w_3}{F(z_3)}, F(z_4)) = \frac{(1-F(z_4))}{-1} \cdot \frac{1}{F(z_4)} =$$

$$= \frac{F(z_4)-1}{F(z_4)} = 1 - \frac{1}{F(z_4)}$$

→ $w_1 = (0,1)$

→ $w_2 = (1,1)$

$w_3 = (1,0) = -1(0,1) + 1(1,1)$

$F(z_4) = (F(z_4),1) = (1-F(z_4))(0,1) + F(z_4)(1,1)$

$\in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$F(z_4) \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$F(z_4) \in \mathbb{R}$

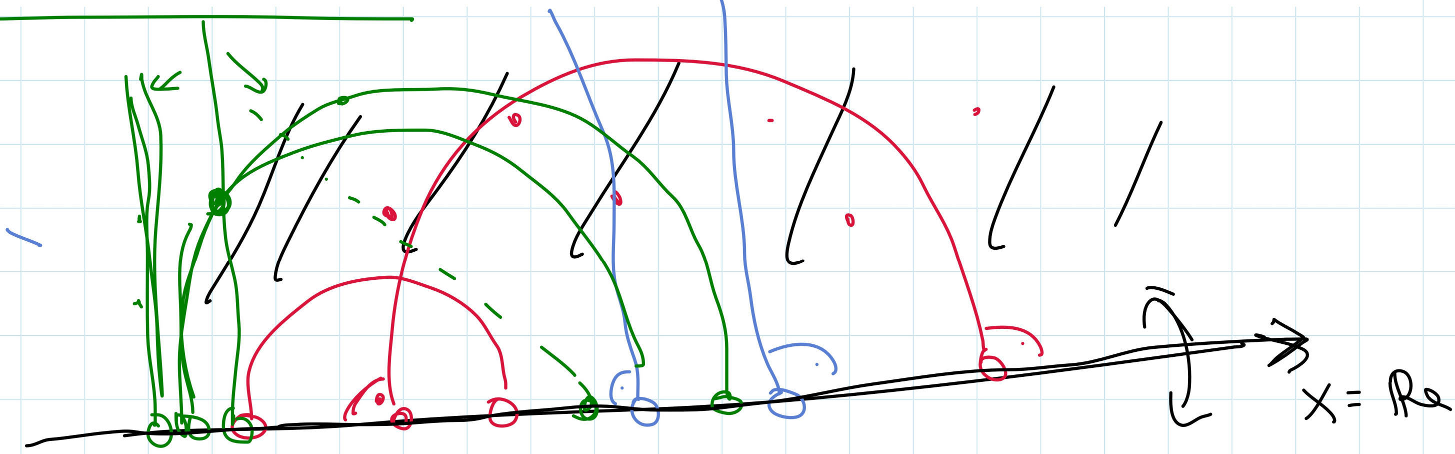
$\Updownarrow$

$z_4 \in \bigcirc$

Definice 5.9. Poincarého polorovinový model neeuklidovské geometrie má množinu bodů

$$H = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\},$$

přímkami jsou všechny kruhové křivky kolmé na osu x a přímé shodnosti jsou všechny Möbiovy transformace, které zachovávají množinu H.



při. Shodnosti $\quad z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

$GLP(\mathbb{C}P^1) \geq$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$ad - bc > 0$