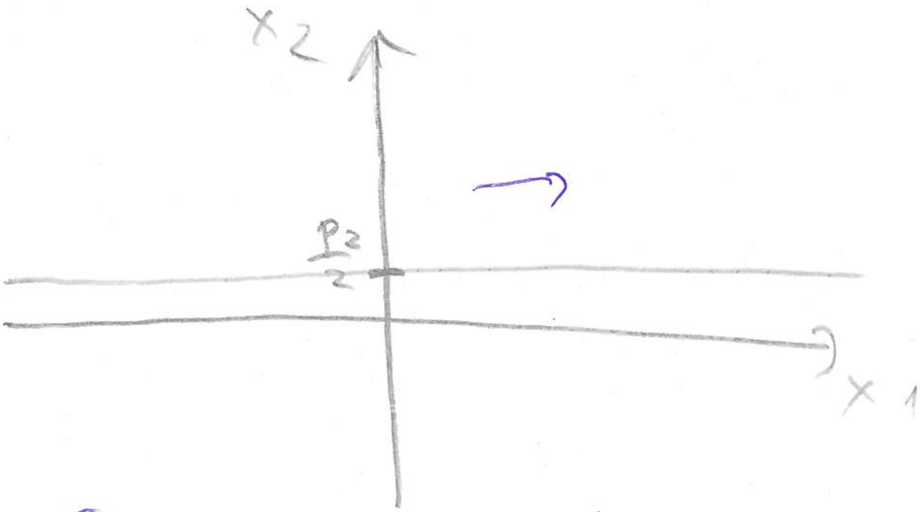
$\det A = -1$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\alpha = 0}$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$



1 $\quad p_1 = 0 \qquad x_1' = x_1 \qquad\qquad x_1 = x_1$

$x_2' = -x_2 + p_2 \qquad x_2 = -x_2 + p_2$

$2x_2 = p_2$

$$\boxed{x_2 = \frac{p_2}{2}}$$

souměrnost podle přímky $\underline{\underline{x_2 = \frac{p_2}{2}}}$

2 $\quad p_1 \neq 0 \qquad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

*

$$\underline{\underline{f}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = -(\cos^2\alpha - \lambda^2) - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\underline{\underline{\lambda = 1}} \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle (\sin\alpha, 1 - \cos\alpha) \rangle = \langle (\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}) \rangle$$

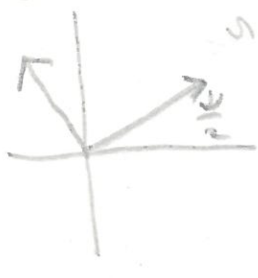
$$\sin\alpha = \frac{2}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = -1 \qquad \begin{pmatrix} \sin\alpha & 1 - \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$

$\lambda = 1 \quad \langle (-\sin\tfrac{\alpha}{2}, \cos\tfrac{\alpha}{2}) \rangle$

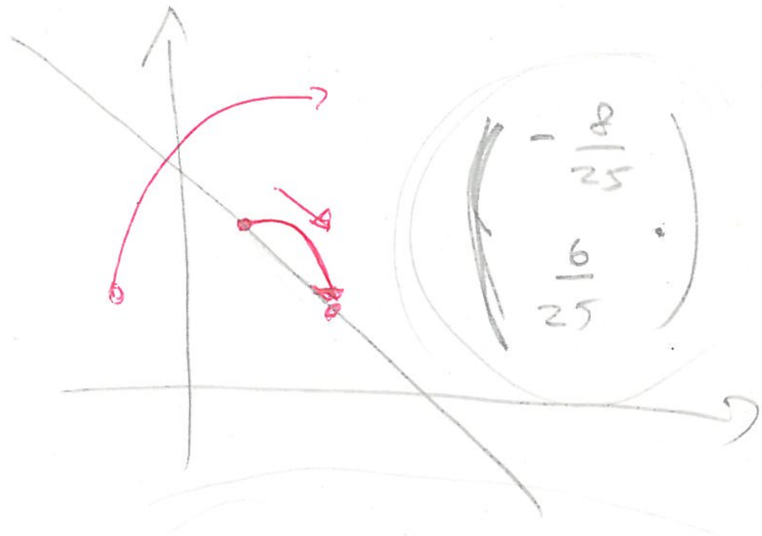


$$R_{-\frac{\alpha}{2}} \circ f \circ R_{\frac{\alpha}{2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix}}_{g(x)}$$

$$R_{\frac{\alpha}{2}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$f = R_{\frac{\alpha}{2}} \cdot g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ R_{-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{25} \\ \frac{6}{25} \end{pmatrix}$$

$$11 - 6x_1 - 8x_2 = 0$$

$$\left[0, \frac{11}{8}\right]$$

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{32}{25} \\ \frac{44}{25} \end{pmatrix}$$

$\cancel{A - B + pp = B}$

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz: Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$

$\Leftarrow$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned}||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| &= ||\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})|| = ||\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})|| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))}\\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T\underbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{A}}_{I_n}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||\end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

$\Rightarrow$

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \ldots n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$||\mathbf{f}_i|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{O}|| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

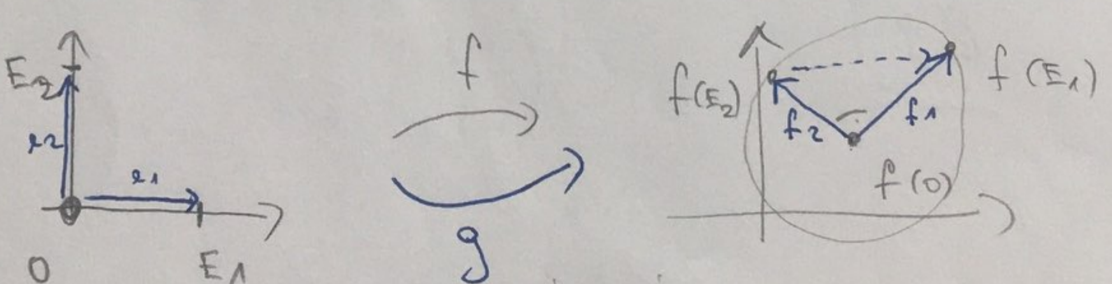
$$||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j|| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = ||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j||^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)\cdot(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = 1 + 1 - \overbrace{2\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j}^{=0}$$

dostáváme $\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

v $\mathbb{R}^2$



$E_i - E_j = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ {-1}\ )$

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1| \cdots |\mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $\boxed{g(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}}$, které je podle prvním části důkazu shodné a pro jeho invers platí $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i. Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \ldots, h_n(\mathbf{Y}))$.

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (f_1 | f_2 | \ldots | f_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \overset{p}{f(0)}$$

$$g(0) = f(0) \quad \checkmark$$

$$g(E_i) = (f_1 | \ldots | f_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + f(0) =$$

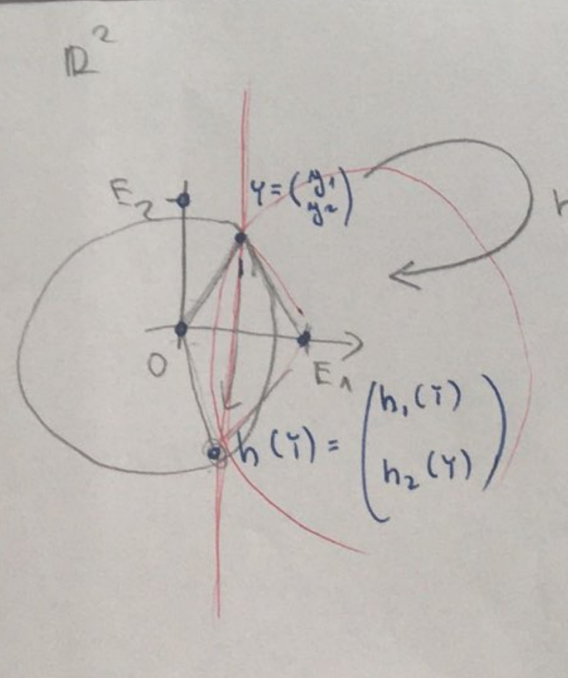
$$= f_i + f(0) = f(E_i) - f(0) + f(0) =$$
$$= f(E_i)$$

Pak platí

$$||h(\mathbf{Y}) - h(O)||^2 = ||h(\mathbf{Y})||^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{O}||^2,$$

$$\begin{aligned} ||h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)||^2 = ||h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i||^2 &= h_1^2(\mathbf{Y}) + \cdots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \cdots + (y_i - 1)^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i||^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$. $\square$



$h = \underline{g^{-1} \circ f} = id$

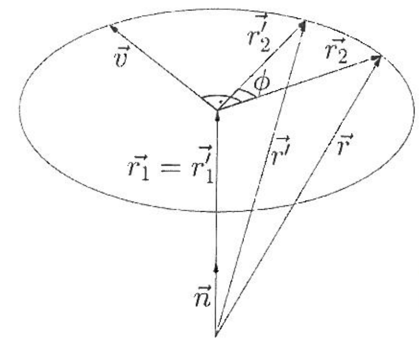
$h(0) = 0$

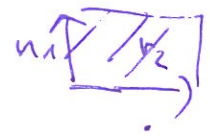
$h(E_i) = E_i$

$\underline{\underline{f = g}}$

Věta 1.12 (Rodriguesova formule). Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos\phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos\phi\mathbf{r} + \sin\phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$





$\vec{r}_1 = (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$

$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$

$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_1$

$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{r}_2 = \vec{n} \times \vec{r}$

$(\|\vec{v}\| = \|\vec{r}_2\|)$

$$r' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}' = \vec{r}_1 + \cos\phi \cdot \vec{r}_2 + \sin\phi \cdot \vec{v} =$$

$$= (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} + \cos\phi \left[\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \right] + \sin\phi (\vec{n} \times \vec{r})$$

$$= (1 - \cos\phi)(\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} + \cos\phi \cdot \vec{r} + \sin\phi (\vec{n} \times \vec{r})$$

Definice 1.13. Připomeňme si z LA, že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, 0)$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

$i \cdot j = k$

$j \cdot i = -k$

$(1 + 6j) \cdot (2i - 3j) =$

$= \underline{2i - 12k - 3j + 18} = (18, (2, -3, -12))$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \simeq q = (0, (1, 2, 3)) =$

$= 1 \cdot i + 2 \cdot j + 3k.$

Lemma 1.14 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$
\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \\
q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \underline{\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}} + s_1 \mathbf{v_2} + s_2 \mathbf{v_1}).
\end{aligned}
$$

$$(1, (1,2,3)) \cdot (2, (-1,0,-4)) =$$

$$-1 \quad 0 \quad 4$$

$$= (1 \cdot 2 + 13, (8,-7,2) + (-1,0,-4) + (2,4,6)) =$$

$$= \underline{(15, (9,-3,4))}.$$

Definice 1.15. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $||q|| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

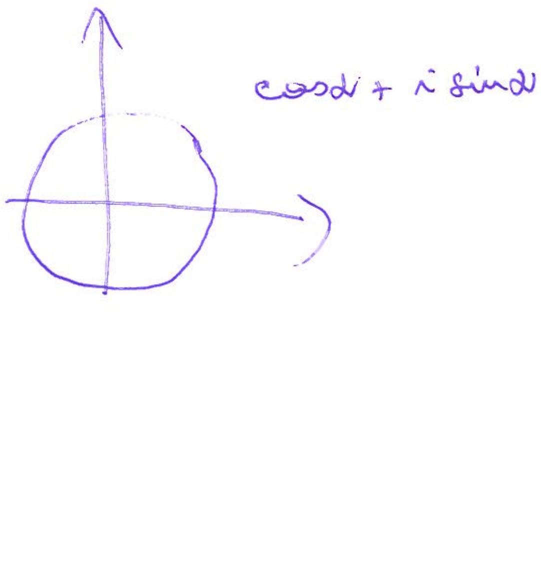
$$q = 2 + 3i - 4j + 2k = (2, (3, -4, 2))$$

$$\bar{q} = 2 - 3i + 4j - 2k = (2, (-3, 4, -2))$$

$$q = (s, \vec{v}) \qquad \bar{q} = (s, -\vec{v})$$

$$q \cdot \bar{q} = (s^2 + \vec{v} \cdot \vec{v}, 0 + s\cancel{(-\vec{v})} + s \cdot \cancel{(\vec{v})}) =$$

$$= (s^2 + x^2 + y^2 + z^2, \vec{0})$$



s netriviální
vektorovou částí

Lemma 1.16. Jednotkové kvaterniony tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

$q = (s, (x, y, z))$ $\|q\| = 1$

$q \cdot \bar{q} = 1 \Rightarrow \bar{q} = q^{-1} = (s, (-x, -y, -z))$

$\|q^{-1}\| = 1$

$q_1 = (s_1, \vec{v}_1)$ $q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$

$\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1 = (s_2 \cdot s_1 - (-\vec{v}_2) \cdot (-\vec{v}_1),$

$(-\vec{v}_2) \times (-\vec{v}_1) + s_2 \cdot (-\vec{v}_1) + s_1 (-\vec{v}_2)) =$

$= (s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot v_2, - \vec{v}_1 \times v_2 - s_1 \cdot v_2 - s_2 \cdot v_1)$

$\|q_1\| = \|q_2\| = 1$

$\|q_1 \cdot q_2\| = \sqrt{q_1 \cdot q_2 \cdot \overline{(q_1 \cdot q_2)}} = \sqrt{q_1 \underbrace{(q_2 \cdot \bar{q}_2)}_{1} \bar{q}_1} =$

$= \sqrt{q_1 \cdot \bar{q}_1} = \underline{\underline{1}}$

Lemma 1.16. Jednotkové kvaterniony tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

$$s^2+x^2+y^2+z^2=1$$

$$q = (s, \overbrace{(x,y,z)}^{\vec{v} \neq 0}) =$$

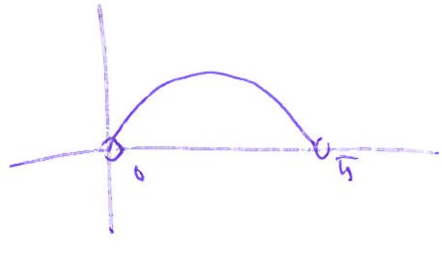
$$= (s, \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{= k} \underbrace{\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)}_{\vec{n}})$$

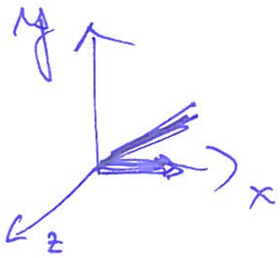
$$s^2+k^2 = s^2+x^2+y^2+z^2 = 1$$

$\exists \alpha \in [0, 2\pi]$: $s = \cos\alpha$

$k = \sin\alpha$

$\Rightarrow \alpha \in (0, \pi)$.





Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$ je zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

rotací kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

$$\vec{n} = \frac{1}{5}(3,4,0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \qquad \text{a úhel } \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{array}}$$

$$q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, 0\right)\right) = \qquad r = (1,0,0) = i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{10}i + \frac{4}{10}j$$

$$R_q(\vec{n}) = \vec{r}\,' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{10}i + \frac{4}{10}j\right) i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{10}i - \frac{4}{10}j\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{10} - \frac{4}{10}k\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{10}i - \frac{4}{10}j\right) =$$

$$= \left(\cancel{-\frac{3\sqrt{3}}{20}} + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{20}}\right) + i\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{100} - \frac{16}{100}\right) +$$

$$+ j\left(\frac{12}{100} + \frac{12}{100}\right) + k\left(-\frac{4\sqrt{3}}{20} - \frac{4\sqrt{3}}{20}\right) =$$

$$= i\left(\frac{75 + 9\cancel{X} - 16}{100}\right) + j\left(\frac{24}{100}\right) - k\,\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\left(\frac{\overset{68}{\cancel{119}}}{100}, \frac{24}{100}, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right).$$