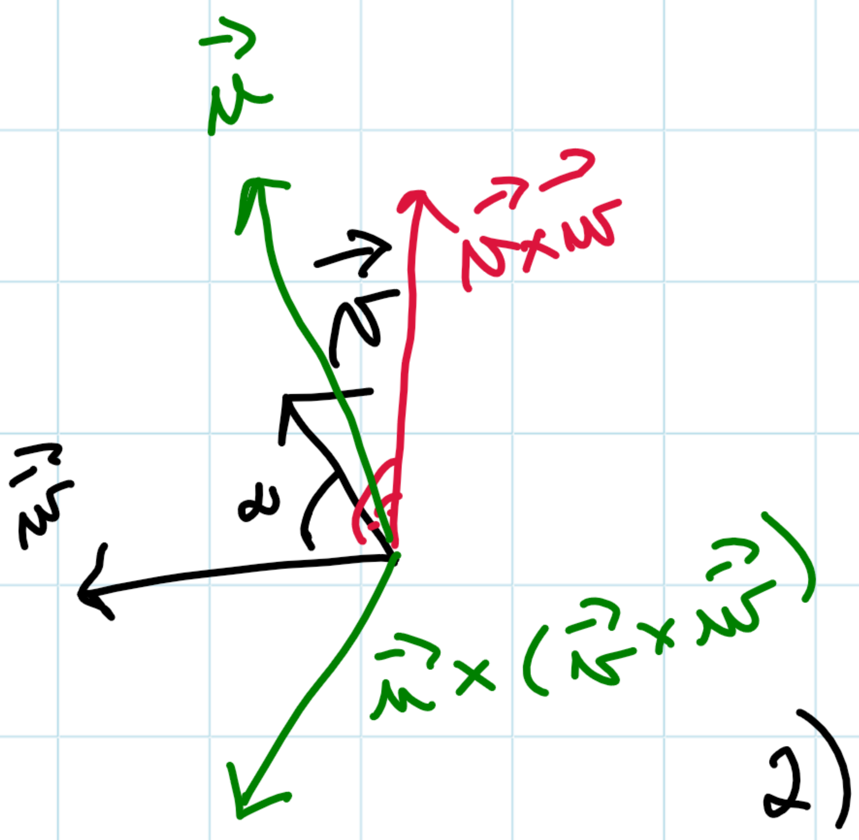


LEMMA Pro každé 3 vektory $\vec u, \vec v, \vec w \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec u \times (\vec v \times \vec w) = (\vec u \cdot \vec w) \cdot \vec v - (\vec u \cdot \vec v) \cdot \vec w$$

Dk 1) $\vec v, \vec w$ LZ např. $\vec w = a \cdot \vec v$

$LS = 0 \qquad PS = (\vec u \cdot a \cdot \vec v)\,\vec v - (\vec u \cdot \vec v)\, a \cdot \vec v = 0$

2) $\underbrace{\{\vec v, \vec w}_{LN}, \vec v \times \vec w\}$ BAZE $\vec u$ ... LK vektorů z BAZE

LS, PS je lineární pro $\vec u$

$\Rightarrow$ ROVNOST STAČÍ DK pro prvky BÁZE

a) $\vec u = \vec v \times \vec w$

$LS = 0 \qquad PS = 0$ neboť $\vec u \perp \vec w$; $\vec u \perp \vec v$

b) $\vec u = \vec v$ chceme dokázat

$* \quad \vec v \times (\vec v \times \vec w) = (\vec v \cdot \vec w) \cdot \vec v - (\vec v \cdot \vec v) \cdot \vec w$

$\vec v \cdot LS* = 0 \qquad \vec v \cdot PS* = (\vec v \cdot \vec w)(\vec v \cdot \vec v) - (\vec v \cdot \vec v)(\vec v \cdot \vec w) = 0$

$(\vec v \times \vec w) \cdot LS* = 0 \qquad (\vec v \times \vec w) \cdot PS* = 0$

$\vec w \cdot LS* = \vec w \cdot (\vec v \times (\vec v \times \vec w)) = \det[\vec w, \vec v, \vec v \times \vec w] =$

$= -\det[\vec v \times \vec w, \vec v, \vec w] = -(\vec v \times \vec w) \cdot (\vec v \times \vec w) =$

$= -\|(\vec v \times \vec w)\|^2 = -\|\vec v\|^2 \cdot \|\vec w\|^2 \cdot \sin^2\alpha =$

$= \|\vec v\|^2 \cdot \|\vec w\|^2 \cdot \cos^2\alpha - \|\vec v\|^2 \|\vec w\| =$

$= (\vec v \cdot \vec w)^2 - (\vec v \cdot \vec v)(\vec w \cdot \vec w)$

$\vec w \cdot PS* = (\vec v \cdot \vec w) \cdot (\vec w \cdot \vec v) - (\vec v \cdot \vec v) \cdot (\vec w \cdot \vec w)$

c) $\vec u = \vec w$

LS $\quad \vec w \times (\vec v \times \vec w) = -\vec w \cdot (\vec w \times \vec v) =$

$= -(\vec w \cdot \vec v) \cdot \vec w + (\vec w \cdot \vec w) \cdot \vec v = PS$

$\blacksquare$

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$ je zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

rotací kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

$q = (s, \vec{v})$ $\qquad$ $\vec{r} = (0, \vec{r})$ $\qquad$ $q_1 \cdot q_2 = (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} + s_1 \mathbf{v_2} + s_2 \mathbf{v_1}).$

$$q \cdot r \cdot \bar{q} = (s, \vec{v}) \cdot (0, \vec{r}) \cdot (s, -\vec{v}) =$$

$$(s, \vec{v}) \bullet (\vec{r} \cdot \vec{v}, -\vec{r} \times \vec{v} + s \cdot \vec{r}) =$$

$$= (\underbrace{s \cdot \vec{r} \cdot \vec{v} - s \cdot \vec{v} \cdot \vec{r}}_{0}, -\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) + s \cdot (\vec{v} \times \vec{r}) - s(\vec{r} \times \vec{v}) + s^2 \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r}) = (\vec{v} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{r}$$

$$= (0, 2(\vec{v} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v} + (s^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v})) \cdot \vec{r} + 2s \cdot (\vec{v} \times \vec{r}))$$

$s = \cos\alpha$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{n} \cdot \sin\alpha$

$$= (0, 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot (\vec{n} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{n} + (\cos^2\alpha - \sin^2) \cdot \vec{r} + 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha \, (\vec{n} \times \vec{r}))$$

$$2 \cdot \sin^2\alpha = (1 - \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$= ((1 - \cos 2\alpha)(\vec{n} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{n} + \cos 2\alpha \cdot \vec{r} + \sin 2\alpha \, (\vec{n} \times \vec{r}))$$

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos\phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos\phi\,\mathbf{r} + \sin\phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

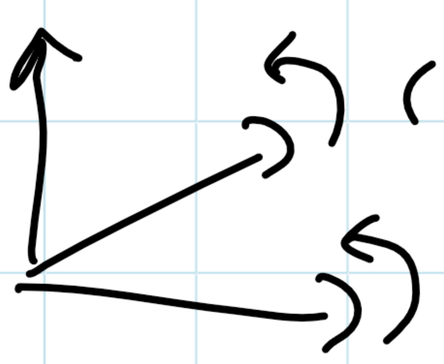
$$\phi = 2\alpha$$

---

q_1 , q_2

$$(q_2 q_1) r (\bar{q}_1 \bar{q}_2) = (q_2 \cdot q_1) r (\overline{q_2 \cdot q_2})$$

složení rotací je vyjádřeno $q_2 \cdot q_1$



$(0,1,0)$ $\quad \frac{\pi}{3}$ $\qquad q_2 = (\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6})$.

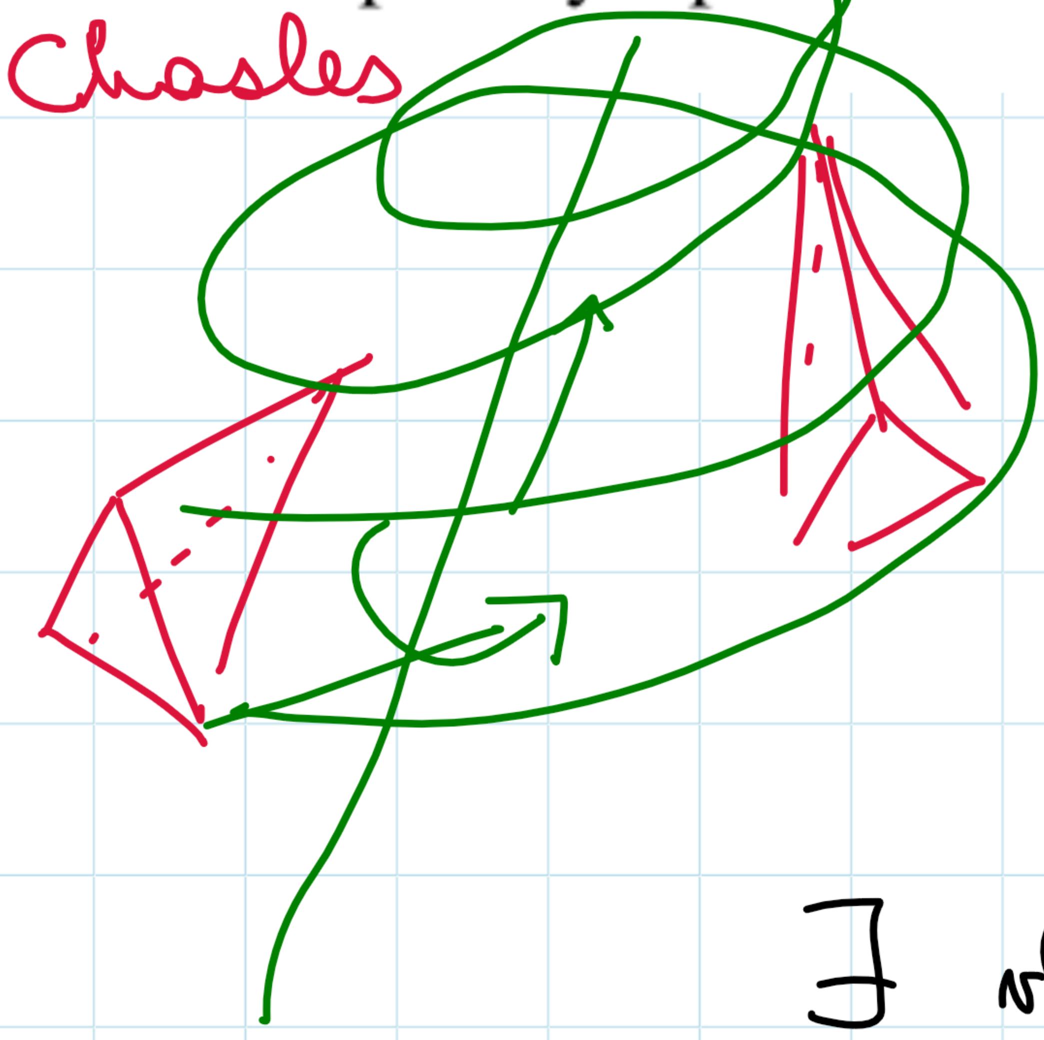
$(1,0,0)$ $\quad \frac{\pi}{3}$ $\quad \ldots \quad q_1 = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$q_2 \cdot q_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} j\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{\sqrt{3}}{4} j - \frac{1}{4} k$$

$$\phi = 2 \arccos \frac{3}{4}$$

Věta 1.19. Každou přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).

Chasles



Dk. $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{p}$

A ON matice

$\det A = 1$

$\exists$ vl. č. $\lambda_1 = 1$ $\qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$

$\qquad 1 \cdot z \cdot \bar{z}$

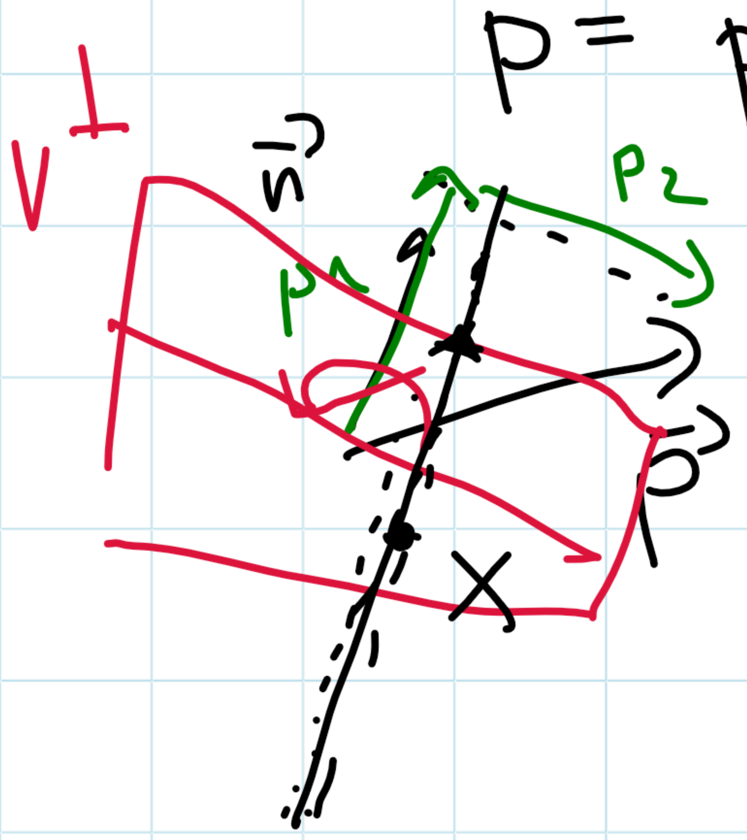
vl. vektor $\vec{n}$ $\qquad z = \cos\phi + i \sin\phi$

$\|\vec{n}\| = 1$

$A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\vec{x}$ je rotace kolem vektoru $\vec{n}$ o úhel ϕ

$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad \vec{p}_1 = (\vec{p} \cdot \vec{n})\,\vec{n} \qquad p_2 \perp \vec{n}$



Studujme $g(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{p}_2$

$V^\perp$ ... 2 dim ON doplněk k $\vec{n}$

g zachovává $V^\perp$

$g|V^\perp$ je shodnost (přímá) kopie $\mathbb{R}^2$

je to rotace v $V^\perp$ | pevný bod X

$g(\vec{x})$ v $\mathbb{R}^3$ má přímku pevných bodů

$X + \langle \vec{n} \rangle$

násobek $\vec{n}$

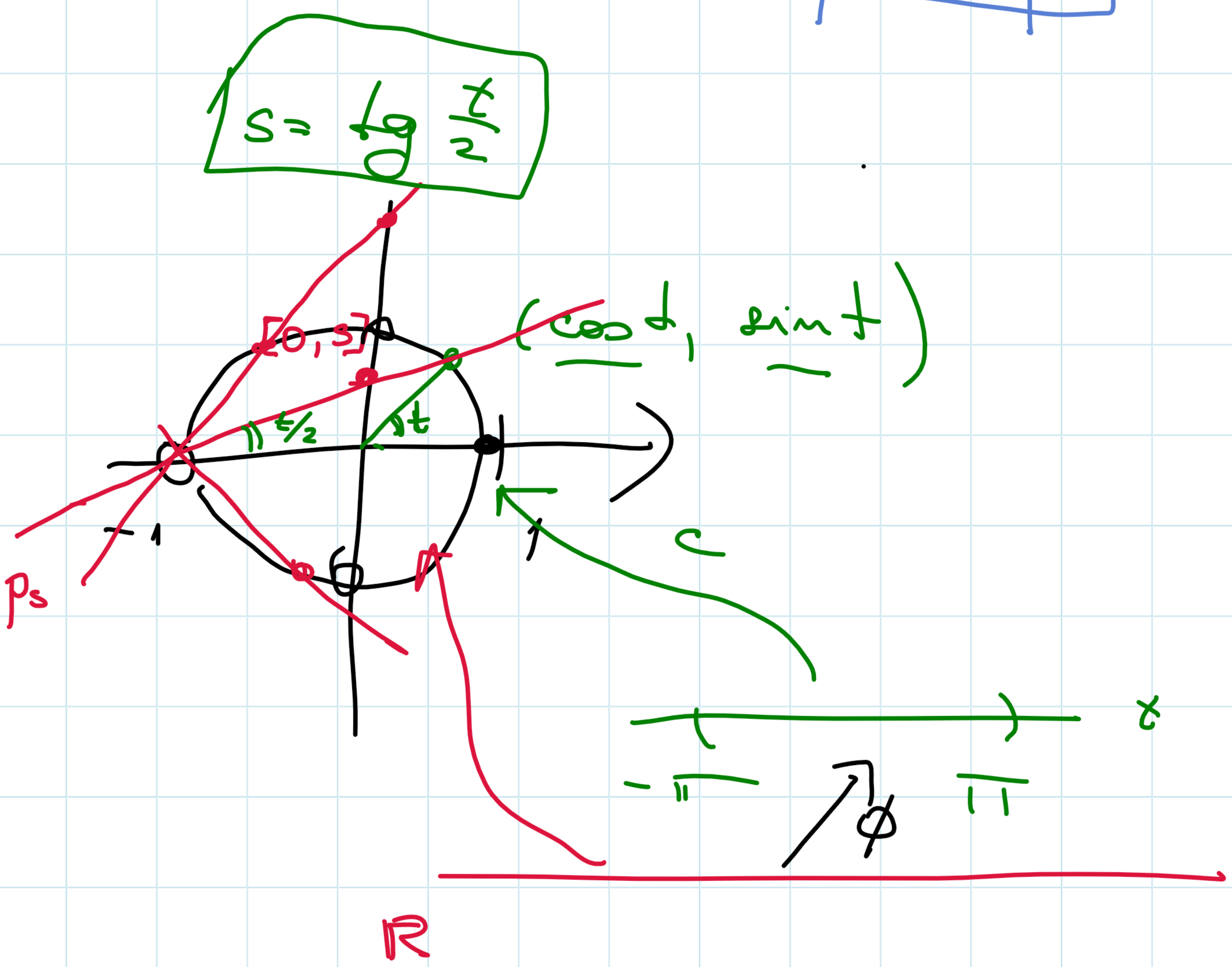
$f(x) = g(x) + p_1$

$\Rightarrow$ $X + \langle \vec{n} \rangle$ je samodružná

jeho důk.

Příklad 2.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ bez bodu $[-1, 0]$. Tuto množinu parametrizujme jako $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ a uvažujme reparametrizaci $t = 2 \arctan s$ pro $s \in (-\infty, \infty)$. Nová parametrizace má tvar

$$\mathbf{c}(s) = \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2} \right), \qquad s \in (-\infty, \infty).$$



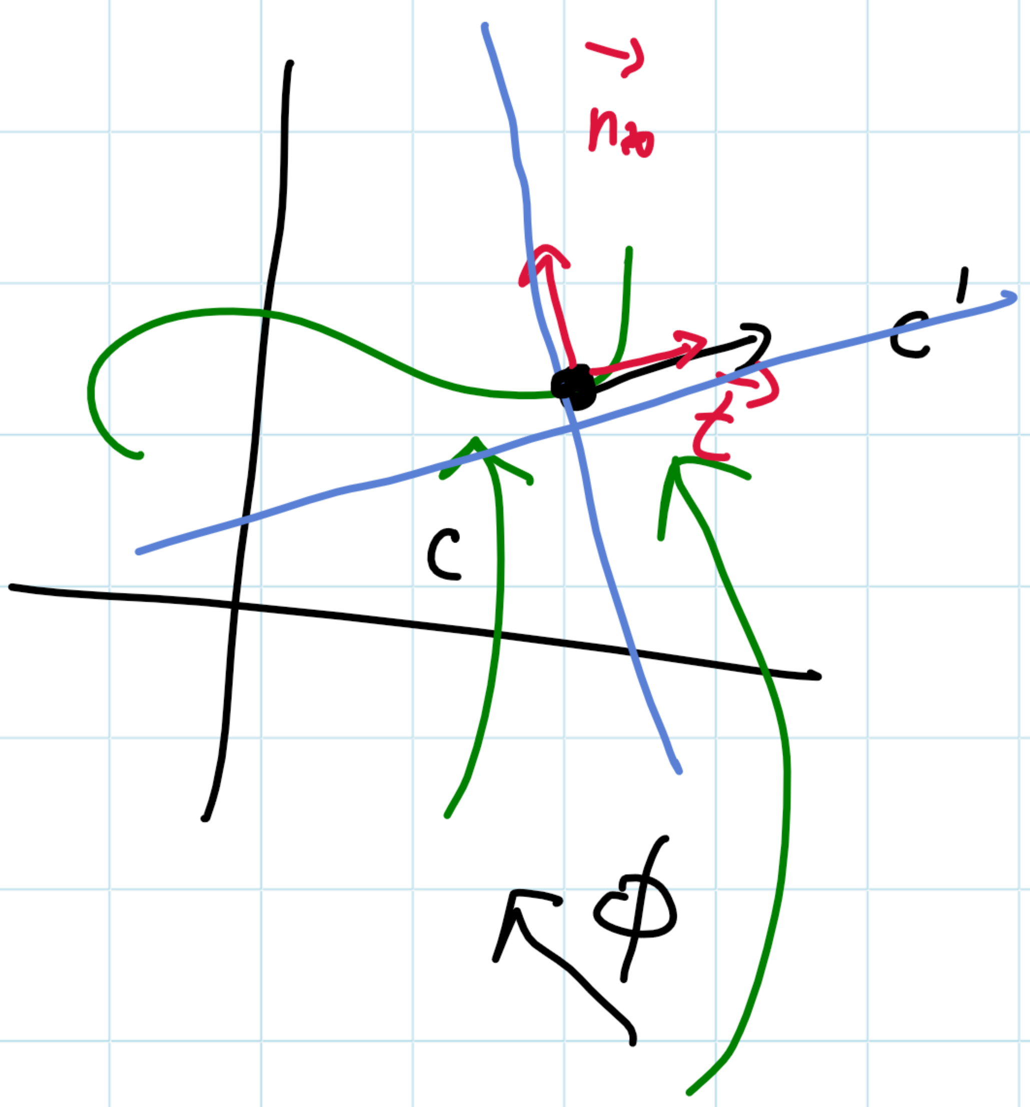
$p_s: \ (-1, 0) + u(1, s)$

$x = -1 + u$

$y = u \cdot s$

$u \in \mathbb{R}$

$\phi(s) = 2 \operatorname{arctg} s$



$\vec{t} = \dfrac{c'}{\|c'\|}$

$\kappa_2 = \dfrac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$

$\|c'(t)\| =$ rychlost $= r(t)$