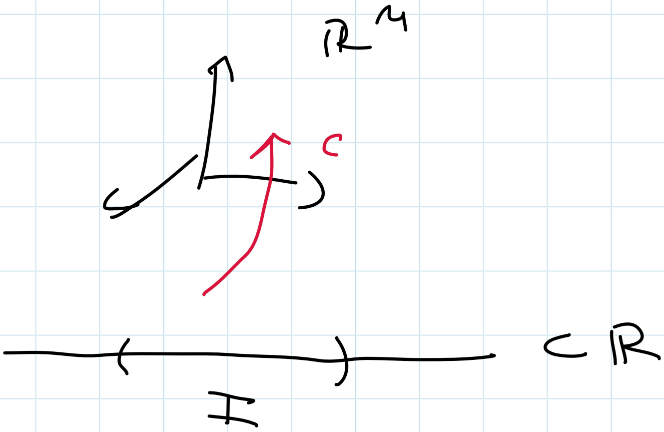
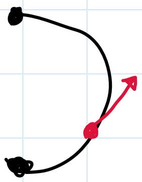
Definice 2.2. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojité zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}$ je regulární, tedy $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.



Poznámka 2.3.

1. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na I restrikci na I hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.



$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{matrix} \quad t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$t \in \left(-\varepsilon - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$

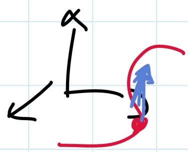
2. Parametrická křivka je popsána n-ticí funkcí $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))^T$ jedné proměnné definovaných na I.

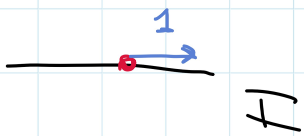
3. Její derivace je lineární zobrazení (totální diferenciál), které vyjádříme sloupcovým vektorem (maticí $n \times 1$) a budeme ho chápat jako (tečný) vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^n$, který závisí na parametru. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti $||\mathbf{c}'(t)||$, která je hladká a kladná.

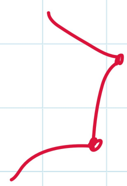
DF ... totální diferenciál lin. zobr.

$n \times \boxed{\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}} \; (1)$

$\boxed{c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}$







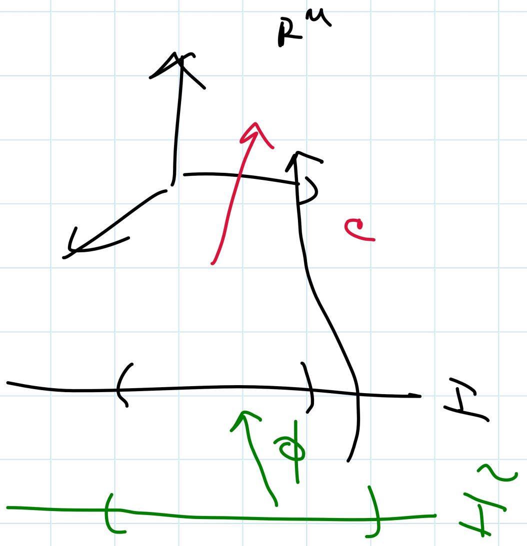
$\boxed{C^2}$

4. Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy $\mathcal{C}^\infty$), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti. $\int$ C^1

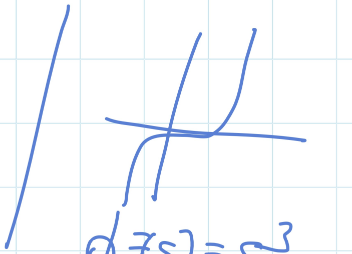
Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ hladký difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I, je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

C^∞, bijekce

ϕ^{-1} je taky C^∞



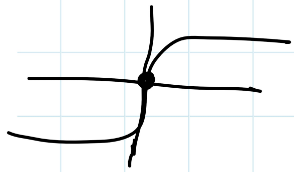
$\tilde{c} = c \circ \phi$

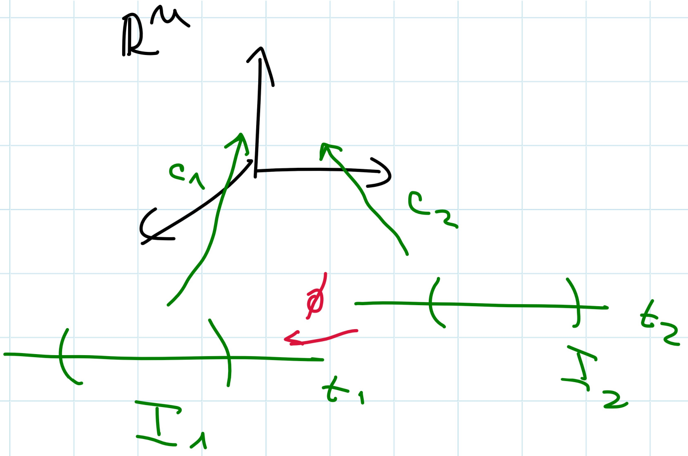


$\phi(s) = s^3$

$\phi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$

Definice a lemma 2.5. Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.





$c_2 = c_1 \circ \phi$

$\boxed{c_1 \approx c_2}$

Refl. $c_1 \approx c_1$

$c_1 = c_1 \circ \mathrm{Id}$

Sym. $c_1 \approx c_2$

$c_2 = c_1 \circ \phi$

$\Downarrow$

$c_1 = c_2 \circ \phi^{-1}$

Tranz. $c_2 = c_1 \circ \phi$ $\quad c_3 = c_2 \circ \psi$

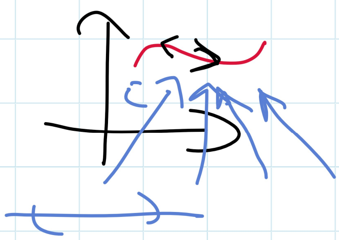
$c_1 \approx c_2$ $\quad c_2 \approx c_3$

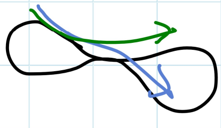
$c_3 = c_1 \circ (\phi \circ \psi)$

diffeomorf.

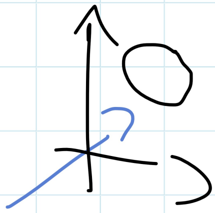
$\Rightarrow c_1 \approx c_3$

Př.

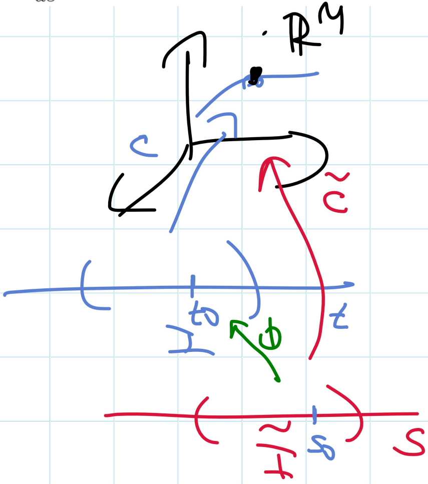




Poznámka 2.6. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme právě takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.



Poznámka 2.7. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.



1. $\tilde{c}(s) \dashrightarrow c(s)$
2. $\frac{dc}{dt}$ $\quad c'(t)$

$\frac{dc}{ds} \quad \dots \quad \dot{c}(s)$

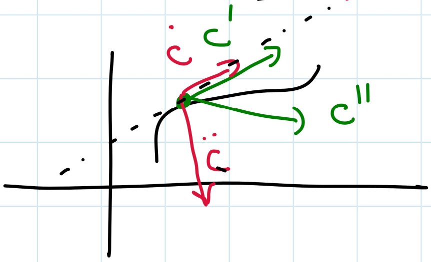
Lemma 2.8. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')\begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\dot c} = \frac{d}{ds}\Big|_{s_0} c(\phi(s)) = \frac{dc}{dt}\Big|_{t_0 = \phi(s_0)} \cdot \frac{d\phi}{ds}\Big|_{s_0} = \underline{\underline{c' \cdot \dot\phi}}$$

$$\ddot c = (c' \cdot \dot\phi)^{\cdot} = c' \cdot \ddot\phi + (c')^{\cdot} \cdot \dot\phi = c' \cdot \ddot\phi + c'' \cdot \dot\phi \cdot \dot\phi =$$

$$= c' \cdot \ddot\phi + \underline{c''} \cdot (\dot\phi)^2 \quad > 0$$



2.1 Rovinné křivky

Definice 2.9. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

$c' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

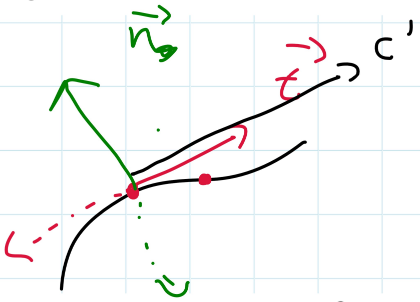
dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.



Věta 2.10. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Důkaz: S využitím lemmatu 2.8

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{||\dot{\mathbf{c}}||} = \frac{\dot\phi\mathbf{c}'}{||\dot\phi\mathbf{c}'||} = \underbrace{\operatorname{sign}(\dot\phi)}_{=\frac{\dot\phi}{|\dot\phi|} = \pm 1}\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'(t)||} = \operatorname{sign}(\dot\phi)\mathbf{t}(t).$$

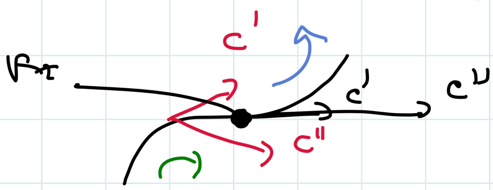
Dále platí

$$\mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\operatorname{sign}(\dot\phi)\mathbf{t}(t) = \operatorname{sign}(\dot\phi)\mathbf{n}_*(t).$$

konečně

$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{||\dot{\mathbf{c}}||^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')\begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 \end{pmatrix}\right]}{||\dot\phi\mathbf{c}'||^3} = \underbrace{\operatorname{sign}(\dot\phi)}_{=\frac{\dot\phi^3}{|\dot\phi|^3} = \pm 1}\frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3} = \operatorname{sign}(\dot\phi)\kappa_z(t).$$

$$\det\begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 \end{pmatrix} = \dot\phi^3$$

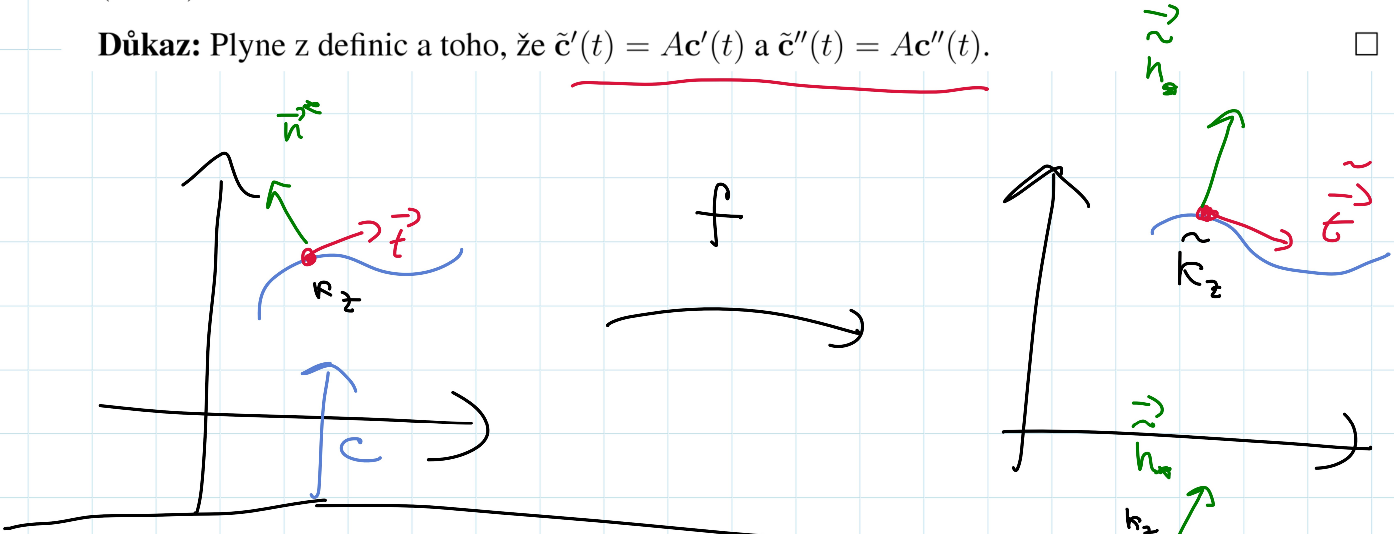


$\det(c', c'') < 0$

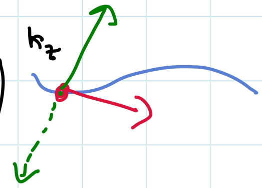
$\det(c', c^\nu) > 0$

Věta 2.11. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = F(\mathbf{c}(t)) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det A)\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det A)A\mathbf{n}_*$.

Důkaz: Plyne z definic a toho, že $\tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t)$ a $\tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t)$. □



$$\tilde{\vec{t}} = \frac{\tilde{c}'}{\|\tilde{c}'\|} = \frac{Ac'}{\underbrace{\|Ac'\|}_{\|c'\|}} = A\,\frac{c'}{\|c'\|} = A\vec{t}$$



$$\tilde{\vec{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\vec{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \cdot \vec{t} = (\det A)\, A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{t}}_{n^*} = \det A \cdot A \cdot n^*$$

$\det A = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

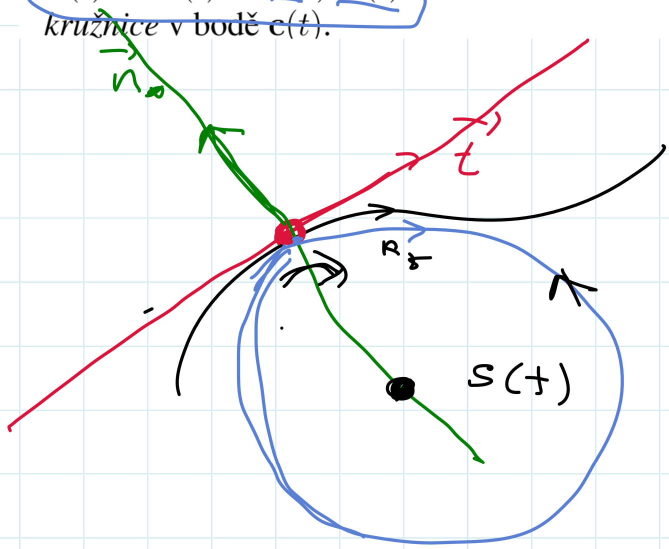
$\det A = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

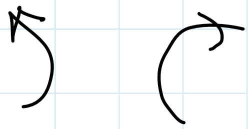
$$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{c}', \tilde{c}'')}{\|\tilde{c}'\|} = \frac{\det(Ac', Ac'')}{\|Ac'\|} = \frac{\det A \, \det(c', c'')}{\|c'\|}$$

$$= \det A \cdot \kappa_z$$

Definice 2.12. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}_*(t) \rangle$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $|R(t)|$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.



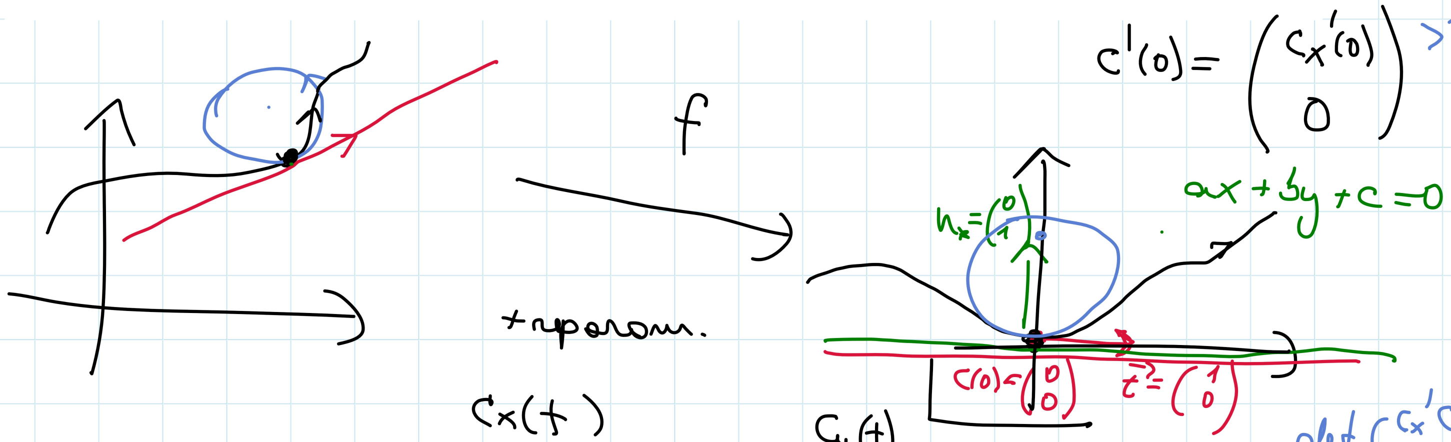
$R \cdot [\cos\omega, \sin\omega]$



$S(t)$ nezáleží na orientaci

Věta 2.13. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic).

$$c'(0) = \begin{pmatrix} c_x'(0) \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$



$$k_z(0) = \frac{\det\begin{pmatrix} c_x' & c_x'' \\ 0 & c_y'' \end{pmatrix}}{\|c'(0)\|^3} = \frac{c_x' \cdot c_y''}{(c_x')^3} = \frac{c_y''}{c_x'^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{c}(t) = \Big(\underbrace{c_x'(0)t + \frac{1}{2}c_x''(0)t^2 + o(t^2)}_{c_x(t)}, \underbrace{\frac{1}{2}c_y''(0)t^2 + o(t^2)}_{c_y(t)}\Big).$$

n

$ax + by + c = 0$

$$a\left(c_x' \cdot t + \frac{1}{2}c_x'' \cdot t^2\right) + b\left(\frac{1}{2}c_y'' \cdot t^2\right) + c + o(t^2) = 0$$

$$c + (a \cdot c_x')\,t + \left(\frac{1}{2}a \cdot c_x'' + \frac{1}{2}b \cdot c_y''\right)t^2 + o(t^2) = 0$$

$c = 0$ $\boxed{\text{ŘÁD } 0}$ $b = 1$ $\boxed{y = 0}$ $a = 0$ $\boxed{\text{ŘÁD } 1}$

$$\left(\frac{1}{2}c_y''\right) \cdot t^2 + o(t^2) = 0$$

Když $c_y'' = 0 \iff k_z(0) = 0$ inflexní bod

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$$

$$\left(c_x' \cdot t + \frac{1}{2}c_x'' t^2 - S_x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c_y'' t^2 - S_y\right)^2 - R^2 = 0 \quad + o(t^2)$$

0. řád
$$\underbrace{\left(S_x^2 + S_y^2 - R^2\right)}_{=0} + \underbrace{(-2c_x' S_x)}_{=0} \cdot t + \underbrace{\left(c_x'^2 - \cancel{c_x'' S_x} - c_y'' \cdot S_y\right)}_{=0} t^2 + \underbrace{o(t^3)}_{\to 0}$$

1. řád

$\Rightarrow R^2 = S_x^2 + S_y^2$ $\quad$ $S_x = 0$

$\iff$ ○ prochází $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$S_y = \frac{c_x'^2}{c_y''} = \frac{1}{k_z(0)} = R$$

TEDY máme oskulační kružnici.

$\boxed{\text{∎}}$

Věta 2.14. Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = ||\mathbf{c}'(t)||\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

$$t' = \kappa_z \cdot n_*$$

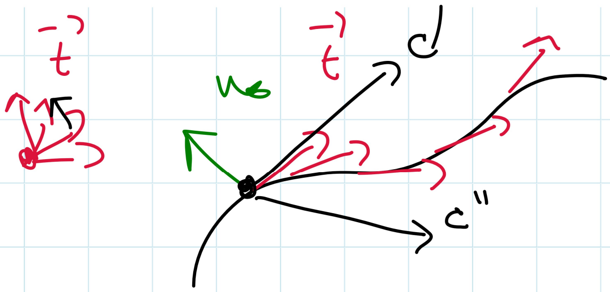
Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\cancel{||\mathbf{c}'(t)|| = 1}$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

$$\Rightarrow \vec{c}' = \vec{t}$$

$$||c'|| = \sqrt{c' \cdot c'}$$



$$t' = \left(\frac{c'}{||c'||}\right)' = \frac{||c'|| \cdot c'' - \frac{1}{2}\frac{2 \cdot c' \cdot c''}{\sqrt{c' \cdot c'}}\, c'}{||c'||^2} =$$

$$= \frac{||c'||^2 \cdot c'' - (c' \cdot c'') \cdot c'}{||c'||^3}$$

TVRDÍM

(1) $\boxed{\vec{t}' \perp \vec{t}}$

$$\vec{t}' \cdot \vec{t} = \left(\frac{||c'||^2 \cdot c'' - (c' \cdot c'') \cdot c'}{||c'||^3} \cdot \frac{c'}{||c'||}\right) =$$

$$= \frac{1}{||c'||^4}\left(||c'||^2 \cdot (c'' \cdot c') - (c' \cdot c'') \cdot (c' \cdot c')\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{t}' = k \cdot \vec{n}_*$$

det $= 0$

(2) $k = \kappa_z \cdot ||c'||$

$$\det(\vec{t} \,|\, \vec{t}') = \det\left(\frac{c'}{||c'||} \,\middle|\, \frac{||c'||^2 \cdot c'' - \cancel{(c' \cdot c'') \cdot c'}}{||c'||^3}\right) =$$

$$\det(\vec{t}, k \cdot \vec{n}_*) = \frac{1}{||c'||^4} \cdot \det(c', ||c'||^2 \cdot c'') =$$

$$k \cdot \det(\underbrace{\vec{t}, \vec{n}_*}_{1})$$

$$k = ||c'|| \cdot \underbrace{\frac{\det(c' | c'')}{||c'||^3}}_{= \kappa_z}$$

Věta 2.14. Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

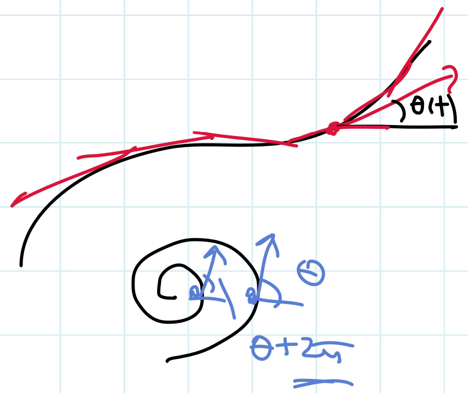
$$\mathbf{t}'(t) = ||\mathbf{c}'(t)||\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \quad t \in I.$$

$\to \kappa_z = \theta'$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.



$$\vec{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

hladko

$$\vec{t}(t) = \frac{c'(t)}{||c'(t)||} \cong \mathbb{C} = e^{i\theta(t)}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}\left(\frac{c'(t)}{||c'(t)||}\right)$$

$$\vec{t} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

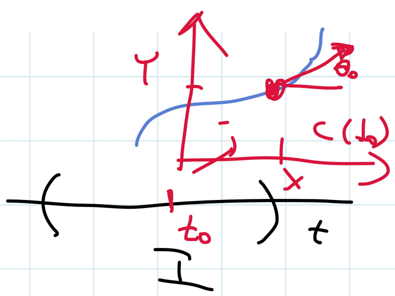
$$\vec{t}\,' = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\vec{t}\,' = \kappa_z \cdot n_* \cdot ||c'|| = \kappa_z \cdot ||c'|| \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)$$

C^∞

Věta 2.15. Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $k(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou podobnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$||\mathbf{c}'(t)|| = r(t), \qquad \kappa_z(t) = f(t).$$



$\theta(t)$: $\quad \theta' = \cancel{||c'||\kappa_z} := r(t) \cdot f(t)$

$\theta(t_0) = \boxed{\theta_0}$

$\vec{t} = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$; $c' := r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$

$c = \int c' \ \ldots \quad c_x(t_0) = \boxed{X} \quad c_y(t_0) = \boxed{Y}$