2.2 Prostorové křivky

Definice 2.16. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_x(t) \\ c_y(t) \\ c_z(t) \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} c_x' \\ c_y' \\ c_y' \end{pmatrix} \qquad c'' = \begin{pmatrix} c_x'' \\ c_y'' \\ c_z'' \end{pmatrix}$$

$$\kappa(t) \neq 0 \iff c'(t) \times c''(t) \neq 0$$

$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ $\qquad \vec{t} \perp \vec{b}$ $\qquad \|\vec{n}\| = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t} \\ \vec{b} &= \vec{t} \times \vec{n} \\ \vec{t} &= \vec{n} \times \vec{b} \end{aligned}}$$

$\vec{t} \to \vec{n} \to b$

$$\frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2} = \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\| \cdot \|c' \times c''\|}$$

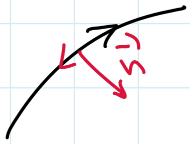
$$\mathbf{t}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||},\qquad \kappa(t)=\frac{||\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.\quad \mathbf{b}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)||},\qquad \mathbf{n}(t)=\mathbf{b}(t)\times\mathbf{t}(t),\qquad \tau(t)=\frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Věta 2.17. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^3$ zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

$\det M = \dot\phi^6$

$c(t)$

$c(s) = c(\phi(s))$



$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')\underbrace{\begin{pmatrix}\dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi\\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi\\ 0 & 0 & \dot\phi^3\end{pmatrix}}_{M}.$$

$$\dot c \times \ddot c = (\dot\phi\cdot c')\times(\ddot\phi c' + \dot\phi^2\cdot c'') = \dot\phi^3 (c'\times c'')$$

0

κ

$$\frac{\|\dot c\times\ddot c\|}{\|\dot c\|^3} = \frac{\cancel{|\dot\phi^3|}}{\cancel{|\dot\phi|^3}}\cdot\frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}$$

$\vec b$:

$$\frac{\dot c\times\ddot c}{\|\dot c\times\ddot c\|} = \frac{\dot\phi^3 (c'\times c'')}{|\dot\phi^3|\,\|c'\times c''\|}$$

$= \operatorname{sign}\dot\phi$

$\vec n$:

$$\vec n = (-\vec b)\times(-\vec t) = \underline{\underline{\vec b\times\vec t}}$$

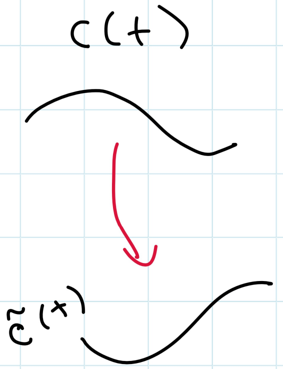
τ :

$$\frac{\det(\dot c|\ddot c|\dddot c)}{\|\dot c\times\ddot c\|^2} = \frac{\det(c'|c''|c''')\cdot\cancel{\det M}}{\cancel{(\dot\phi)^6}\,\|c'\times c''\|^2}$$

$\dot\phi^6$

$$\mathbf{t}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||},\qquad \kappa(t)=\frac{||\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.\quad \mathbf{b}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)||},\qquad \mathbf{n}(t)=\mathbf{b}(t)\times\mathbf{t}(t),\qquad \tau(t)=\frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Věta 2.18. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^3$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ, τ, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě křivost $\tilde{\kappa} = \kappa$ a tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$. V neinflexních bodech má navíc torzi $\tilde{\tau} = (\det \mathbf{A})\tau$, normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{An}$ a binormálový vektor $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{Ab}$.



$$\tilde{c}(t) = A\,c(t) + p$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{c}' &= A c'\\ \tilde{c}'' &= A c''\\ \tilde{c}''' &= A c'''\end{aligned}}$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{c}'}{||\tilde{c}'||} = \frac{Ac'}{||Ac'||} = A\overbrace{\frac{c'}{||c'||}}^{\vec{t}}$$

$$\tilde{c}' \times \tilde{c}'' = (Ac') \times (Ac'') = \overset{\pm 1}{(\det A)}\, A\,(c' \times c'')$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{||\tilde{c}' \times \tilde{c}''||}{||\tilde{c}'||^3} = \frac{\overset{1}{|\det A|}\,||A(c' \times c'')||}{||Ac'||^3} = \frac{||c' \times c''||}{||c'||^3} = \kappa$$

$$\tilde{\tau} = \frac{\det(\tilde{c}' | \tilde{c}'' | \tilde{c}''')}{||\tilde{c}' \times \tilde{c}''||^2} = \frac{\det(Ac', Ac'', Ac''')}{||c' \times c''||^2} = \overset{\pm 1}{(\det A)} \cdot \tau$$

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{c}' \times \tilde{c}''}{||\tilde{c}' \times \tilde{c}''||} = \frac{(\det A)\; A(c' \times c'')}{||c' \times c''||} = (\det A)\, A \underbrace{\frac{c' \times c''}{||c' \times c''||}}_{\vec{b}}$$

$$\tilde{\vec{n}} = \tilde{\vec{b}} \times \tilde{\vec{t}} = (\det A) \cdot \big(\underbrace{A\vec{b} \times A\vec{t}}_{(\det A)\, A\, (\vec{b} \times \vec{t})}\big) \cdot = \underset{1}{(\det A)^2} \cdot \vec{n}$$

Definice 2.19. Pro hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme v každém bodě *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

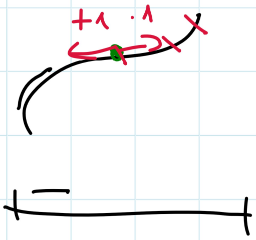
- *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle$,
- *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$,
- *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$.

Definice a lemma 2.20. O hladké parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \phi(s)$, $\boxed{\phi(s) = \pm s + s_0}$, kde s_0 je libovolná konstanta.

$\mathbb{R}^n$

$c(t)$ ... obloukem $\qquad \|c'(t)\| = 1$

Dk.



$c(t) \qquad c(s) = c(\phi(s))$

$\dot{c} = c' \cdot \dot{\phi}$

$\underbrace{\|\dot{c}\|}_{1} = \underbrace{\|c'\|}_{1} \cdot \underbrace{|\dot{\phi}|}_{1} \quad \Rightarrow \dot{\phi} = \pm 1 \Rightarrow \phi = \pm s + s_0$

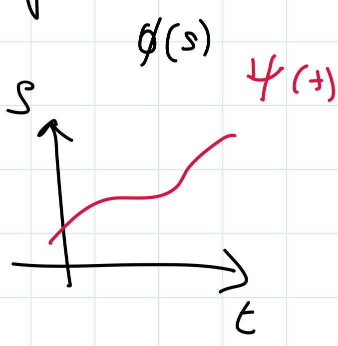
Existence $\qquad c(t) \qquad \|c'(t)\| = v(t)$ rychlost

> 0

hladká funkce

$\psi(t) = \int \|c'(t)\| \, dt$

$\psi' = \|c'(t)\| > 0 \qquad$ def. $\phi = \psi^{-1}$

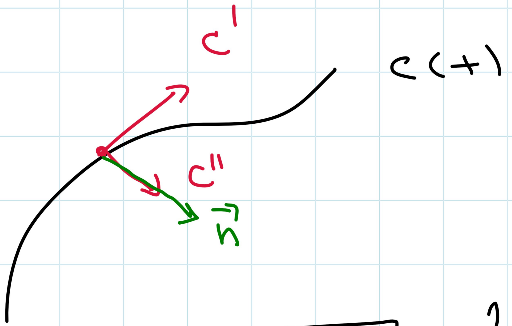


$c(s) := c(\phi(s))$

$\dot{c} = c' \cdot \dot{\phi} = c' \cdot \frac{1}{\psi'} = \frac{c'}{\|c'\|} = \vec{t}$

$\Rightarrow \|\dot{c}\| = 1$

Lemma 2.21. Pro křivku hladkou $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a v každém neinflexním bodě navíc platí $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}''(t)||}$ a $\kappa(t) = ||\mathbf{c}''(t)|| = ||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||$.



oblouk

$$\|c'\| = 1$$

$$\Big|\ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$c'(t) \cdot c'(t) = 1$$

$$2 \cdot c'(t) \cdot c''(t) = 0 \Rightarrow \underline{c' \perp c''}$$

$$(c' \cdot c')' = (c_x'^2 + c_y'^2 + c_z'^2)'$$

$$= 2c_x'c_x'' + 2c_y'c_y'' + 2c_z'c_z'' =$$

$$= \underline{2\, c' \cdot c''}$$

$$\|c' \times c''\| = \|c''\|$$

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{\|c''\|}{1} = \underline{\|c''\|}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} \times \frac{c'}{\|c'\|} =$$

$$= \frac{1}{\|c''\|} \cdot (c' \times c'') \times c' =$$

$$= -\frac{1}{\|c''\|} \cdot c' \times (c' \times c'') =$$

$$= -\frac{1}{\|c''\|} \cdot \Big[\underbrace{(c' \cdot c'')}_{0} \cdot c' - \underbrace{(c' \cdot c')}_{1}\, c''\Big] =$$

$$= \boxed{\frac{c''}{\|c''\|}}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) =$$

$$= (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

Věta 2.22 (Frenetovy vzorce)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = (\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

$t = t_0$ $\quad \{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ $\quad V = \alpha_1 \vec{t} + \alpha_2 \cdot \vec{n} + \alpha_3 \cdot \vec{b}$

$\vec{t}'\big|_{t=0}$ $\quad \vec{t}' = \kappa \cdot \vec{n}$

$\vec{n}' = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$

$d \times t = (\tau \cdot \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{t} = \kappa \cdot \vec{b} \times \vec{t} = \kappa \cdot \vec{n}$

Dk. $\{\vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t), \vec{v}_3(t)\}$ ... ON báze závislá na t

$V = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{v}_3$ .... $\alpha_i = V \cdot \vec{v}_i$

$\vec{v}_i' = (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_i' \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_3$

$\boxed{v_i' \cdot v_j}$ $\quad i, j = 1, 2, 3$

$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} < {0 \atop 1}$ $\quad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$

$v_i' \cdot v_j + v_i \cdot v_j' = 0 \Rightarrow v_i' \cdot v_j = -v_j' \cdot v_i$

$(v_1' | v_2' | v_3') = (v_1 | v_2 | v_3) \begin{pmatrix} 0 & -A & -B \\ A & 0 & -C \\ B & \boxed{C} & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_1 = \vec{t} \quad \vec{v}_2 = \vec{n} \quad \vec{v}_3 = \vec{b}$

$t' = (\vec{t})' = (c')' = c'' = \|c''\| \cdot \frac{c''}{\|c''\|} = \kappa \cdot \vec{n}$

$A = \kappa$

$B = 0$

$C = v_2' \cdot v_3 = n' \cdot b$

$$\|c'\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|c''\| = \|c' \times c''\| = \kappa$$

$$n' \cdot b = \left(\frac{c''}{\kappa}\right)' \cdot \frac{(c' \times c'')}{\kappa} = \frac{c''' \cdot \kappa - c'' \cdot \kappa'}{\kappa^2} \cdot \frac{(c' \times c'')}{\kappa} =$$

$$= \frac{\kappa}{\kappa^3} \cdot \left[c''' \cdot (c' \times c'')\right] =$$

$$= \frac{\det(c''' \mid c' \mid c'')}{\kappa^2} = \underbrace{\frac{\det(c' \mid c'' \mid c''')}{\|c' \times c''\|^2}}_{\tau}$$

$C = \tau$

Věta 2.24. Nechť $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Věta 2.25. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.

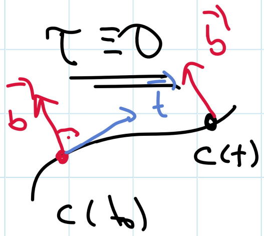
$c(t)$ leží v rovině $\quad c_x \cdot a + c_y \cdot b + c_z \cdot c + d = 0$

$$c(t) \cdot (a,b,c) = -d \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

c', c'', c''' jsou ⊥ z

$$\Rightarrow \det(c' \mid c'' \mid c''') = 0 \quad \Leftarrow \quad \left\{ \begin{aligned} c' \cdot (a,b,c) &= 0 \quad \Big| \frac{d}{dt} \\ c'' \cdot (a,b,c) &= 0 \quad \Big| \frac{d}{dt} \\ c''' \cdot (a,b,c) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$\tau \equiv 0$ $\quad \vec{b}(t)' = -\tau \cdot \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b}$ konst $= (a,b,c)$

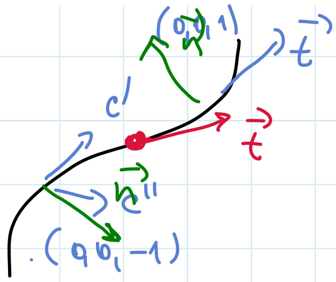


$h(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot \vec{b} \qquad h(t_0) = 0$

$h'(t) = c'(t) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow h(t) \equiv 0$ ROVINA.

$$0 = c_x \cdot a + c_y \cdot b + c_z \cdot c - \underbrace{c(t_0) \cdot \vec{b}}_{d} = 0$$

Věta 2.26. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ vnořenou do $\mathbb{R}^3$ zobrazením $(x, y) \to (x, y, 0)$ platí $\kappa = |\kappa_z|$ a v neinflexních bodech $\mathbf{n} = \operatorname{sign}(\kappa_z)\mathbf{n}_*$.



$$c(t) = (c_x(t), c_y(t), 0)$$

$$\kappa_z = \frac{\begin{vmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{vmatrix}}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}^{\,3}}$$

$c' \times c''$

$$\kappa = \frac{\| (c_x', c_y', 0) \times (c_x'', c_y'', 0) \|}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2 + 0^2}} = \frac{\| (0, 0, \begin{vmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{vmatrix}) \|}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |-2| = -2 \\ \det(-2) = -2 \end{array}}$$

$$= \frac{\mathrm{ABS}\left(\begin{vmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{vmatrix} \right)}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}} = |\kappa_z|$$

$$\vec{b} = (0, 0, \operatorname{sign}(\kappa_z))$$

$$\vec{t} = (t_x, t_y, 0) \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_* = (\underline{-t_y, t_x, 0})$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \operatorname{sign} \kappa_z \cdot (0, 0, 1) \times (t_x, t_y, 0) =$$

$$= \operatorname{sign} \kappa_z \, (\underline{-t_y, t_x}, 0)$$