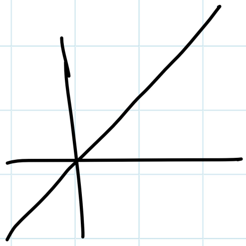
3 Afinní prostory a zobrazení

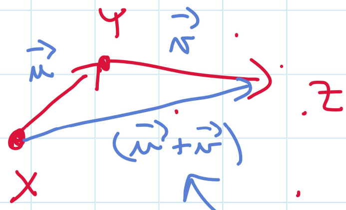
Definice 3.1. Mějme vektorový prostor V dimenze n, nad tělesem T. Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \to A$ nazveme *afinním prostorem se zaměřením V jestliže*

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{X} \in A : (\mathbf{X} \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \mathbf{X} \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
2. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A, \exists! \mathbf{v} \in V : \mathbf{X} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{Y}$, *tento vektor značíme* $\mathbf{v} = \mathbf{Y} \ominus \mathbf{X}$.

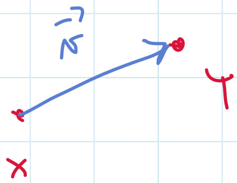
Prvky A nazýváme body *afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme místo $\oplus$ psát obyčejné $+$ a místo $\ominus$ psát $-$.*

$LO\{(1,1)\}$





uvnitř V



$\vec{v} = Y \ominus X$

$\vec{v} = Y - X$

Př. ① V .... vektorový prostor

$\boxed{A = V}$

$\vec{0}$

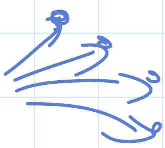
$A \times V \to A$

$V \qquad V$

$a \oplus \vec{v} = \vec{a} + \vec{v}$

$\vec{X}, \vec{Y}$

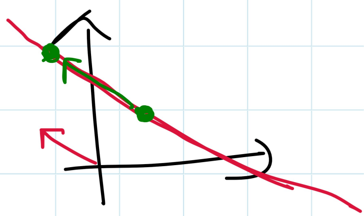
$\vec{v} = \vec{Y} - \vec{X}$



② Řešení $A = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + LO\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$

není podprostor

$V = LO\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$

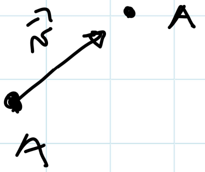


$\oplus$ uvnitř $\mathbb{R}^3$

Věta 3.2. Mějme afinní prostor A se zaměřením V, pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

1. $\mathbf{A} \oplus \vec{\mathbf{o}} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (B \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \overset{B}{\cancel{\mathbf{D}}})$

(1)



$\exists!\ \vec{v} \in V: \quad A \oplus \vec{v} = A$

$(A \oplus \vec{v}) \oplus \vec{o} = A \oplus \vec{o}$

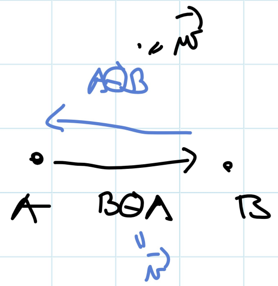
$\quad = A \oplus (\vec{v} + \vec{o})$

$\quad = A \oplus \vec{v}$

$\quad = \underline{A}$

$\vec{v} = \vec{o}$

(2)



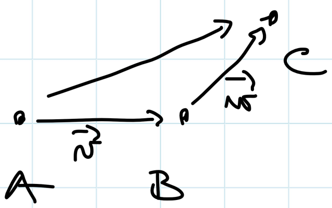
$A \oplus \vec{v} = B \qquad B \oplus \vec{w} = A$

$(A \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = A$

$A \oplus \underbrace{(\vec{v} + \vec{w})}_{\vec{o}} = A$

$\vec{w} = -\vec{v}$

(3)



Můžeme dokázat

$A \oplus (\vec{v} + \vec{w}) = C$

$\quad =$

$\underbrace{(A \oplus \vec{v})}_{B} \oplus \vec{w}$

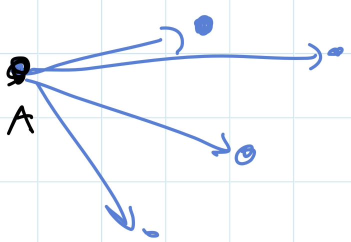
$B \oplus \vec{w} = \underline{C}$

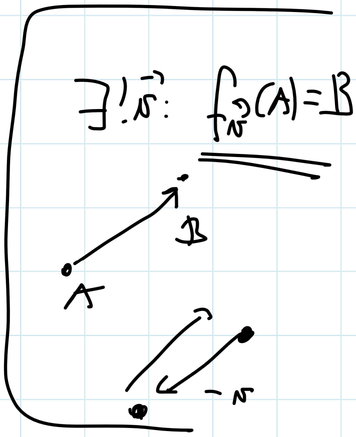
Důsledek 3.3.

- Pro každé $\mathbf{X} \in A$ je zobrazení $\varphi_a : V \to A$ definované jako $\varphi_a(\mathbf{v}) = \mathbf{A} + \mathbf{v}$ bijekcí množin V a A.
- Pro každé $\mathbf{v} \in V$ je zobrazení $f_\mathbf{v} : A \to A$ definované jako $f_\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{v}$ bijekcí množiny $\mathbf{A}$. Navíc zobrazení $\boxed{\mathbf{v} \to f_\mathbf{v}}$ je vnořením aditivní grupy $(V, +)$ do grupy bijekcí (permutací) $(A, \circ)$.

Φ

$V \xrightarrow{\varphi} A$

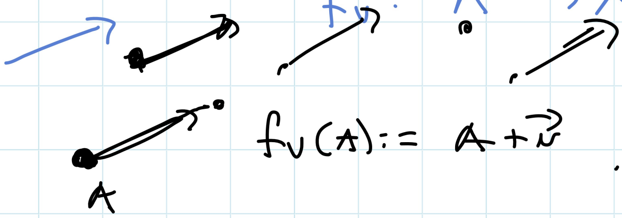




$\boxed{\vec v}$

$f_w \circ f_v = f_{(v+w)}$

$f_v : A \to A$



$f_v(A) := A + \vec v$

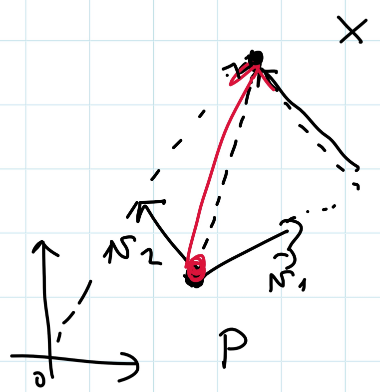
Definice 3.4. *Soustavou souřadnic* (nebo také *repérem*) v afinním prostoru A dimenze n rozumíme $(n+1)$-tici $S = (\mathbf{A}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, kde $\mathbf{A} \in P$ je bod nazývaný počátek a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze V. Pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B.$$

Jedná se tedy o jednoznačně určenou n-tici skalárů $(t_1, \ldots, t_n)^T$ tak, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + \underbrace{t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \ldots + t_n\mathbf{u}_n}_{X - P}.$$

Pro jednoduchost se i pro vektory dovoluje zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$.



Př: $\mathbb{R}^2$

$$S = \left(\overset{P}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{[X]_S = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$X - P = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$t_1 = 6$

$t_2 = 5$

$\vec v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \qquad [\vec v]_S = [\vec v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aritmetický afinní prostor

T^n — V
$\quad\quad \setminus A$

Kanonická báze $B = (e_1, \dots, e_n)$

$P = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

$S = (P, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

Kanonická s.s. repér.

Definice 3.5. Mějme v afinním prostoru A dvě soustavy souřadnic $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}_{B})$ a $S' = (\mathbf{P}', \underbrace{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n}_{B'})$. Pak pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ platí

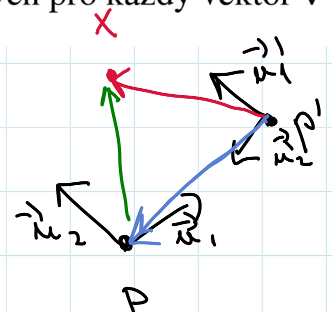
$$[\mathbf{X}]_{S'} = [Id]^B_{B'}[\mathbf{X}]_S + [\mathbf{P}]_{S'}.$$

Zároveň pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ triviálně platí $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]^B_{B'}[\mathbf{v}]_S$.

$[v]_S = [v]_B$

$[v]_{S'} = [v]_{B'}$

$\mathbb{R}^2$



$[X]_S = [X - P]_B$

$$[X]_{S'} = [X - P']_{B'} = [(X-P) + (P-P')]_{B'} =$$
$$= [(X-P)]_{B'} + \underbrace{[(P-P')]_{B'}}_{[P]_{S'}} =$$
$$= [id]^B_{B'}\underbrace{[(X-P)]_B}_{[X]_S} + [P]_{S'}$$

Př. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$S = \left(\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\14\end{pmatrix}\right) \qquad S' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}}_{B'}\right)$

$[X]_S$

$[P]_{S'} = [P - P']_{B'} = \left[\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -5\\2 & 3 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -5\\0 & 7 & 14\end{array}\right)$

$[id]^B_{B'} = [id]^K_{B'} \cdot [id]^B_K = \begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5 & -7\\3 & 14\end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -7\\3 & 14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}$

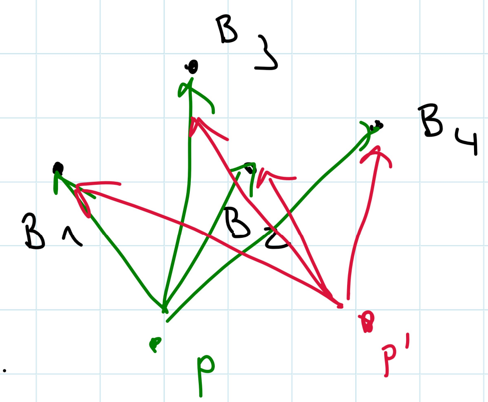
$$\boxed{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}$$

Definice a lemma 3.6. Pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \ldots \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \ldots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ definujeme *afinní kombinaci* $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i$ jako bod

$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}), \tag{1}$$

kde $\mathbf{P}$ je libovolný bod a výraz (1) na jeho volbě nezáleží.

$\mathbb{R}^2$



$$\left[P' + \sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P')\right] + \underbrace{(P-P') + (P'-P)}_{\vec{o}}$$

$$= P' + \left[\sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P') + (P-P') + (P'-P)\right] =$$

$$= \left[\underbrace{P' + (P-P')}_{P}\right] + \left[\sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P') + (P'-P)\right] =$$

$$= P + \sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P') + \sum_{i=1}^{k} c_i (P' - P) =$$

$$= P + \sum_{i=1}^{k} c_i \left[(B_i - P') + (P' - P)\right] = \left[P + \sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P)\right]$$

$\boxtimes$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{c_1} + \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{c_2} + \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{c_3} = 1$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Důsledek 3.7. Jestliže máme jakoukoliv soustavu souřadnic S, pak v ní vyjádříme afinní kombinaci $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i$ snadno jako $[\mathbf{X}]_S = \sum_{i=1}^{k} c_i [\mathbf{B}_i]_S$.

$S = (P, \underbrace{v_1, \ldots, v_n}_{B})$

P volíme jako počátek souřadnic

$$X = P + \sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P)$$

$$[X]_S = [X - P]_B = \left[\sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P)\right]_B = \sum_{i=1}^{k} c_i \left[(B_i - P)\right]_B = \sum_{i=1}^{k} c_i [B_i]_S$$

k je nejvýše n+1

k

Definice 3.8. O libovolných bodech $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou *v obecné poloze* právě tehdy, když vektory $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)$ jsou lineárně nezávislé.

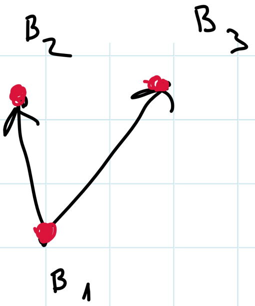
(k−1)

Definice a lemma 3.9. V afinním prostoru A dimenze n mějme $(n+1)$ bodů $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_{n+1}$ v obecné poloze. Pak lze každý bod $\mathbf{X} \in A$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i, \qquad \text{kde } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1. \qquad \exists!$$

Posloupnost bodů $Z = (\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_{n+1})$ nazýváme *barycentrická soustava souřadnic* a $(n+1)$-tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ nazýváme barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{X}$.

$n = 2$ $\quad \mathbb{R}^2$



DK Mějme $X \in A$ $\qquad$ $\overset{B}{\{(B_2 - B_1), \dots, (B_{n+1} - B_1)\}}$

LN ... n ⇒ BÁZE

vektor $(X - B_1) = \sum_{i=2}^{n+1} c_i (B_i - B_1) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (B_i - B_1)$

automaticky

$[X - B_1]_B$

$\boxed{c_1 = 1 - c_2 - c_3 - \dots - c_{n+1}}$

$c_1 + \dots + c_{n+1} = 1$

výnos (1) z definice 3.6. pro volbu $P = B_1$

$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n+1} c_i B_i$

$P = B_1.$

Důsledek 3.10. Jestliže $Z = (\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ odpovídající barycentrické souřadnice bodu X, pak

$$S = (\underset{P}{\mathbf{B}_1}, \underbrace{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)}_{B})$$

je afinní soustava souřadnic a $[\mathbf{X}]_S = (c_2, \dots, c_{n+1})^T$.

PR

$$Z = \left(\underset{B_1}{\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}}, \underset{B_2}{\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}}, \underset{B_3}{\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}} \right) \qquad X = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$B_2 - B_1 = \begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix} \quad c_2$$

$$B_3 - B_1 = \begin{pmatrix}-8\\-12\end{pmatrix} \quad c_3$$

ANO

LK

$$X = c_1 \cdot B_1 + c_2 \cdot B_2 + c_3 \cdot B_3$$

$$1 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$X - B_1 = \begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -2 \\ -6 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & -2 \\ 0 & -20 & -10 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 \\ c_3 \end{matrix}$$

$$c_1 = 1 - c_2 - c_3 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

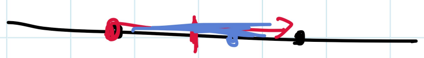
$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^1$

$n = 1$

$u = \frac{1}{2}$

X



B_1 $\quad$ B_2

$u = 0$ $\quad$ $u = 1$

$(B_2 - B_1)$ báze R_1

$$c_1 B_1 + c_2 B_2$$

$$\boxed{\begin{matrix} c_2 = u \\ c_1 = 1 - u \end{matrix}}$$

$$X = B_1 (1 - u) + B_2 \cdot u$$

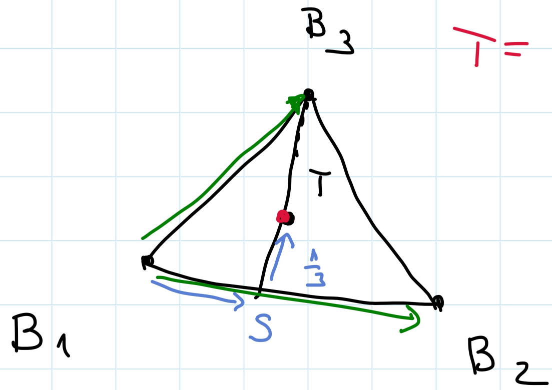
$$X = B_1 + u(B_2 - B_1)$$

Parametrické přímky

$$S = \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{2} B_2$$

$n = 2$

$\mathbb{R}^2$



$T = \frac{1}{3} B_1 + \frac{1}{3} B_2 + \frac{1}{3} B_3$

$\frac{1}{2}(B_2 - B_1) + (B_3 - S) =$

$= (B_3 - B_1)$

$$T = B_1 + \frac{1}{2}(B_2 - B_1) + \frac{1}{3}(B_3 - S)$$

$$T - B_1 = \frac{1}{2}(B_2 - B_1) + \frac{1}{3}\left[(B_3 - B_1) - \frac{1}{2}(B_2 - B_1)\right] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{3}\ c_2}(B_2 - B_1) + \underbrace{\frac{1}{3}}_{c_3}(B_3 - B_1)$$

$c_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

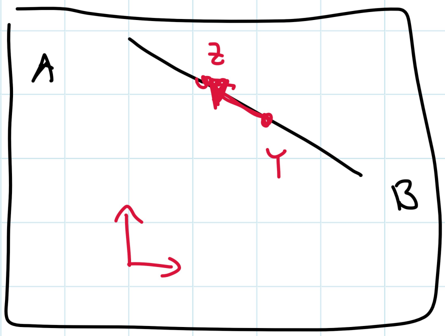
Poznámka 3.11. Jsou-li všechny složky barycentrických souřadnic bodu $\mathbf{X}$ nezáporné $c_i \geq 0$ (a v důsledku i $c_i \leq 1$), pak tuto kombinaci nazýváme *k*onvexní a charakterizuje to, zda-li bod X leží v konvexním obalu bodů $\mathbf{B}_i$.

Definice 3.12. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V. Afinní prostor B nad tělesem T se zaměřením W nazveme *afinní podprostor* prostoru A, pokud $B \subseteq A$, $W \leq V$ a sčítání bodu a vektoru v B je zúžením sčítání bodu a vektoru v A.

Věta 3.13. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V, $\mathbf{X} \in A$ libovolný bod a $W \leq V$ libovolný vektorový podprostor. Pak množina

$$\boxed{\mathbf{X} + W}$$

je podprostor A a každý vektorový podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, který nazýváme *parametrické vyjádření*.



$$B = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{X} + \mathrm{LO}\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}}_{W} \quad \mathbb{R}^4$$

$\exists\, Y, Z \in B \ \exists!\, \vec{w} :\quad Y + \vec{w} = Z$

$Y = X + \vec{w}_1 \ \in W \qquad (X + \vec{w}_1) + \vec{w} = X + \vec{w}_2$

$Z = X + \vec{w}_2 \qquad \vec{w} := \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \in \underline{\underline{W}}$

NAOPAK stačí vzít $X \in B$ – pak

$B = X + W$

Definice 3.14. Nechť Z je neprázdná množina bodů afinního prostoru A. *Afinním obalem* množiny Z rozumíme množinu $AO(Z)$ všech afinních kombinací bodů z Z.

Věta 3.15. Pro každou konečnou neprázdnou množinu bodů je $AO(Z)$ afinním podprostorem. Každý afinní podprostor dimenze k lze vyjádřit jako afinní obal $(k+1)$ bodů. Toto vyjádření nazýváme *bodové vyjádření*.

$Z = (B_1, \dots, B_\ell)$ $\qquad \sum_{i=1}^{\ell} c_i B_i \qquad \sum_{i=1}^{\ell} c_i = 1$

B

$$\underbrace{B_1}_{X} + \underbrace{\sum_{i=2}^{\ell} c_i (B_i - B_1)}_{\in W = LO\{(B_2 - B_1), \dots, (B_\ell - B_1)\}}$$

$B = X + W \qquad W \dots$ báze $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$

$B = AO\{X, X+\vec{w}_1, \dots, X+\vec{w}_k\}$

$k+1$ bodů

$AO\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}\right)$

BSS

Věta 3.16. Mějme soustavu lineárním rovnic s maticí M typu $m \times n$ nad tělesem T a pravou stranou c. Pak její řešení $\{x : Mx = c\}$ tvoří afinní podprostor aritmetického afinního prostoru T^n. Navíc každý afinní podprostor T^n lze vyjádřit tímto způsobem. Toto vyjádření nazýváme *rovnicové vyjádření*.

$m \begin{pmatrix} & M & \end{pmatrix} x = c$

m

Řešení $\underbrace{x_1 + \overbrace{\text{Ker } M}^{W}}$

Af. podpr.

$W = LO\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$X = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

řešení $LO\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M}$

$c = M \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\text{Ker } M = W$

Definice 3.17. (Pod)prostor dimenze 0 je *bod*, (pod)prostor dimenze 1 se nazývá *přímka*, (pod)prostor dimenze 2 se nazývá *rovina*, podprostor dimenze $(n-1)$ v prostoru dimenze n se nazývá *nadrovina*.

Definice 3.18. Nechť A je afinní prostor a $B = \mathbf{X} + U$, $C = \mathbf{Y} + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $U \leq W$ nebo $W \leq U$
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a mají neprázdný průnik.
- *mimoběžné* pokud nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.

Poznámka 3.19. Aritmetický prostor $\mathbb{R}^n$ ve kterém uvažujeme standardní skalární součin se nazývá *Eukleidovský* prostor. S jeho pomocí můžeme definovat vzdálenosti a úhly podprostorů podobně jako v analytické geometrii.

$A = \mathbb{R}^4$

$V = \mathbb{R}^n$