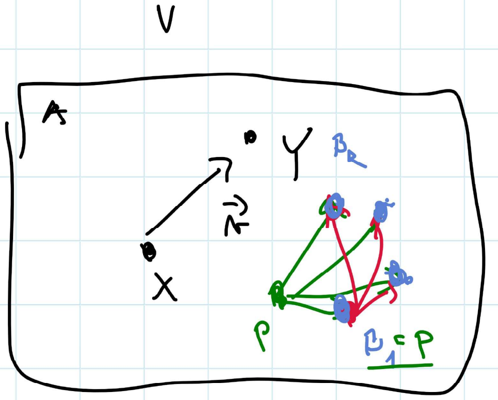


$$\cancel{c_1} + \dots + c_k = 1$$

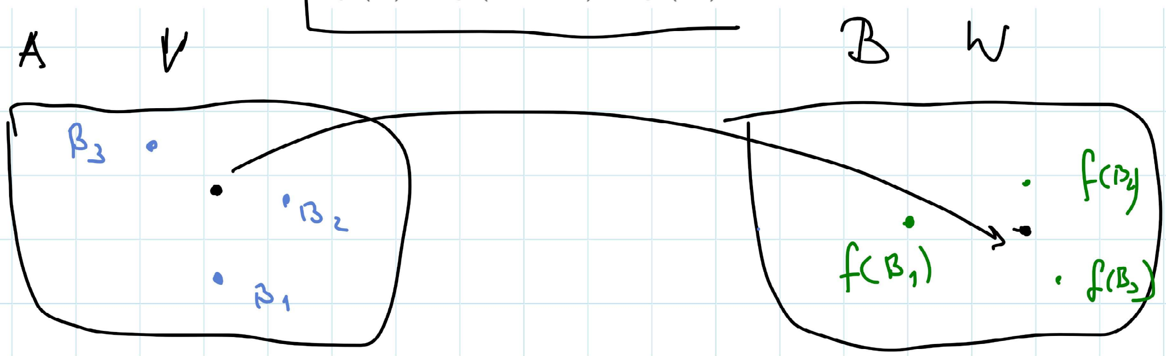
$$\sum_{i=1}^{k} c_i B_i = B_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i (B_i - B_1)$$

Definice 3.20. Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T. Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je *afinní*, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_k \in A$ a koeficienty $c_1, \dots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ platí

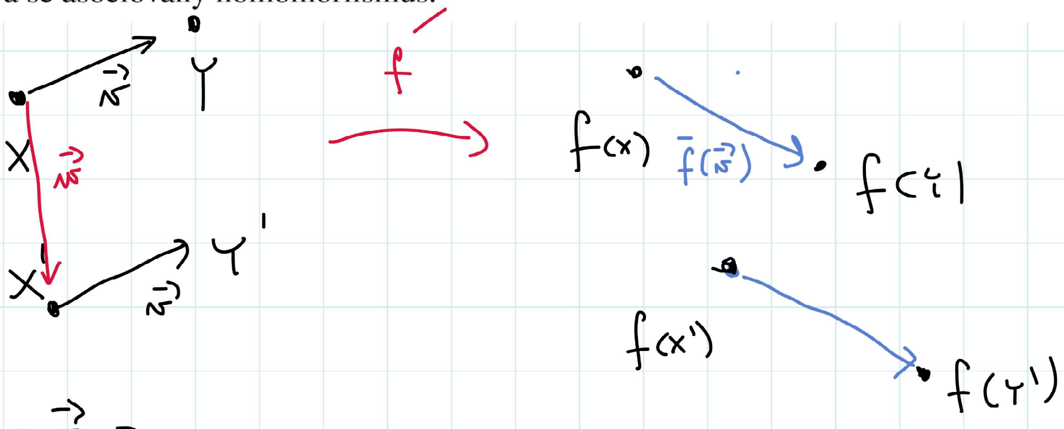
$$f(\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i f(\mathbf{B}_i).$$

Definice a lemma 3.21. Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T a $f : A \to B$ afinní zobrazení. Definujeme zobrazení $\bar{f} : V \to W$ předpisem

$$\boxed{\bar{f}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{X} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{X}),}$$



kde $\mathbf{X} \in A$ je libovolný bod. Tato definice na volbě bodu $\mathbf{X}$ nezávisí a navíc takto definované $\bar{f}$ je lineární a nazývá se asociovaný homomorfismus.



$$Y' = X + \vec{w} + \vec{v} =$$

$$= X + 1(X' - X) + 1(Y - X) =$$

$$= (-1)X + 1X' + 1 \cdot Y$$

$$\Rightarrow$$

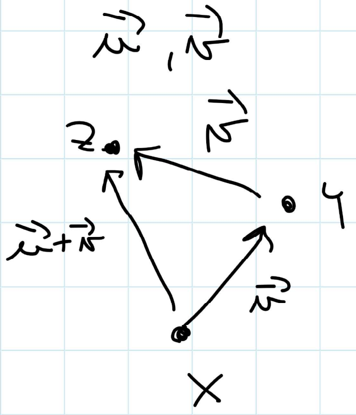
$$f(Y') = -f(X) + f(X') + f(Y)$$

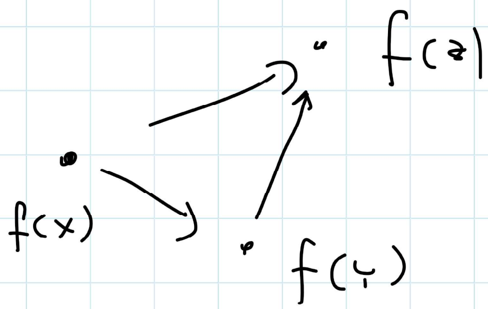
$$f(Y) - f(X) = f(Y') - f(X')$$

Dobrá def.

LINEARITA $\bar f(\vec u+\vec v) = \bar f(\vec u) + \bar f(\vec v)$.

$\vec u, \vec v$





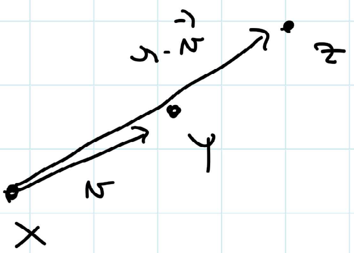
$$\underbrace{[f(y) - f(x)]}_{\bar f(\vec u)} + \underbrace{[f(z) - f(y)]}_{\bar f(\vec v)} =$$

$$= \underbrace{[f(z) - f(x)]}_{\bar f(\vec u + \vec v)}$$

---

násobení skalárem

$\vec v \in V$ $a \in T$



$$\left.\begin{aligned} z &= x + a(y - x) = \\ &= (1-a)\,x + a\,y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$f(z) = (1-a)\,f(x) + a\,f(y)$$

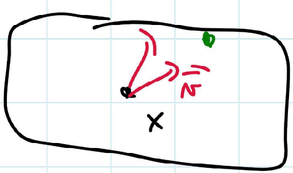
$$= f(x) + a\,(f(y) - f(x))$$

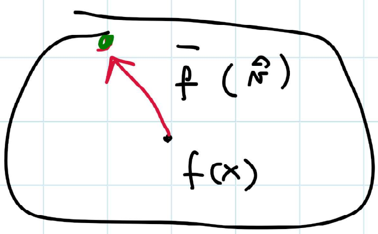
$$\underbrace{f(z) - f(x)}_{\bar f(a v)} = a\,\underbrace{(f(y) - f(x))}_{\bar f(v)}$$

$\bar f(a v) = a\,\bar f(v)$.

$$\bar f(\vec v) = f(x + \vec v) - f(x)$$

$$\underline{f(x + \vec v)} = f(x) + \bar f(v)$$

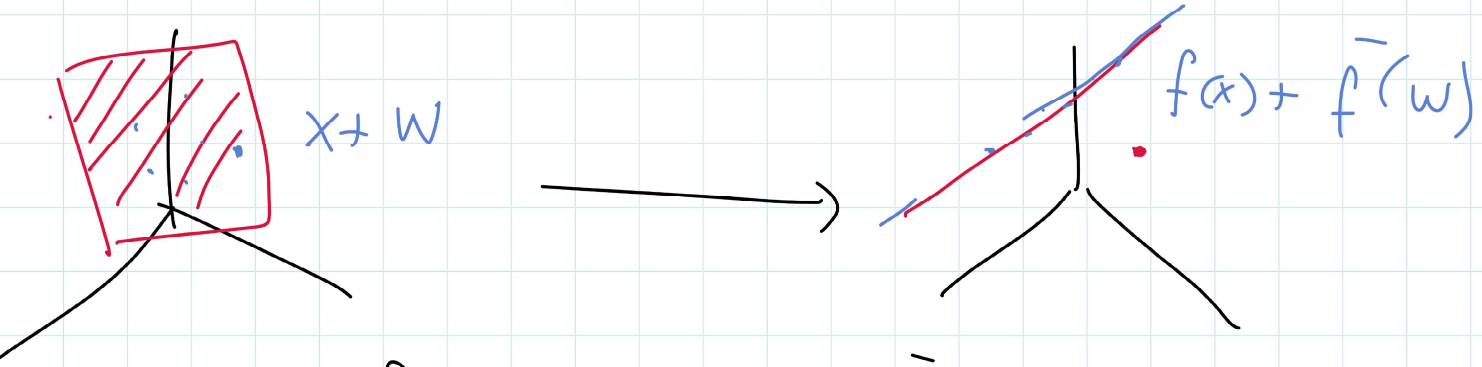




Důsledek 3.22. Obrazem afinního podprostoru v afinním zobrazení je opět afinní podprostor. Afinní zobrazení navíc zachovávají rovnoběžnost podprostorů.

Důsledek 3.23. Afinní zobrazení je injektivní, surjektivní či bijektivní právě tehdy když tuto vlastnost má asociovaný homomorfismus.

Věta 3.24. Afinní zobrazení $f : A \to A$ z afinního prostoru do sebe nazveme *afinita*, jestliže je bijektivní. Všechny afinity daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *afinní grupa*.



$$f(\underbrace{x+\vec{v}}_{y}) = f(x) + \bar{f}(\vec{v})$$

$\Leftarrow$ f prosté $\qquad f(y) = f(y') \Rightarrow y = y'$

$\bar{f}$ prosté $\qquad \vec{v}, \vec{v}\,' \in V \qquad \bar{f}(v') = \bar{f}(v)$

$$f(x+\vec{v}\,') - f(x) = f(x+\vec{v}) - f(x)$$

$$f(x+\vec{v}\,') = f(x+\vec{v})$$

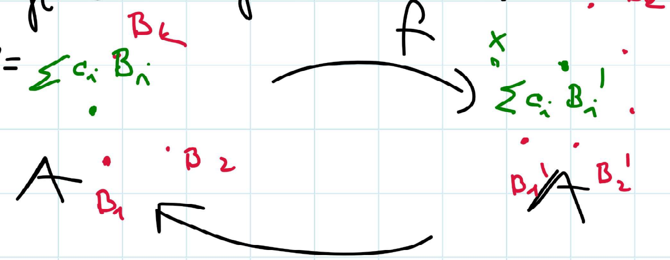
$$x + \vec{v}\,' = x + \vec{v}$$

$$\underline{\vec{v}\,' = \vec{v}}$$

3.24 Afinita f; bijekt afinní zobr.

$f : A \to A$

$f^{-1} : A \to A$



$f(B_i) = B_i'$ $\quad f^{-1}$

f je afinní: $f(y) = x \Rightarrow \underline{x = f^{-1}(y)}$

Věta 3.25. Zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je afinní právě tehdy když má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice $n \times m$ a $\mathbf{p}$ je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ regulární.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$A \quad n \times m$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Afinní $\qquad$ Y pevné $\qquad$ volme $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(X) = f(Y) + \bar{f}(X - Y) =$$

$$= \underbrace{f(Y)}_{p} + \underbrace{\bar{f}(X)}_{A \cdot X}$$

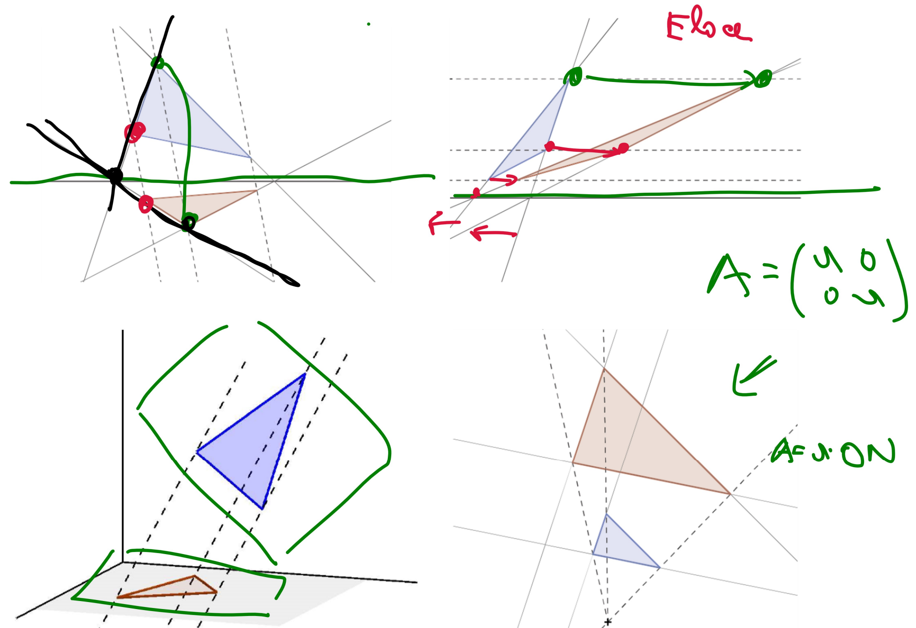
$f(X) = Ax + p$ je vždy afinní

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} c_i B_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^{k} c_i B_i\right) + p = \sum_{i=1}^{k} c_i A \cdot B_i + \sum_{i=1}^{k} c_i p =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \underbrace{(AB_i + p)}_{f(B_i)} = \sum_{i=1}^{k} c_i f(B_i)$$

shodnosti $\subset$ afinit

Důsledek 3.26. Každá shodnost je afinitou. Dalšími příklady jsou projekce, stejnolehlosti, podobnosti, osové afinity.



Definice 3.27. Mějme tři body A, B, X na afinní přímce nad tělesem T, přičemž $A \neq B$ a $X \neq B$. Pak dělící poměr

$$\frac{AX}{XB} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(B - X) = (X - A)$.

Definice 3.28. Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho orientovaný obsah jako

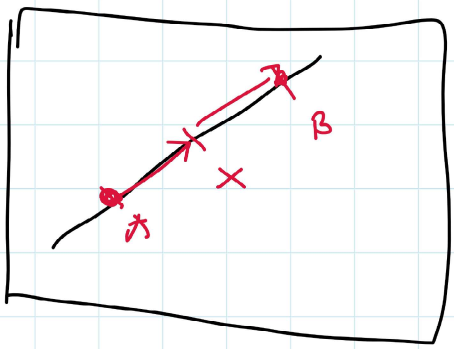
$$S_{ABC} := \frac{1}{2}\det(B - A|C - A).$$

Věta 3.29. Afinity zachovávají dělící poměry. Je-li f afinita v $\mathbb{R}^2$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, pak

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = \boxed{(\det \mathbf{A})} S_{ABC}.$$

Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

$A + \langle \vec{v} \rangle$



(A, B) ... barycentrické souřadnice

$X = c_1 \cdot A + c_2 B$

$X = A + c_2 (B - A)$

$B - A = (B - X) + (X - A) =$

$= (\lambda + 1) \cdot (B - X)$

$B - X = \frac{1}{\lambda + 1} (B - A)$

$X = A + (X - A) = A + \lambda (B - X) =$

$= A + \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda + 1}}_{c_2} (B - A)$

$c_1 = \frac{1}{\lambda + 1}$

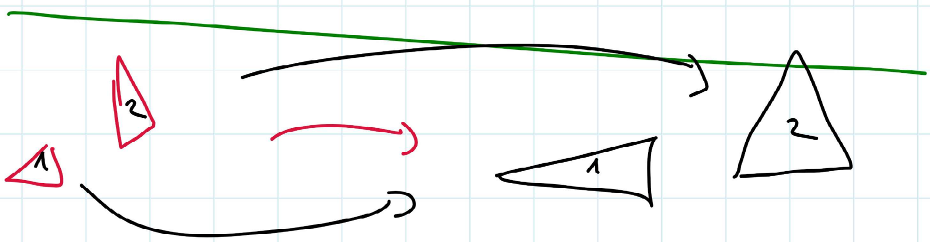
$\lambda = -1$

$\Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{\lambda + 1} \cdot A + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot B$

$\Downarrow$

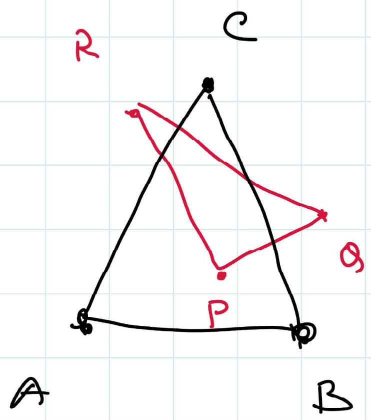
$\boxed{\lambda = \frac{c_2}{c_1}}$

X je střed AB $\Leftrightarrow$ $\lambda = 1$



Věta 3.30. Nechť $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbf{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbf{R}^2$. Pak platí

1. Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) = 0$.
2. Obecněji platí $S_{PQR} = \det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z)S_{ABC}$.



$$Z = (A, B, C)$$

$$[P]_Z = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad [Q] = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad [R] = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{1}{p_1+p_2+p_3} & \overset{1}{q_1+q_2+q_3} & \overset{1}{r_1+r_2+r_3} \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2-p_2 & r_2-p_2 \\ p_3 & q_3-p_3 & r_3-p_3 \end{vmatrix}$$

$$P = A + p_2(B-A) + p_3(C-A)$$
$$Q = A + q_2(B-A) + q_3(C-A)$$
$$R = A + r_2(B-A) + r_3(C-A)$$

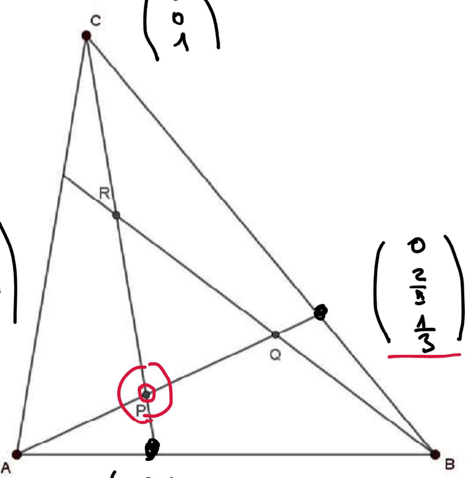
$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\det(Q-P \mid R-P) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} (q_2-p_2)(B-A) + (q_3-p_3)(C-A) & \Big| & (r_2-p_2)(B-A) + (r_3-p_3)(C-A) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\det(B-A \mid C-A)\left[(q_2-p_2)(r_3-p_3) - (r_2-p_2)(q_3-p_3)\right]$$

Příklad 3.31. V libovolném trojúhelníku ABC veďme z každého vrcholu spojnici do (vhodné) třetiny protilehlé strany. Průsečíky těchto spojnic označme P, Q, R. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je jedna sedmina obsahu ABC.

$$Z = (A, B, C)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad u = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \alpha \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1-\alpha \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(1-\alpha) - \frac{1}{9}\alpha = \frac{2}{3} - \frac{7}{9}\alpha$$

$$\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}} = \frac{6}{7}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \left(64 + 1 + \cancel{8} - \cancel{8} - 8 - 8\right) =$$

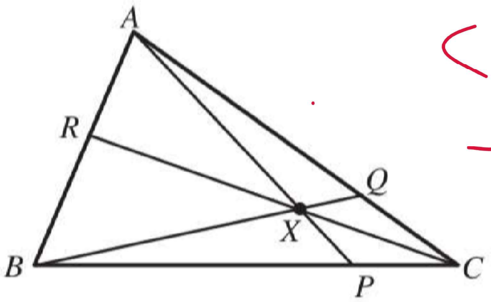
$$= \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot 49 = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

Věta 3.32 (Cevova věta)**.** Mějme trojúhelník ABC a bod X, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

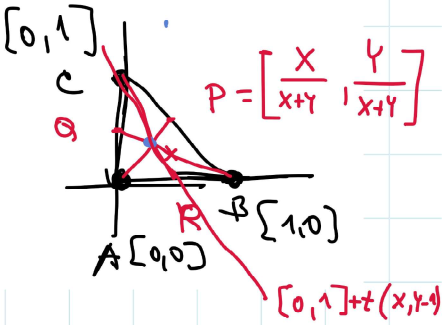
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ \frac{y}{1-x} & y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \frac{y}{1-x} - y - \frac{xy}{1-x}$$

$X = [X, Y]$



$\Leftarrow\Rightarrow$



$P = \left[\frac{X}{X+Y}, \frac{Y}{X+Y}\right]$

$[0,1] + t(X, Y-1)$ $\quad t = \frac{-1}{Y-1}$

$P = [\alpha X, \alpha Y]$

$R = \left[\frac{X}{1-Y}, 0\right]$

$Q = \left[0, \frac{Y}{1-X}\right]$

$\alpha X + \alpha Y = 1$

$\alpha = \frac{1}{X+Y}$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{X}{1-Y}}{1 - \frac{X}{1-Y}} = \frac{\cancel{X}}{1-Y-X}$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{X}{X+Y} - 1}{0 - \frac{X}{X+Y}} = \frac{X - X - Y}{-X} = \frac{\cancel{Y}}{\cancel{X}}$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\frac{Y}{1-X} - 1}{0 - \frac{Y}{1-X}} = \frac{Y - 1 + X}{+\cancel{Y}}$$