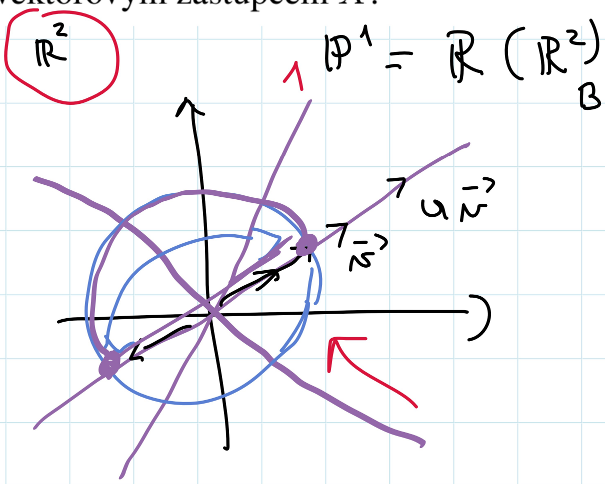
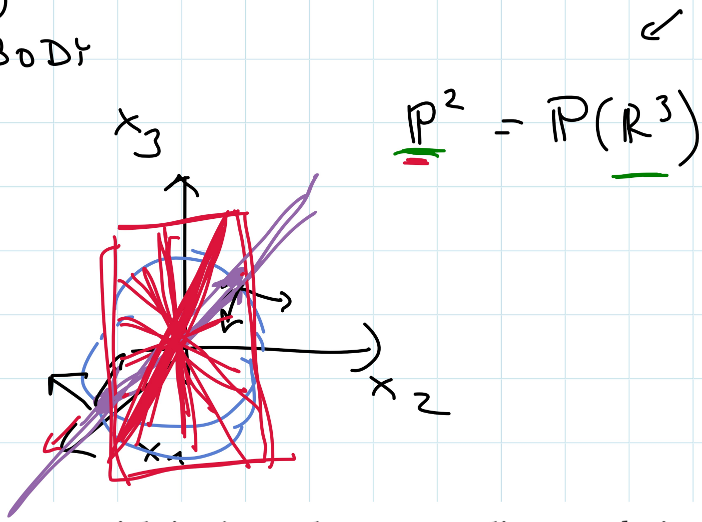
4 Projektivní geometrie

Definice 4.1. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $(n+1)$ nad tělesem T. Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen $\mathbb{P}^n$: $\|v\| = 1$

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{\underline{LO}\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme projektivní body a odpovídající vektory $\mathbf{v}$ jejich vektorové zástupce. Zjevně, jestliže $\mathbf{v}$ je vektorovým zástupcem X, pak pro libovelné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X.

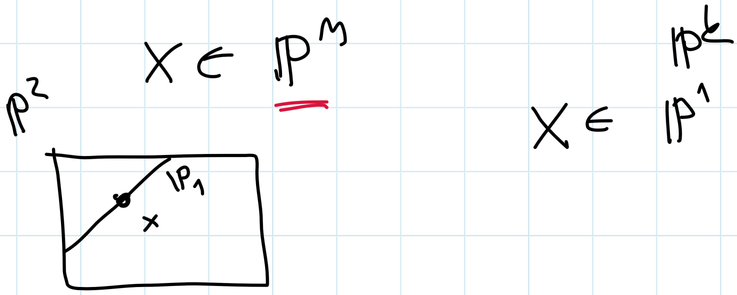




Definice 4.2. Podmnožinu $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ nazveme projektivním podprostorem dimenze k, jestliže existuje vektorový podprostor $V^{k+1} \leq V^{n+1}$ dimenze $(k+1)$ tak, že

$$\mathbb{P}^k = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $\underline{(n-1)}$ nadrovina.



Definice 4.3. Mějme dva projektivní prostory $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(V^{m+1})$ a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbf{P}^m$. O zobrazení

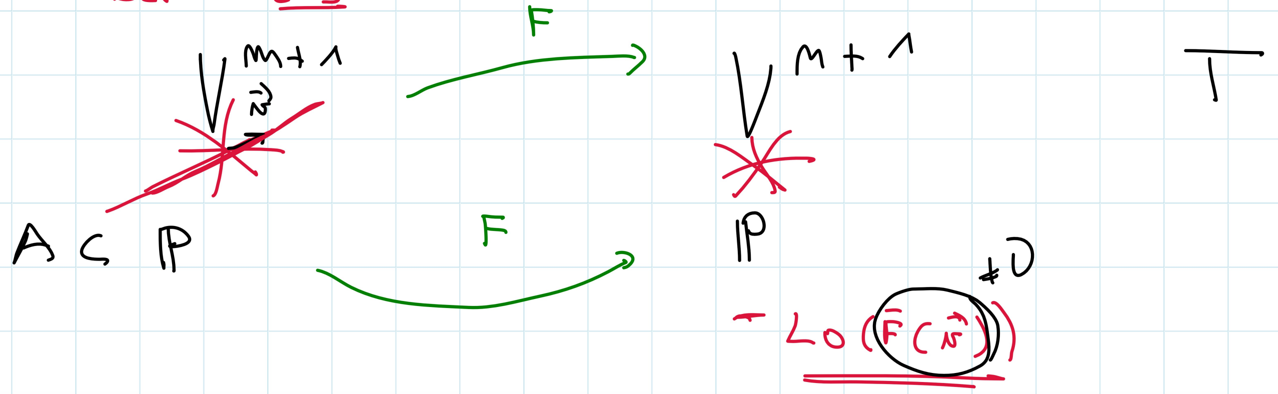
$$F : A \to \mathbf{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \to V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$\boxed{F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.}$$

Poznámka 4.4. Omezení na podmnožinu A v definici 4.3 je nutné z toho důvodu, že když lineární zobrazení $\bar{F}$ není prosté, tak zobrazení F nemůže být definováno na bodech reprezentovaných vektory z $\ker \bar{F}$, neboť $LO\{\mathbf{0}\}$ není projektivní bod. Jestliže je $\bar{F}$ prosté, pak je F definováno na celém prostoru $\mathbb{P}^n$, v opačném případě na doplňku projektivního podprostoru (odpovídajícího $\ker \bar{F}$). Budeme studovat zejména projektivní zobrazení na témže prostoru (tedy $m = n$) generovaná regulárními lineárními zobrazeními na V^{n+1}.

$\ker \bar F = \{\vec 0\}$



$\bar F(\vec v) = \vec 0$ $\quad$ $\vec v \in \ker \bar F$

$P^2 = P(\mathbb{R}^3)$ $\qquad$ $P^2 = P(\mathbb{R}^3)$

m

$\bar F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\bar F(1,1,1) = (2,9,1)$

$x = LO((1,1,1))$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$LO((3,3,3))$ $\quad F(x) = LO((2,9,1)) = L((6,27,3))$

Věta 4.5. Projektivní zobrazení $F : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ z afinního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení $\bar{F}$ jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

$\bar F : V^{m+1} \to V^{m+1}$ $\qquad X = LO\{\vec v\}$ $\quad Y = LO\{\vec w\}$

$F : P^m \to P^m$ $\qquad F(X) := LO(\bar F(\vec v))$

$\bar F$ prosté $\Rightarrow$ F prosté

$F(X) = F(Y) \Rightarrow LO(\bar F(\vec v)) = LO(\bar F(\vec w)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar F(\vec v) = a \cdot \bar F(\vec w) = \bar F(a \vec w) \Rightarrow \vec v = a \cdot \vec w \Rightarrow$

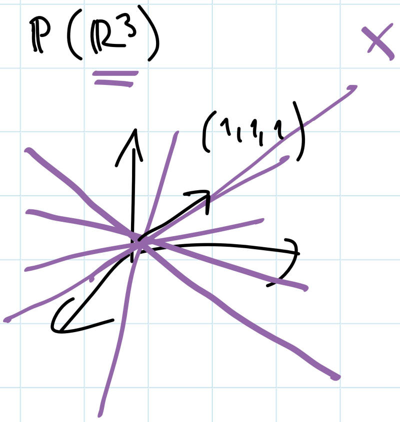
$\Rightarrow LO(\vec v) = LO(\vec w) \Rightarrow X = Y$ $\quad \blacksquare$

Definice a lemma 4.6. Mějme vektorový prostor V dimenze $n+1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor $\mathbb{P}_n$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru $\mathbb{P}_n$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}_n$ pak rozumíme uspořádanou $n+1$-tici skalárů $(c_1, \dots c_{n+1})$ takovou, že

$$X = LO\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(c_1, \dots c_{n+1})$ a $(\lambda c_1, \dots \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X. Proto se těmto souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu \mathbf{v}_1, \dots \mu \mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$



$LO\{\vec{v}\} = LO\{u \cdot \vec{v}\}$

$X = \underbrace{(1,1,1)}_{} = (2,2,2) = (-10,-10,-10)$

$2x + 3y = 7$
$6x + 9y = 21$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $LO(1,1,1)$

$\boxed{\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}}$ $\rightsquigarrow$ $LO\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right) =$

$\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right) = (1,1,1)$

Definice 4.7. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1}, pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO\{\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(t_1, \ldots t_{k+1})$ a $(\lambda t_1, \ldots \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X.

Definice 4.8. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T. Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární formy $\ell \in V_*^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

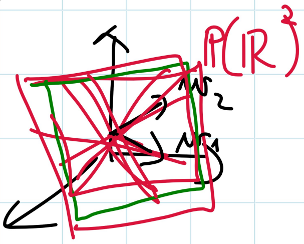
Toto vyjádření nazýváme rovnicové vyjádření nadroviny. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda\ell$ tutéž nadrovinu. Všechny nadroviny v prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$ tedy odpovídají bodům v duálním projektivním prostoru $\mathbb{P}(V_*^{n+1})$. Je-li $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{n+1})$ soustava projektivních souřadnic, pak duální bázi $(\mathbf{v}_1^*, \ldots \mathbf{v}_{n+1}^*)$ nazveme duální soustavou souřadnic a příslušné souřadnice označujeme hvězdičkou.

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$

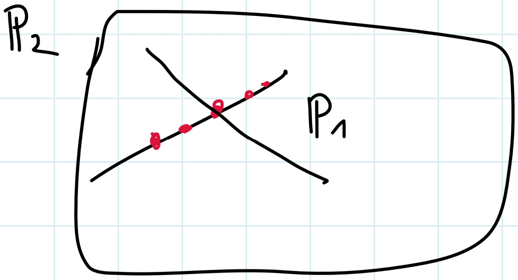
$\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\underbrace{\operatorname{Ker} \ell}$

$\ell \quad \lambda\ell$

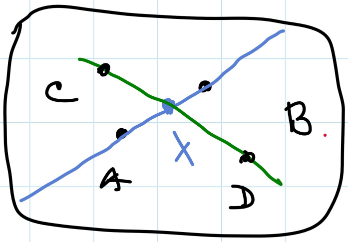


$LO(\lambda t_1 \cdot w_1 + \lambda t_2 w_2)$



Příklad 4.9 (Výpočty v projektiní rovině.). V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C(0, 1, 1)$, $D(5, 2, 1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

$\mathbb{R}^3$



$A = LO\{\vec{a}\}$ $\quad B = LO\{\vec{b}\}$

$\mathbb{R}^2 = LO\{\vec{a}, \vec{b}\}$

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$LO(1,-2,1)^*$

$\ell \ldots \vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{Ker}\,\ell$

$\ell_1 = (1,-2,1)^*$ $\quad X = t_1 (1,2,3) + t_2 (1,0,-1)$ $\quad (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \neq (0,0)$

$\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD}$

$\ell_2 = (1,-5,5)^*$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ldots LO\left(\frac{1}{5}, -1, 1\right) = LO(1,-5,5)^*$

$X = \mathrm{Ker}\,\ell_1 \cap \mathrm{Ker}\,\ell_2$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$LO\{(5,4,3)\}$

$V^2 \le \mathbb{R}^3$

$V^{2'} \le \mathbb{R}^3$

$(V^2 \cap V^{2'}) \le \mathbb{R}^3$

$\dim = 1$

$X = (5,4,3) = (-10,-8,-6)$

Ověříme, že ABX leží na přímce:

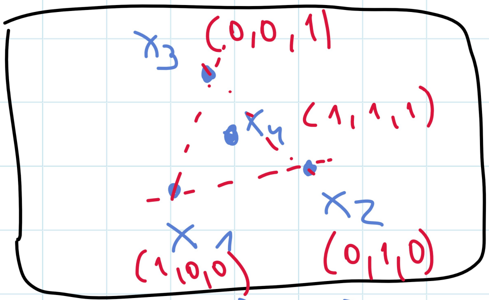
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -10 + 12 - 6 + 4 = 0$$

Věta 4.10. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned} X_1 &= (1,0,\dots,0,0) \\ X_2 &= (0,1,\dots,0,0) \\ &\vdots \\ X_n &= (0,0,\dots,1,0) \\ X_{n+1} &= (0,0,\dots,0,1) \\ X_{n+2} &= (1,1,\dots,1,1). \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^2 \dots \quad X = (1,7,9) = $

$= (-10,-70,-90)$



Dk.

LN

$B_1 = (\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{n+1})$ $\quad$ $B_2 = (c_1\vec{n}_1, c_2\vec{n}_2, \dots, c_{n+1}\cdot\vec{n}_{n+1})$

$X_1 = LO\{\vec{n}_1\} = (1,0,\dots 0) = \left(\frac{1}{c_1}, 0 \dots 0\right) = \underbrace{(1,0,\dots 0)}$

$X_2 = LO\{\vec{n}_2\} = (0,1,\dots 0) = \left(0, \frac{1}{c_2}, 0 \dots 0\right) = \underbrace{(0,1,\dots 0)}$

$\vdots$

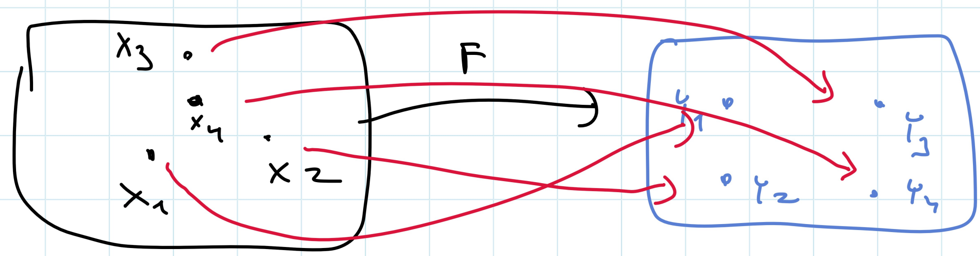
$X_{n+1} = LO\{\vec{n}_{n+1}\} = (0, \dots 0, 1) = \left(0, \dots 0, \frac{1}{c_{n+1}}\right) = \underbrace{(0, \dots, 1)}$

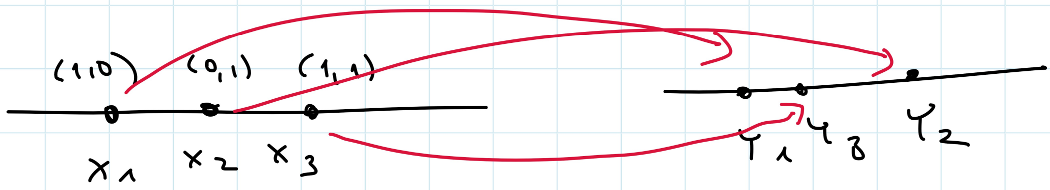
$X_{n+2} = LO\{\vec{n}_{n+2}\} = (c_1, \dots, c_{n+1}) = \underbrace{(1,1,1,\dots 1)}$

$[\vec{n}_{n+2}]_{B_1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$ $\quad c_i \neq 0$

Důsledek 4.11. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině a také $n+2$ bodů $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \qquad i = 1, \dots, (n+2).$$

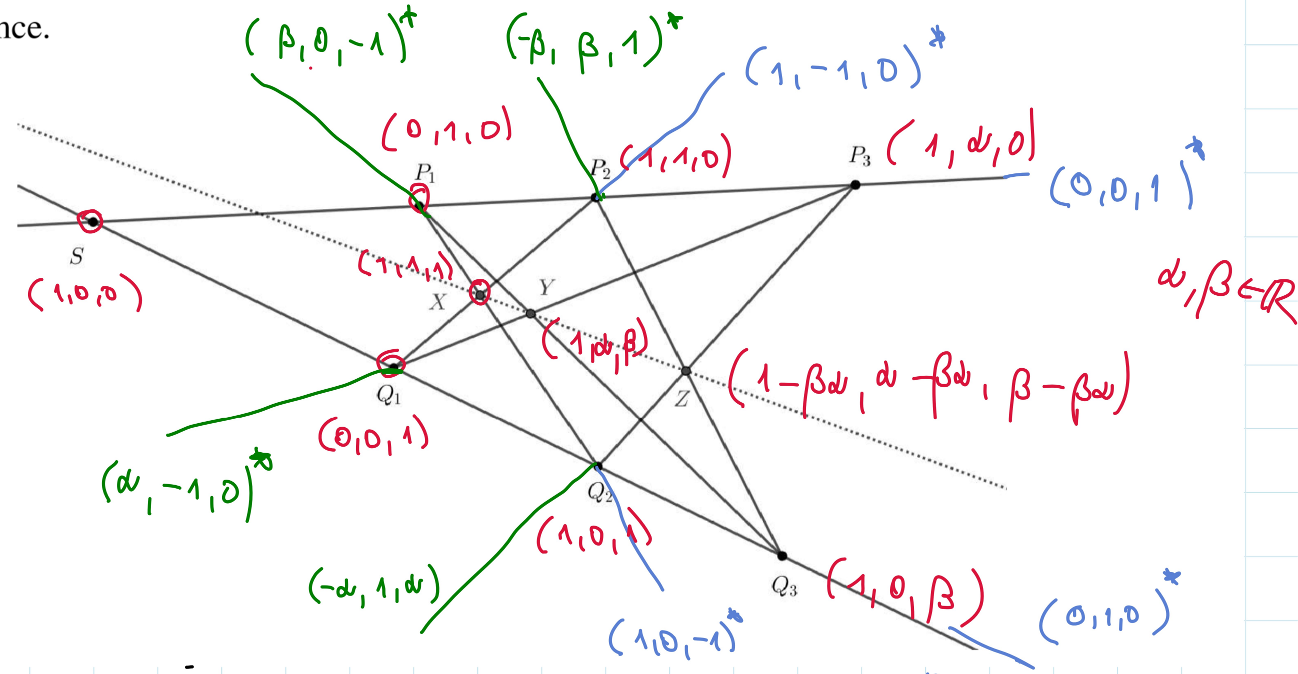




Věta 4.12 (Pappova věta). V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dvě přímky p, q, které se protínají v bodě S. Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S. Podobně na přímce Na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S. Pak platí, že body

$$X := \overleftrightarrow{P_1Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_1}, \quad Y := \overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}, \quad Z := \overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$$

leží na přímce.



$$P_3 = t_1 S + t_2 P_1 = t_1(1,0,0) + t_2(0,1,0) = (1,0,0) + \overset{\alpha}{\frac{t_2}{t_1}}(0,1,0) = (1,\alpha,0)$$

$\underline{t_1 \neq 0}$ (jinak by bylo $P_1 = P_3$)

Y: $\begin{pmatrix} \beta & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}$ - řešení $(1,\alpha,\beta)$

Z: $\begin{pmatrix} -\beta & \beta & 1 \\ -\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \overset{-\alpha \text{ krát}}{\sim} \begin{pmatrix} -\beta & \beta & 1 \\ -\alpha+\beta\alpha & 1-\beta\alpha & 0 \end{pmatrix}$ řešení je $(1-\beta\alpha, \alpha-\beta\alpha, \beta-\beta\alpha)$

$$-\beta(1-\cancel{\beta\alpha}) + \beta(\alpha-\cancel{\beta\alpha}) + x_3 = 0$$

$\underline{XYZ \text{ na přímce?}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ (1-\beta\alpha) & (\alpha-\beta\alpha) & (\beta-\beta\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

$\mathrm{III} = \mathrm{II} - \mathrm{I}\,\beta\cdot\alpha \Rightarrow$ singulární $\boxed{\checkmark}$

Volba násobku

$(7,6,5) = (14,12,5)$

$(\boxed{1}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7})$

$(2,3,4) = (\boxed{1}, \frac{3}{2}, 2)$

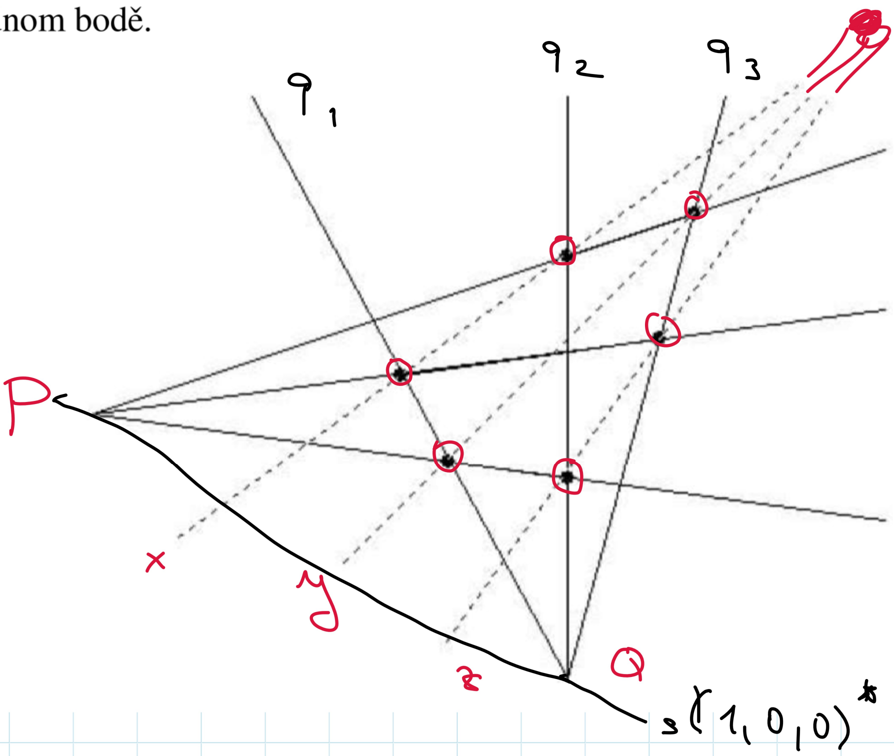
$(0,5,7)$

Věta 4.13 (Princip duality)**.** Jestliže v projektivní rovině platí věta, ve které se vyskytují pouze přímky, body, jejich průsečíky, spojení a vlastnost "ležet na", pak platí i věta duální, t.j. ve které nahradíme přímky body, body přímkami, průsečík spojením, spojení průsečíkem a "ležet na"nahradíme "procházet".

Věta 4.14 (duální k Pappově)**.** V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dva body P, Q, které leží na přímce s. Bodem P prochází přímky p_1, p_2, p_3 různé navzájem a různé od s. Podobně bodem Q prochází přímky q_1, q_2, q_3 různé navzájem a různé od S. Pak platí, že se přímky

$$x := \overleftrightarrow{(p_1 \cap q_2)(p_2 \cap q_1)}, \quad y := \overleftrightarrow{(p_1 \cap q_3)(p_3 \cap q_1)}, \quad z := \overleftrightarrow{(p_2 \cap q_3)(p_3 \cap q_2)}$$

protínají v jednom bodě.



Definice 4.15. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem zůzné body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}} \\ \mathbf{d} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$c \to \lambda c$

$\alpha_1 \to \lambda \alpha_1$

$\beta_1 \to \lambda \beta_1$

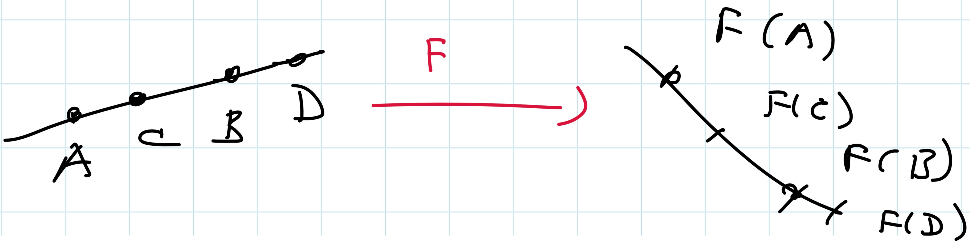
$a \to \lambda a$

$\alpha_1 \to \frac{\alpha_1}{\lambda}$ $\alpha_2 \to \frac{\alpha_2}{\lambda}$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$ řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.



Věta 4.16. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestli-že je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

a b c d $\bar{F}(a)$ $\bar{F}(b)$ $\bar{F}(c)$ $\bar{F}(d)$

Definice 4.17. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1}. Neprázdnou množinu

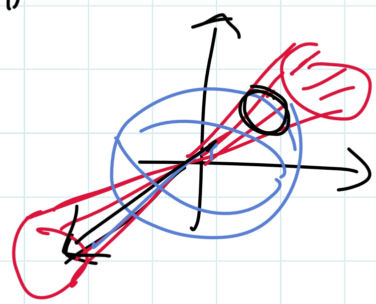
$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme regulární, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnost $n+1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

$$q(\vec{v}) = 0$$

$$q(a\vec{v}) = a^2 \cdot q(\vec{v}) = 0$$

$\mathbb{P}^2$



Definice a lemma 4.18. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma (tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$). Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou polárně sdružené, jestliže $\boxed{b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0}$. Jestliže je Q regulární kvadrika, pak množina bodů sdružených s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ je nadrovina, kterou nazveme *polára k* X a budeme ji označovat p_X. Jestliže $X \in Q$, pak je p_X tečnou ke Q v jejím bodě X.

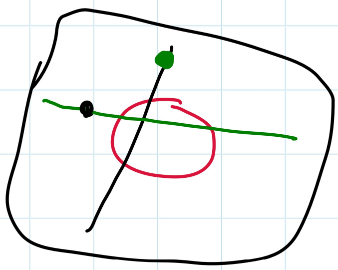
$\boxed{V}$

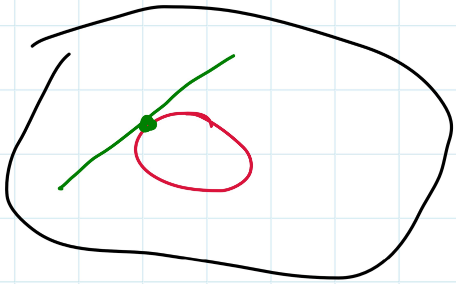
$$q(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$$

B

$$l(w) := b(v, w)$$

lineární forma nulová





Př: $\mathbb{P}^2$ (x_1, x_2, x_3)

$$\underbrace{x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 = 0}$$

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_X = (0, 1, 4)^*$$

Definice 4.19. Každá regulární kuželosečka v reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

$$K \qquad \boxed{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.}$$

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 \qquad \text{(nepřímková kvadrika)} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 \qquad \text{(přímková kvadrika).} \end{aligned}$$

[illegible] $(0, +, -)$

$$(x_0\ x_1\ x_2)\, B \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0\ x_1\ x_2)\, P^T B P \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

Q

$\mathbb{P}_2$

$$(x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$(x \in K) \Leftrightarrow (PX \in Q)$ $\qquad Q$ je transf K pomocí P

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$