

Geometrie 1

Tento soubor obsahuje znění číslovaných položek (především definic a vět) jak byly předneseny v ZS 2020/21. V této verzi chvíli je doplněna naprostá většina důkazů, které však nenahrazují přednášku. Nejsou podrobným slovním vysvětlením všeho, ale spíše zachycením klíčových kroků a vzorců v důkazech použitých.

Spolu se zápisky a videi z přednášek je tento seznam i hlavním studijním materiálem ke zkoušce. Zkouška bude písemná, bude trvat 150 minut a bude obsahovat početní i teoretickou část. V početní části budou všechny typové příklady, které se objevily na cvičeních (ne však hvězdičkované). V teoretické části se budou zkoušet

- Základní definice, u kterých bude zde nastaven vysoký požadavek na získané body (kdo neumí základní definice, neudělá zkoušku). Jedná se o definice 1.2, 1.9, 2.2, 2.4, 2.5, 2.9, 2.12, 2.16, 2.19, 2.27, 2.29, 2.32, 3.1, 3.4, 3.6, 3.14, 3.20, 3.27, 4.1, 4.2, 4.3, 4.19, 4.22, 4.27, 4.30, 4.38,
- Znění všech ostatních definic, vět, lemmat a důsledků (ne však poznámek a příkladů).
- Všechny kratší důkazy, což jsou ty, které nespádají ani do delších důkazů ani do položek, u kterých se důkaz nezkouší. Všechny důkazy se zkouší v té míře přesnosti a podrobnosti, v jaké byly odpředneseny.
- Delší důkazy, takový bude u zkoušky nejvýše jeden, jedná se o 1.4, 1.11, 1.17, 2.13, 2.14, 2.22, 2.36, 3.32, 3.33, 4.12,
- Nebudou zkoušeny tyto důkazy: 1.14, 2.24, 2.31, 2.33, 2.35, 3.2, 3.16, 4.13, 4.14, 4.21, 4.40, 4.43, 4.45,

Do těchto seznamů bude ještě doplněna látka z poslední lednové přednášky.

1 Shodná zobrazení

Cílem této kapitoly je studovat shodná zobrazení v rovině a v prostoru bez toho, že by se formálně definoval afinní prostor. Zároveň chceme zopakovat středoškolskou analytickou geometrii a co nejpřirozeněji na ni navázat.

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : 3x + 4y - 7 = 0$.

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$.

Lemma 1.3. Přímou z definice plyne, že složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost.

Důkaz. Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $\|g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))\| = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{D}(f^{-1})$, pak nalezneme $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $f(\mathbf{A}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{B}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$\|f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Tedy f^{-1} je shodnost.

□

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T (\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{O}\| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j\| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, které je podle první části důkazu shodné a pro jeho invers platí $g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i . Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))$. Pak platí

$$\|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{O})\|^2 = \|h(\mathbf{Y})\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)\|^2 &= \|h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + \dots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \dots + (y_i - 1)^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i\|^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. $\square$

Poznámka 1.5. V definici shodnosti se využívá pouze toho, že $\mathbb{R}^n$ je metrický prostor. Předchozí věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru.

Důsledek 1.6. Shodnosti jsou surjektivní a vzhledem ke skládání tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}, \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}.$$

Definice 1.7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$.

Věta 1.8. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 1.9. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$. Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Definice 1.10. Množina M je samodružná množina zobrazení f , jestliže ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť). Přesněji jestliže platí

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{X} \in M \implies f(\mathbf{X}) \in M.$$

Věta 1.11. Pro každou shodnost $f \in E(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
 - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
 - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1 . V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
 - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí.
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastním číslem -1 a
 - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
 - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Zobrazení	Identita	Posunutí	Otočení	Osová souměrnost	Posunutá souměrnost
Samodružné body	všechny	-	střed otočení	osa souměrnosti	-
Samodružné směry	všechny	všechny	všechny (identita, středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	směr osy a směry kolmé na osu	-
Přímé/nepřímé zobrazení	přímé	přímé	přímé	nepřímé	nepřímé

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům $\mathbf{A}$. Rozlišíme dva případy:

- f je přímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos \alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné $\mathbf{p}$ a tedy f má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. Lze psát

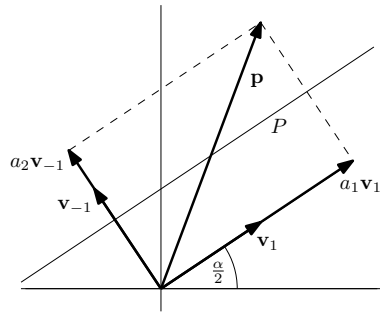
$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{AS} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

takže jde o rotaci kolem $\mathbf{S}$. Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě $\mathbf{A}$ nemá žádné vlastní vektory, tedy f nemá samodružné směry.

- f je nepřímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = -1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla 1, -1 s příslušnými na sebe kolmými vlastními vektory $\mathbf{v}_1 = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$, $\mathbf{v}_{-1} = (-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2})$.

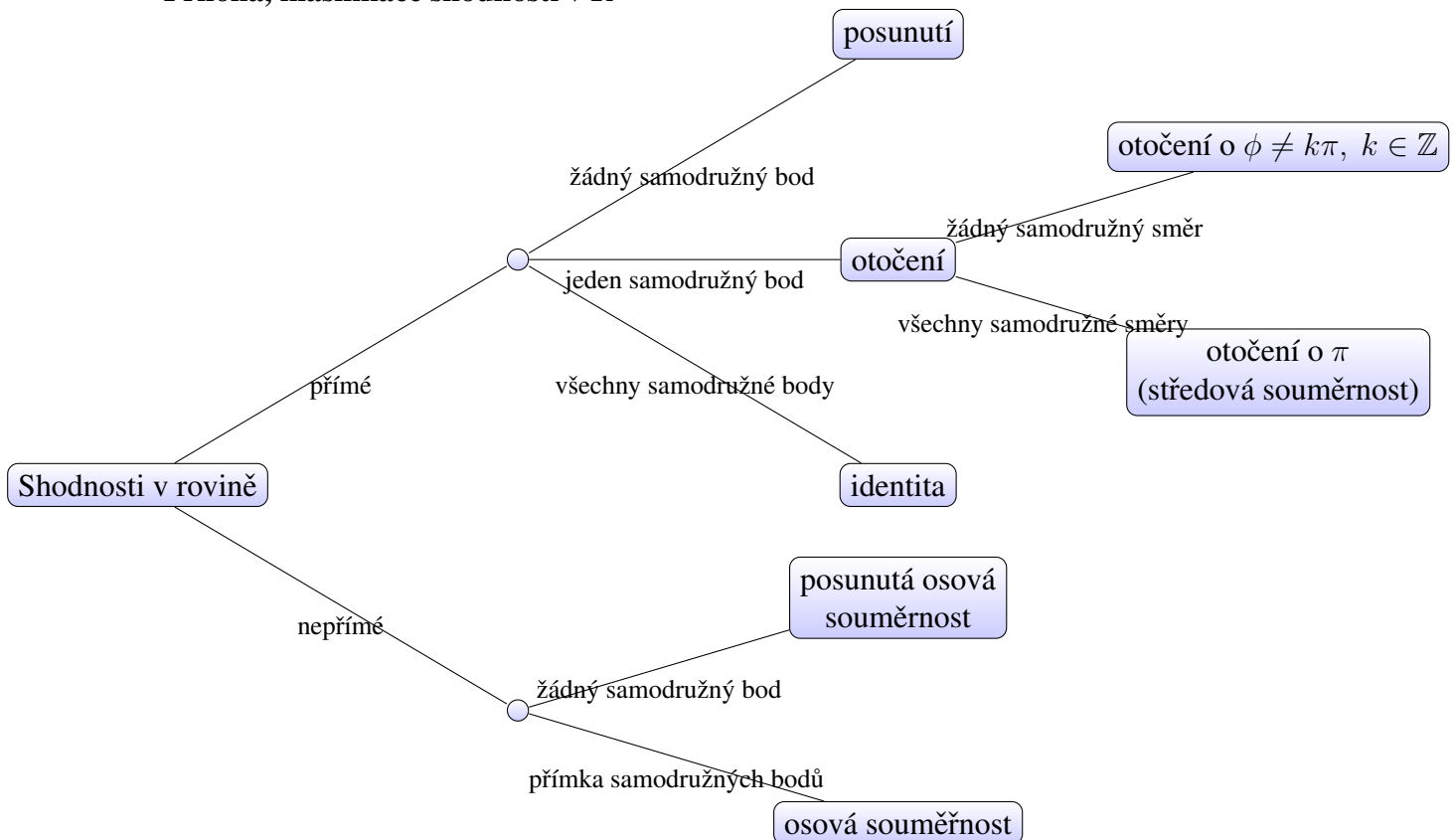


Označme $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1})$, což je ON báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ a $(a_1, a_2) = [\mathbf{p}]_B$ souřadnice vektoru $\mathbf{p}$.

- Je-li $a_1 = 0$, jako množina samodružných bodů vyjde přímka $P = \frac{a_2}{2}\mathbf{v}_{-1} + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a jedná se o osovou souměrnost podle této přímky.
- Pro $a_1 \neq 0$ jde o složení osové souměrnosti podle $P = \frac{a_2}{2}\mathbf{v}_{-1} + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ a translace v jejím směru o vektor $a_1\mathbf{v}_1$, tedy posunutou osovou souměrnost. f nemá žádné samodružné body a má jedinou samodružnou přímku P .

□

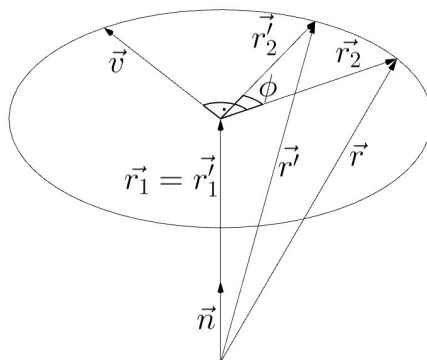
Příloha, klasifikace shodností v $\mathbb{R}^2$



Věta 1.12 (Rodriguesova formule). Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Rotací v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$ a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.



Důkaz. Rozložíme $\mathbf{r}$ na složku $\mathbf{r}_1 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ (tj. projekci do směru $\mathbf{n}$) a složku $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ kolmou na $\mathbf{n}$. Označme $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_2$. Jelikož $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}_2$, platí

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_2\|.$$

Rotace kolem vektoru $\mathbf{n}$ o úhel ϕ zúžená na $\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{n} \rangle^\perp$ je zřejmě také rotace o úhel ϕ . Jelikož $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v})$ je „násobkem“ „kladně orientované“ ortonormální báze tohoto prostoru, můžeme psát

$$\mathbf{r}'_2 = \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v}.$$

(Čárka vždy značí obraz v uvažovaném zobrazení.) Dále zřejmě $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$. Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 \\ &= \mathbf{r}_1 + \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

□

Definice 1.13. Připomeňme si z LA, že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso a mají tvar $q = s + xi + yj + zk$, přičemž $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ a $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

Lemma 1.14 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z rozepsání q_1 a q_2 pomocí čtyř složek.

Definice 1.15. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 1.16. Jednotkové kvaterniony tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Důkaz. Multiplikativní inverz jednotkového kvaternionu q je $\bar{q}$, protože $q\bar{q} = 1 = \bar{q}q$ a $\|\bar{q}\| = \|q\| = 1$. Dále jsou-li q_1, q_2 jednotkové kvaterniony, pak

$$\|q_1 q_2\| = \sqrt{(q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})} = \sqrt{q_1 (q_2 \bar{q}_2) \bar{q}_1} = \sqrt{q_1 \bar{q}_1} = 1,$$

tedy $q_1 q_2$ je jednotkový kvaternion. Jednotkové kvaterniony tak tvoří neprázdnou podmnožinu multiplikativní grupy všech nenulových kvaternionů uzavřenou na skládání a inverze, čili podgrupu.

Je-li $q = (s, \mathbf{v})$ jednotkový kvaternion a $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, potom nutně

$$|s| = \sqrt{\|q\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2} < 1.$$

Jediná možná vyhovující volba $\alpha \in (0, \pi)$ je $\alpha = \arccos s$. Z toho plyne

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\|q\|^2 - s^2} = \sin \alpha,$$

tedy $q = (s, \mathbf{v}) = (\cos \alpha, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sin \alpha)$ a označíme $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Lemátko. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Důkaz. Rozlišíme dva případy:

- $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé. Jelikož vektorový součin antikomutuje, můžeme BÚNO předpokládat, že $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom je $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{o}$, takže levá strana (LS) dokazované rovnosti je rovna $\mathbf{o}$. Ovšem pravá strana (PS) je rovna $(\mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\lambda \mathbf{v} = \mathbf{o}$, takže rovnost platí.

- $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Potom je $B = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$ báze $\mathbb{R}^3$. Obě strany dokazované rovnosti jsou výrazy lineární v $\mathbf{u}$, tedy stačí ukázat platnost v případě, kdy je $\mathbf{u}$ roven jednomu z prvků B .

– $\mathbf{u} = \mathbf{v}$: Rovnost přejde do tvaru

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Stačí ukázat, že skalární součin libovolného prvku B s LS je stejný, jako s PS. Snadno je vidět, že

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \text{LS} &= \mathbf{0} = \mathbf{v} \cdot \text{PS}, \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \text{LS} &= \mathbf{0} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \text{PS}.\end{aligned}$$

Konečně označíme-li úhel mezi $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jako α , platí

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \cdot \text{LS} &= \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= -\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = -\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \sin^2 \alpha, \\ \mathbf{w} \cdot \text{PS} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \cos^2 \alpha - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= -\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \sin^2 \alpha = \mathbf{w} \cdot \text{LS}.\end{aligned}$$

- $\mathbf{u} = \mathbf{w}$: LS i PS jsou „antisymetrické vzhledem k $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ “, tedy prohodíme-li v nich $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, obě se pouze pronásobí -1 . Tím pádem je tento případ analogický předchozímu.
- $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\text{LS} = \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Dále z kolmosti $\mathbf{u}$ na $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ plyne

$$\text{PS} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0} = \text{LS}.$$

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha)$ je zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

rotací kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

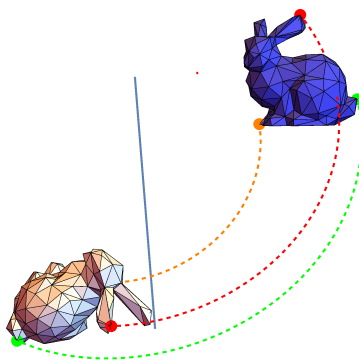
Důkaz. Označme $q = (s, \mathbf{v})$. S využitím Lemmatu 1.14 a Lemátka

$$\begin{aligned}q\mathbf{r}\bar{q} &= (s, \mathbf{v})(0, \mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\ &= (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \times \mathbf{r} + s\mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\ &= (-(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})s + \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}}_0 + s\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \underbrace{-(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{v} - s\mathbf{r} \times \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + s(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + s^2\mathbf{r}}_{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}) \\ &= (0, 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{r} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})) \\ &= (0, 2\sin^2 \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\mathbf{r} + 2\sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) \\ &= (1 - \cos 2\alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos 2\alpha \mathbf{v} + \sin 2\alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}).\end{aligned}$$

Ovšem to je podle Rodriguesovy formule vektor vzniklý otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n}$ o úhel 2α v kladném směru. $\square$

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $\vec{n} = (3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Věta 1.19. Každou přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).



Důkaz. Každé $f \in \mathbb{E}_+(3)$ je tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je ortogonální a $\det \mathbf{A} = 1$. Matice $\mathbf{A}$ (braná jako komplexní) má vlastní čísla 1 a $\cos \phi \pm i \sin \phi$ pro nějaké $\phi \in [0, 2\pi)$. Je-li $\phi = 0$, potom $\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$ a tvrzení zřejmě platí. Dále uvažujme $\phi \neq 0$. Necht' $\mathbf{v}$ je nějaký nenulový vlastní vektor příslušný 1. Označme $W = \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$. Rozložme $\mathbf{p}$ na $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, kde $\mathbf{p}_1 = \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{p}_2 \perp \mathbf{v}$. Označme $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ přímou shodnost danou předpisem $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}_2$. W je samodružná množina g a $g|_W$ je rotace o úhel $\phi \neq 0$, čili má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. f je tedy složení otočení kolem přímky $\mathbf{S} + \langle \mathbf{v} \rangle$ o úhel ϕ a posunutí o vektor $\mathbf{p}_1$ (tj. ve směru dané přímky). $\square$

2 Diferenciální geometrie křivek

Příklad 2.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ bez bodu $(-1, 0)$. Tuto množinu parametrizujeme jako $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ a uvažujme reparametrizaci $t = 2 \arctan s$ pro $s \in (-\infty, \infty)$. Nová parametrizace má tvar

$$\mathbf{c}(s) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right), \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Definice 2.2. Bud' $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojitě zobrazení $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy C^∞ a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}$ je regulární, tedy $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka 2.3.

1. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na I restrikci na I hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.
2. Parametrická křivka je popsána n -ticí funkcí $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$ jedné proměnné definovaných na I .
3. Její derivace je lineární zobrazení (totální diferenciál), které vyjádříme sloupcovým vektorem (maticí $n \times 1$) a budeme ho chápat jako (tečný) vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^n$, který závisí na parametru. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti $\|\mathbf{c}'(t)\|$, která je hladká a kladná.
4. Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy C^∞), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti.

Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ hladký difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I , je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako $\mathbf{c}$. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Definice a lemma 2.5. Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

Důkaz. Difeomorfismus je zobrazení $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ které je bijekce, hladké C^∞ a $\phi' \neq 0$ všude. Z toho plyne, že ϕ^{-1} je také difeomorfismus.

- Transitivita: složení difeomorfismů je difeomorfismus, tedy $(\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi \text{ a } \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \psi) \Rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{c} \circ (\phi \circ \psi)$

- Symetrie: inverze defeomorfismu je difeomorfismus, tedy když $\tilde{c} = c \circ \phi \Rightarrow c = \tilde{c} \circ \phi^{-1}$
- Reflexivita: identita je difeomorfismus a tedy $c = c \circ id$
- Orientace: složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy

$$(id' > 0); (\phi' > 0) \Rightarrow (\phi^{-1})' > 0; (\phi' > 0 \& \psi' > 0) \Rightarrow (\phi \circ \psi)' > 0.$$

□

Poznámka 2.6. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme právě takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.

Poznámka 2.7. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $c(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{c}(s) = c(\phi(s))$ označovat jednoduše $c(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například c' místo $c'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 2.8. Pro derivace dvou parametrizací $c(t)$ a $c(s) = c(\phi(s))$ téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{c}|\ddot{c}|\ddot{\tilde{c}}) = (c'|c''|c''') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \ddot{\tilde{\phi}} \\ 0 & \dot{\phi}^2 & 3\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^3 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Přímý výpočet derivace složené funkce,

1.

$$\dot{c} = \frac{d}{ds}c(\phi(s)) = \frac{d}{dt}c(t)\frac{d\phi}{ds} = \dot{\phi}c'.$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \dot{\phi}c' \quad \Big| \frac{d}{ds} \\ \ddot{c} &= \ddot{\phi} \cdot c' + \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} \cdot c'' = \ddot{\phi} \cdot c' + (\dot{\phi})^2 \cdot c'' \end{aligned}$$

3.

$$\ddot{\tilde{c}} = \ddot{\tilde{\phi}} \cdot c' + \ddot{\phi} \cdot \dot{\phi} \cdot c'' + 2\dot{\phi} \cdot \ddot{\phi} \cdot c'' + (\dot{\phi})^2 \cdot \dot{\phi} \cdot c''' = \ddot{\tilde{\phi}} \cdot c' + 3\dot{\phi} \cdot \ddot{\phi} \cdot c'' + (\dot{\phi})^3 \cdot c'''$$

□

2.1 Rovinné křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této kapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v $\mathbb{R}^2$.

Definice 2.9. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.

Věta 2.10. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Důkaz. S využitím lemmatu 2.8

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{\|\dot{\phi}\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{\phi}) \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t).$$

Dále platí

$$\mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{n}_*(t).$$

Konečně

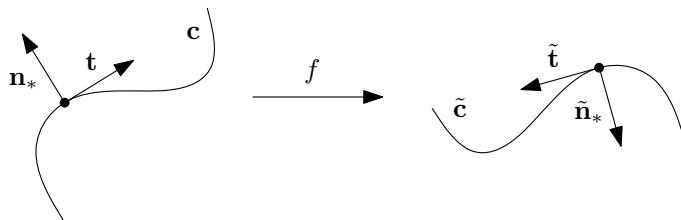
$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}\right]}{\|\dot{\phi}\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{\phi}) \frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{\phi})\kappa_z(t).$$

□

Věta 2.11. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z , $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})\mathbf{n}_*$.

Důkaz. Uvědomme si, že $\det A = \pm 1$. Navíc platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t).$$



Tedy

•

$$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{\det(A\mathbf{c}', A\mathbf{c}'')}{\|A\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\det(A) \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = (\det A) \kappa_z,$$

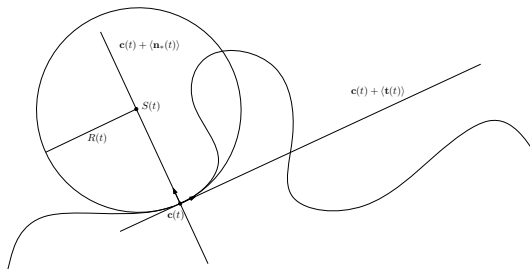
neboť pro libovolný vektor $\|v\| = \sqrt{v^T v} \Rightarrow \|Av\| = \sqrt{(Av)^T Av} = \sqrt{v^T A^T A v} = \sqrt{v^T v} = \|v\|$.

• $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{A\mathbf{c}'}{\|A\mathbf{c}'\|} = A\left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}\right) = A\mathbf{t}$

• $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\mathbf{t} = \det(A) A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \det(A) A\mathbf{n}_*.$

□

Definice 2.12. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}_*(t) \rangle$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.



Věta 2.13. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic).

Důkaz. Kontaktem myslíme nejvyšší možnou shodu derivace ve vhodné parametrizaci. Uvažujme tedy dvě křivky a nějakým způsobem sjednocené parametrizace (například obě obloukem) $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ a zajímá nás jejich kontakt v bodě t_0

- kontakt 0. řádu $\rightarrow \mathbf{c}_1(t_0) = \mathbf{c}_2(t_0)$
- kontakt 1. řádu $\rightarrow \mathbf{c}'_1(t_0) = \mathbf{c}'_2(t_0)$
- kontakt 2. řádu $\rightarrow \mathbf{c}''_1(t_0) = \mathbf{c}''_2(t_0)$

Díky lineární reparametrizaci postačí tuto vlastnost studovat v bodě $t = 0$ a díky shodnosti můžeme navíc předpokládat, že $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ a $\mathbf{c}'(0) = (c'_x(0), 0)$, kde $c'_x(0) > 0$. Máme tedy $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$ a $\mathbf{n}_*(0) = (0, 1)$. V tomto bodě uvažujme Taylorův rozvoj křivky

$$\mathbf{c}(t) = \left(c'_x(0)t + \frac{1}{2}c''_x(0)t^2 + o(t^2), \frac{1}{2}c''_y(0)t^2 + o(t^2) \right).$$

Dosazením do obecné rovnice přímky $Ax + By + C = 0$, pro $A \neq 0$ nebo $B \neq 0$ dostáváme:

$$C + Ac'_x(0)t + \left[\frac{1}{2}Ac''_x(0) + \frac{1}{2}Bc''_y(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Odtud vyvodíme, že pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit $C = 0$ a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí navíc platit $A = 0$, čímž dostáváme $By = 0$, tedy osu x a tím tečnou přímku a B musí být nenulové. Kontakt vyššího řádu není možný, neboť pro kontakt řádu 2 by $c''_y(0) = 0 \Rightarrow \kappa_z(0) = 0$, což je spor s předpokladem neinflexního bodu.

Dosazením do obecné rovnice kružnice $(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$ dostáváme:

$$(S_x^2 + S_y^2 - R^2) - 2S_x c'_x(0)t + \left[c'_x(0)^2 - 2S_x \frac{1}{2}c''_x(0) - 2S_y \frac{1}{2}c''_y(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Tedy pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit $R^2 = S_x^2 + S_y^2$ a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí platit $S_x = 0$. Pro kontakt řádu 2 (trojnásobný průsečík) pak $S_y = c'_x(0)^2 / c''_y(0) = 1 / \kappa_z(0)$, neboť

$$\kappa_z(0) = \frac{\begin{vmatrix} c'_x(0) & c''_x(0) \\ 0 & c''_y(0) \end{vmatrix}}{|c'_x(0)|^3} = c''_y(0) / c'_x(0)^2,$$

čímž dostáváme osculační kružnici. Kontakt vyššího řádu není obecně možný, neboť jsme vyčerpali všechny volné parametry. Může nastat pouze v případě, že $\kappa'_z(0) = 0$, tedy v kritickém bodě křivosti, například v jejím maximu. $\square$

Věta 2.14. Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa_z(t) \mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

Důkaz. Uvědomme si, že $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$. Derivováním a úpravami dostaneme

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right)' = \frac{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} \cdot \mathbf{c}'' - \frac{1}{2} \frac{2 \cdot \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''}{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}} \cdot \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} = \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3}.$$

Skalárním součinem předchozí rovnice získáme $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{t}' = 0$ a proto je $\mathbf{t}'$ násobkem $\mathbf{n}_*(t)$, tedy $\mathbf{t}' = K \mathbf{n}_*(t)$. Z rovností

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K \mathbf{n}_*(t)) = K \underbrace{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*(t))}_{=1} = K$$

a

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') &= \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) = \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) - \underbrace{\det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right)}_0 = \\ &= \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \cdot \frac{1}{\|\mathbf{c}'\|^2} = \underbrace{\frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3}}_{\kappa_z} \cdot \underbrace{\|\mathbf{c}'\|}_{=r} \end{aligned}$$

dostaneme, že $K = r \kappa_z$.

Funkce θ je spojitou verzí argumentu funkce $\mathbf{t}(t)$ a její existence a diferencovatelnost je známá z komplexní analýzy. $\mathbf{t}'(t) = \theta'(t) \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$ z předchozí části máme $\theta'(t) = r(t) \kappa_z(t)$. □

Věta 2.15. Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $k(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou podobnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = r(t), \quad \kappa_z(t) = f(t).$$

Důkaz. Zafixujme $t_0 \in I$ libovolné a definujme funkci $\theta(t)$ aby platilo

- $\theta'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| \cdot \kappa_z(t) = r(t) \cdot f(t)$, tedy θ nalezneme jako primitivní funkci k $r(t) \cdot f(t)$, která jistě existuje, protože $r(t) \cdot f(t)$ je hladká,
- $\theta(t_0) = \theta_0$, kde θ_0 je libovolná konstanta.

Nyní položíme

$$\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Zřejmě $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$ a můžeme tedy konečně definovat

$$\mathbf{c}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| \cdot \mathbf{t}(t) = r(t) \cdot (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

$\mathbf{c}(t)$ nalezneme jako primitivní funkci k $\mathbf{c}'(t)$, což lze, protože $\mathbf{c}'(t)$ je hladká funkce. Zvolíme $X, Y \in \mathbb{R}$ libovolná a necht' $\mathbf{c}_x(t_0) = X$ a $\mathbf{c}_y(t_0) = Y$.

V průběhu konstrukce funkce $\mathbf{c}(t)$ jsem volili polohu bodu $\mathbf{c}(t_0) = [X, Y]$ a směr tečného vektoru $\mathbf{t}(t_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, čímž jsme určili křivku jednoznačně až na přímou podobnost. □

2.2 Prostorové křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této kapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v $\mathbb{R}^3$.

Definice 2.16. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

Věta 2.17. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^3$ zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

Důkaz. Využijeme lemmatu 2.8 a označíme

$$M = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 & 3\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^3 \end{pmatrix}.$$

Dále spočítáme

$$\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}} = (\dot{\phi} \cdot \mathbf{c}') \times (\ddot{\phi}\mathbf{c}' + \dot{\phi}^2\mathbf{c}'') = (\dot{\phi} \cdot \mathbf{c}') \times (\ddot{\phi}\mathbf{c}') + (\dot{\phi} \cdot \mathbf{c}') \times (\dot{\phi}^2\mathbf{c}'') = 0 + \dot{\phi}^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'').$$

Nyní už máme vše potřebné k důkazu věty, a počítáme

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{|\dot{\phi}| \cdot \|\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{\phi}) \cdot \mathbf{t}(t), \\ \mathbf{b}(s) &= \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{|\dot{\phi}^3| \cdot \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \text{sign}(\dot{\phi}) \cdot \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{n}(s) &= \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{b}(t) \times \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t) = \mathbf{n}(t), \\ \kappa(s) &= \frac{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{|\dot{\phi}^3| \cdot \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{|\dot{\phi}|^3 \cdot \|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa(t), \\ \tau(s) &= \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|^2} = \frac{\det(M) \cdot \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{\dot{\phi}^6 \cdot \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \tau(t). \end{aligned}$$

□

Věta 2.18. Křivost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^3$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ , $\mathbf{t}$ a v neinflexním bodě navíc τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě křivost $\tilde{\kappa} = \kappa$ a tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$. V neinflexních bodech má navíc torzi $\tilde{\tau} = (\det \mathbf{A})\tau$, normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{A}\mathbf{n}$ a binormálový vektor $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{b}$.

Důkaz. Dokažme nejprve, že pro ortonormální matici $\mathbf{A}$ a libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ platí $\mathbf{A}\mathbf{x} \times \mathbf{A}\mathbf{y} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. Skutečně, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} \times \mathbf{A}\mathbf{y}) &= \det(\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^T \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^T \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \\ &= \det(\mathbf{A})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})) = \mathbf{z} \cdot (\det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})). \end{aligned}$$

Nyní už snadno ověříme dokazované vztahy. Platí totiž, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}''(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'''(t).$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}} &= \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \mathbf{A}\mathbf{t}, \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \frac{\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''}{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|} = \frac{\det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \det(\mathbf{A})\mathbf{b}, \\ \tilde{\mathbf{n}} &= \tilde{\mathbf{b}} \times \tilde{\mathbf{t}} = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}\mathbf{b} \times \mathbf{A}\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{n}, \\ \tilde{\kappa} &= \frac{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{|\det(\mathbf{A})| \cdot \|\mathbf{A}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa \end{aligned}$$

a konečně

$$\tilde{\tau} = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}' | \tilde{\mathbf{c}}'' | \tilde{\mathbf{c}}''')}{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|^2} = \frac{\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \det(\mathbf{A}) \cdot \tau.$$

□

Definice 2.19. Pro hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme v každém bodě *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle$,
- *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$,
- *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$.

Definice a lemma 2.20. O hladké parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \phi(s)$, $\phi(s) = \pm s + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Důkaz. Mějme libovolnou hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$. Pak platí, že $\|\mathbf{c}'(t)\| > 0$, což je jistě hladká funkce, a tudíž můžeme definovat

$$\psi(t) = \int \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pak tedy platí vztah $\psi(t)' = \|\mathbf{c}'(t)\|$. ψ je prostá, tudíž definujeme $\phi = \psi^{-1}$. Definujeme nyní $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, z čehož plyne

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi} \cdot \mathbf{c}' = \frac{1}{\psi'} \cdot \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \mathbf{t}.$$

Z toho ovšem plyne, že $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$, tedy jsme našli parametrizaci obloukem.

Předpokládejme nyní, že máme křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem a její obloukovou reparametrizaci $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$. Pak

$$1 = \|\dot{\mathbf{c}}\| = \|\mathbf{c}'\| \cdot |\dot{\phi}| = 1 \cdot |\dot{\phi}|,$$

tedy nutně $|\dot{\phi}| = 1 \Rightarrow \dot{\phi} = \pm 1 \Rightarrow \phi = \pm s + s_0$.

Naopak, měli bychom křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem, pak takovou reparametrizací $\phi(s) = \pm s + s_0$ opět dostaneme parametrizaci obloukem z výpočtu výše. $\square$

Lemma 2.21. Pro křivku hladkou $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a v každém neinflexním bodě navíc platí $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}''(t)\|}$ a $\kappa(t) = \|\mathbf{c}''(t)\| = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|$.

Důkaz. Mějme $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem. Zřejmě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$.

Ze vztahu $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ odvodíme

$$\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 1 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$2\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) = 0,$$

tedy $\mathbf{c}'(t) \perp \mathbf{c}''(t)$, čehož plyne, že $\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\| = \|\mathbf{c}'\| \cdot \|\mathbf{c}''\| = \|\mathbf{c}''\|$.

Nyní snadno spočítáme, že v neinflexních bodech

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \|\mathbf{c}''\|$$

a užitím Lemátka máme

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} \times \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \frac{1}{\|\mathbf{c}''\|} \cdot ((\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \times \mathbf{c}') = \frac{-1}{\|\mathbf{c}''\|} \cdot (\mathbf{c}' \times (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')) = \\ &= \frac{-1}{\|\mathbf{c}''\|} \cdot ((\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}'') = \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|}. \end{aligned}$$

$\square$

Věta 2.22 (Frenetovy vzorce). Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = (\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Důkaz. Uvažme tři vektory $(\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t))$, které závisí na parametru a pro jeho libovolnou hodnotu $t \in I$ tvoří ON bázi $\mathbb{R}^3$. Libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lze (pro pevné t) vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_3.$$

Tedy speciálně pro každé pevné t platí

$$\mathbf{v}'_i = (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_3, \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Zřejmě lze psát

$$(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) M,$$

kde M je matice 3×3 s položkami $m_{ji} = \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j$.

Protože platí $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, derivováním podle t dostáváme rovnost $\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_i = 0$, čili $\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j = -\mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_i$ a tedy M musí být antisymetrická

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A & -B \\ A & 0 & -C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}.$$

V našem případě, kdy $N(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ a t odpovídá parametrizaci obloukem platí podle Lemma 2.21

$$\mathbf{t}' = \mathbf{c}'' = \|\mathbf{c}''\| \cdot \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} = \kappa \mathbf{n},$$

a tedy dostáváme $A = \kappa, B = 0$. Snadno nahlédneme, že $C = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b}$, a tedy počítáme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} &= \left(\frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} \right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa} \right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \frac{\kappa \mathbf{c}''' - \kappa' \mathbf{c}''}{\kappa^2} \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot [\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')] = \frac{\det(\mathbf{c}''', \mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\kappa^2} = \frac{\det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \tau. \end{aligned}$$

Tudíž

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále přímým výpočtem za užití výše dokázaných vztahů mezi vektory Frenetova repéru a jejich derivacemi máme

$$\mathbf{d} \times \mathbf{t} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{t} = \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n} = \mathbf{t}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{n} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t} = \mathbf{n}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{b} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n} = \mathbf{b}'.$$

□

Poznámka 2.23. Vidíme tedy, že v parametrizaci obloukem (kdy se poloha bodu mění jednotkovou rychlostí) křivost vyjadřuje rychlost okamžité změny tečného vektoru (a tím i tečné přímky) a torze rychlost okamžité změny binormálového vektoru (a tím i oskulační roviny). Rovněž můžeme okamžitou změnu celého Frenetova repéru chápat jako rotaci kolem Darbouxova vektoru, jejíž rychlost je daná jeho délkou, tedy $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, které se někdy říká celková křivost.

Věta 2.24. Necht' $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I . Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Věta 2.25. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.

Důkaz.

- ($\implies$) Leží-li $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ v nějaké rovině, existují $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ taková, že $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ a pro všechna $t \in I$ je $pc_x(t) + qc_y(t) + rc_z(t) = s$, tedy $\mathbf{c} \cdot (p, q, r) = s$. Postupným derivováním podle t dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' \cdot (p, q, r) &= 0, \\ \mathbf{c}'' \cdot (p, q, r) &= 0, \\ \mathbf{c}''' \cdot (p, q, r) &= 0. \end{aligned}$$

Vektory $\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{c}'''$ všechny leží v prostoru $\langle (p, q, r) \rangle^\perp$ dimenze dva, takže jsou lineárně závislé. Z toho plyne rovnost $\det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''') = 0$ a tedy i $\tau = 0$.

- ($\Leftarrow$) BÚNO uvažujme $\mathbf{c}$ parametrizovanou obloukem. Je-li $\tau(t) = 0$ pro všechna $t \in I$, potom $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{b}$ je konstantní. Zvolme $t_0 \in I$ libovolné a definujme

$$\mathbf{h}(t) = (\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t), \quad t \in I.$$

Platí $\mathbf{h}(t_0) = 0$ a $\mathbf{h}' = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$, takže $\mathbf{h} = 0$, neboli $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}(t_0) \cdot \mathbf{b}$. Křivka tedy leží v rovině $\mathbf{c}(t_0) + \langle \mathbf{b} \rangle^\perp$. $\square$

Věta 2.26. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vnořenou do $\mathbb{R}^3$ zobrazením $(x, y) \rightarrow (x, y, 0)$ platí $\kappa = |\kappa_z|$ a v neinflexních bodech $\mathbf{n} = \text{sign}(\kappa_z) \mathbf{n}_*$.

Důkaz. Necht' $\mathbf{c} = (c_x, c_y) \equiv (c_x, c_y, 0)$. Snadno spočteme

$$\begin{aligned} \kappa_z &= \frac{\det \begin{pmatrix} c'_x & c''_x \\ c'_y & c''_y \end{pmatrix}}{(\sqrt{c'^2_x + c'^2_y})^3}, \\ \kappa &= \frac{\| (c'_x, c'_y, 0) \times (c''_x, c''_y, 0) \|}{(\sqrt{c'^2_x + c'^2_y + 0^2})^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0, 0, \det \begin{pmatrix} c'_x & c'_y \\ c''_x & c''_y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\|}{(\sqrt{c'^2_x + c'^2_y})^3} = |\kappa_z|. \end{aligned}$$

Dále v neinflexních bodech označme $\mathbf{t} = (t_x, t_y, 0)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_* &= (-t_y, t_x, 0), \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = (0, 0, \text{sign}(\kappa_z)), \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \text{sign}(\kappa_z)(-t_y, t_x, 0) = \text{sign}(\kappa_z) \mathbf{n}_*. \end{aligned}$$

$\square$

2.3 Křivkový integrál

Definice 2.27. Mějme hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a reálnou funkci f definovanou na $\langle \mathbf{c} \rangle$. Pak definujeme *Křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} f ds := \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.28. Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.

Důkaz. Ať $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ je hladká parametrická křivka v $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, $s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ je její reparametrizace a f je reálná funkce definovaná na $\langle \mathbf{c} \rangle$.

Rozlišíme dva případy a počítáme:

1. $\phi' > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(s)) \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\dot{\phi}(s) \mathbf{c}'(\phi(s))\| ds \\ &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\mathbf{c}'(\phi(s))\| \dot{\phi}(s) ds = \left| \begin{matrix} t = \phi(s) \\ dt = \dot{\phi} ds \end{matrix} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt. \end{aligned}$$

2. $\phi' < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(s)) \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\dot{\phi}(s) \mathbf{c}'(\phi(s))\| ds \\ &= - \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\mathbf{c}'(\phi(s))\| \dot{\phi}(s) ds = \left| \begin{matrix} t = \phi(s) \\ dt = \dot{\phi} ds \end{matrix} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti se mínus vykrátí s prohozením mezí.

□

Definice 2.29. Délku křivky definujeme jako integrál prvního druhu z konstantní jednotkové funkce

$$\ell(\mathbf{c}) := \int_{\mathbf{c}} 1 ds.$$

Definice 2.30. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta)$. Tuto křivku navíc nazveme *jednoduchou*, je-li $\mathbf{c}$ prosté na $[\alpha, \beta]$. Jednoduchá uzavřená rovinná křivka se rovněž nazývá *Jordanova*.

Věta 2.31 (Umlaufsatz). Je-li $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ hladká uzavřená křivka, pro kterou navíc $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$ (nazývané index křivky) takové, že

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds = 2k\pi.$$

Je-li navíc $\mathbf{c}$ jednoduchá a kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček), pak $k = 1$.

Důkaz. (Částečný.) Podle věty 2.14 existuje hladká funkce $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &= (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \\ \theta'(t) &= \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\|, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$

Z $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$ plyne $\theta(\beta) = \theta(\alpha) + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Tedy dostáváme

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds = \int_{\alpha}^{\beta} \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \theta'(t) dt = [\theta(t)]_{\alpha}^{\beta} = 2k\pi.$$

□

Definice 2.32. Mějme hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a zobrazení (vektorové pole) $\mathbf{F} : \langle \mathbf{c} \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pak definujeme *Křivkový integrál 2. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt,$$

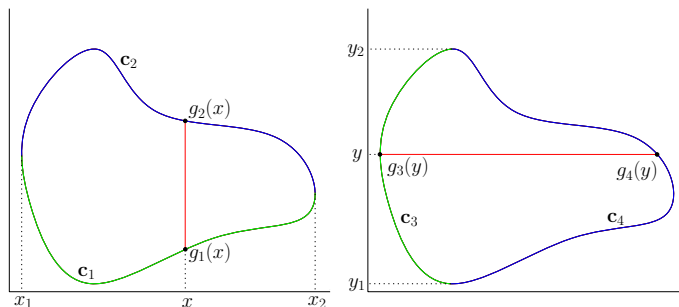
pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.33 (Greenova věta). Necht' $\mathbf{c}$ je jednoduchá, hladká, uzavřená, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v $\mathbb{R}^2$. Necht' $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí $\bar{\Omega}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Důkaz. (Náznak.) Větu dokážeme pro speciální případ křivky $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ze znění věty. Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ lze „rozdělit“ na dvě hladké křivky $\mathbf{c}_1(x) = (x, g_1(x))$, $\mathbf{c}_2 = (x, g_2(x))$, $x \in [x_1, x_2]$, kde $g_1, g_2 : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zobrazení splňující:

- $g_1(x_1) = g_2(x_1)$, $g_1(x_2) = g_2(x_2)$ (tedy $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta) = \mathbf{c}_1(x_1) = \mathbf{c}_2(x_1)$ a $\mathbf{c}(\gamma) = \mathbf{c}_1(x_2) = \mathbf{c}_2(x_2)$ pro nějaké $\gamma \in (\alpha, \beta)$),
- $g_1(x) < g_2(x)$, $x \in (x_1, x_2)$ (tedy $\mathbf{c}_1$ je „dolní část“ $\mathbf{c}$ a $\mathbf{c}_2$ „horní“, ovšem $\mathbf{c}_2$ je opačně orientovaná než skutečná příslušná část $\mathbf{c}$).



Symetricky budeme chtít, aby křivka mohla být rozdělena na „levou část“ $\mathbf{c}_3(y) = (g_3(y), y)$ a „pravou část“ $\mathbf{c}_4 = (g_4(y), y)$, $y \in [y_1, y_2]$ s analogickými vlastnostmi.

Pro hladké vektorové pole $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} &= \int_{\mathbf{c}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \\ &= \left(\int_{x_1}^{x_2} F_1(x, g_1(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} F_1(x, g_2(x)) dx \right) + \\ &\quad + \left(- \int_{y_1}^{y_2} F_2(g_3(y), y) dy + \int_{y_1}^{y_2} F_2(g_4(y), y) dy \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx + \int_{y_1}^{y_2} (-F_2(g_3(y), y) + F_2(g_4(y), y)) dy. \end{aligned}$$

Počítejme nyní (s využitím Fubiniho věty):

$$\begin{aligned}\int_{\text{Int } \mathbf{c}} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx.\end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_{\text{Int } \mathbf{c}} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} (-F_2(g_3(y), y) + F_2(g_4(y), y)) dy$$

Sečtení těchto dvou rovností dává Greenovu větu pro $\mathbf{c}$. □

Lemma 2.34. Buď $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), y_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná, hladká, jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti $\text{Int } \mathbf{c}$ je roven

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} c_x(t) c'_y(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} c_y(t) c'_x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (c_x c'_y - c'_x c_y) dt.$$

Důkaz. At' $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ je křivka ve znění věty. Dále mějme vektorové pole $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Pak z věty 2.33 dostáváme, že

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} 1 dx dy = A.$$

Také ovšem z definice můžeme psát

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\alpha}^{\beta} (0, c_x(t)) \cdot (c'_x(t), c'_y(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} c_x(t) c'_y(t) dt,$$

čímž dostáváme jednu z dokazovaných rovností. Zbylé rovnosti dostaneme analogicky volbou $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$, respektive $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$. □

Lemma 2.35 (Wirtinger). Necht' $f(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^{\pi} f'^2(t) dt \geq \int_0^{\pi} f^2(t) dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D \sin(t)$, kde D je konstanta.

Důkaz. Označme $g(t) = \frac{f(t)}{\sin t}$, $t \in (0, \pi)$, a (s využitím L'Hospitalova pravidla) spojitě dodefinujeme

$$\begin{aligned}g(0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = f'_+(0), \\ g(\pi) &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} g(t) = f'_-(\pi).\end{aligned}$$

Platí tedy $f(t) = g(t) \sin t$, $t \in [0, \pi]$ a můžeme počítat:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f'(t) dt &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t) + g(t) \cos(t))^2 dt \\
&= \int_0^\pi g'^2(t) \sin^2(t) dt + \int_0^\pi \underbrace{2g(t)g'(t)}_{(g^2(t))'} \sin(t) \cos(t) dt + \int_0^\pi g^2(t) \cos^2(t) dt \\
&= \int_0^\pi (g'(t) \cos(t))^2 dt + \underbrace{[g^2(t) \sin(t) \cos(t)]_0^\pi}_0 - \int_0^\pi g^2(t) (\cos^2(t) - \sin^2(t)) dt \\
&\quad + \int_0^\pi g^2(t) \cos^2(t) dt \\
&= \int_0^\pi (g'(t) \cos(t))^2 dt + \int_0^\pi \underbrace{(g(t) \sin t)^2}_{f(t)} dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt.
\end{aligned}$$

Rovnost zřejmě nastává právě pro g' nulovou, tedy $f(t) = D \sin(t)$ pro nějaké pevné $D \in \mathbb{R}$. $\square$

Věta 2.36 (Isoperimetrická nerovnost). Bud' $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ hladká jednoduchá uzavřená křivka délky l a bud' A plošný obsah $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A,$$

přitom rovnost nastane, právě když $\mathbf{c}$ je kružnice.

Důkaz. Mějme křivku ve znění věty a ať $\mathbf{c}(s)$ je její parametrizace obloukem. Pak $s \in [0, l]$ a $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$. Dále uijeme reparametrizace $t = \phi(s) = \frac{\pi s}{l}$, z čehož plyne, že $t \in [0, \pi]$ a tudíž pro rychlost platí $\|\mathbf{c}'(t)\| = \|(\phi^{-1})' \cdot \dot{\mathbf{c}}\| = \frac{l}{\pi}$. Navíc celou parametrizovanou křivku zobrazíme přímoú shodností tak, aby platilo $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(\pi) = [0, 0]$ a $\mathbf{c}'(0) = (c'_x, 0)$, kde $c'_x > 0$.

Nyní křivku vyjádříme v „polárních souřadnicích“:

$$\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

kde r, θ jsou hladké a r je kladná vyjma koncových bodů, ve kterých máme $r(0) = r(\pi) = 0$. Platí

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = \|\mathbf{c}'\|^2 = c_x'^2 + c_y'^2 = (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta)^2 = r'^2 + r^2\theta'^2,$$

z čehož plyne

$$\int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2) dt = \frac{l^2}{\pi}.$$

Z lemmatu 2.34 spočítáme plošný obsah oblasti $\text{Int } \mathbf{c}$ jako

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi (c_x c'_y - c_y c'_x) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (r \cos \theta (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta) - r \sin \theta (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta)) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \theta' dt.$$

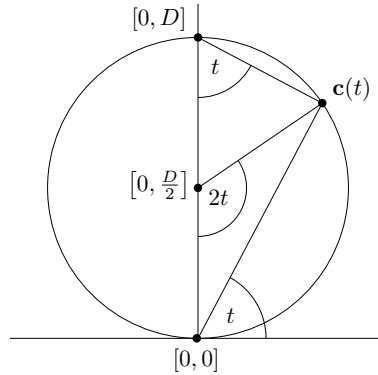
Můžeme tedy počítat:

$$\frac{l^2}{4\pi} - A = \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 + r^2 \theta'^2 - 2r^2 \theta') dt = \frac{1}{4} \int_0^\pi r^2 (\theta' - 1)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 - r^2) dt.$$

Pravá strana je ovšem nezáporná, neboť v prvním integrálu je mocnina a v druhém aplikujeme Lemma 2.35. Celkem tedy

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A.$$

Zároveň z obou integrálů vidíme, kdy nastane rovnost; v prvním právě tehdy, když $\theta = t$, a v druhém když $r = D \sin(t)$.



V tom případě po přechodu zpátky ke „kartézským souřadnicím“ a drobných úpravách dostáváme

$$\mathbf{c}(t) = \left(0, \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2}(\sin(2t), -\cos(2t)), \quad t \in [0, \pi],$$

takže jde o kružnici. □

3 Afinní prostory a zobrazení

Definice 3.1. Mějme vektorový prostor V dimenze n nad tělesem T . Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \rightarrow A$ nazveme *afinním prostorem se zaměřením V jestliže*

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{X} \in A : (\mathbf{X} \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \mathbf{X} \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
2. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A, \exists! \mathbf{v} \in V : \mathbf{X} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{Y}$, tento vektor značíme $\mathbf{v} = \mathbf{Y} \ominus \mathbf{X}$.

Prvky A nazýváme body afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme místo $\oplus$ psát obyčejné $+$ a místo $\ominus$ psát $-$.

Věta 3.2. Mějme afinní prostor A se zaměřením V , pak pro libovolné prvky $A, B, C, D \in A$; $u, v \in V$ platí

1. $A \oplus o = A$
2. $(B \ominus A) = -(A \ominus B)$
3. $(A \ominus B) + (B \ominus C) = A \ominus C$
4. $(A \oplus u) - (B \oplus v) = (A \ominus B) + (u - v)$
5. $(A \ominus B) + (C \ominus D) = (A \ominus D) + (C \ominus B)$

Důkaz.

1. Z druhého axiomu afinního prostoru víme:

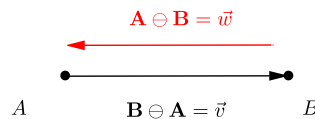
$$\begin{aligned} \exists! v \in V : A \oplus v &= A & / \oplus o \\ (A \oplus v) \oplus o &= A \oplus o \end{aligned}$$

Levou stranu upravíme pomocí prvního axiomu, vlastnosti přičítání nulového vektoru ve vektorovém prostoru a počátečního předpokladu.

$$(A \oplus v) \oplus o = A \oplus (v \oplus o) = A \oplus v = A$$

Čímž získáváme požadované tvrzení.

2. Označme $v = B \ominus A$ a $w = A \ominus B$.



Jsou to ty jednoznačně určené vektory, že

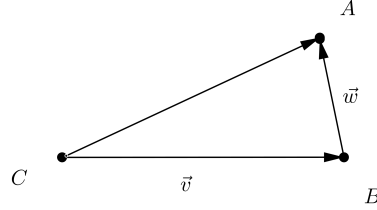
$$A \oplus v = B \quad B \oplus w = A.$$

K první rovnosti přičteme $\oplus w$ a dále upravíme.

$$\begin{aligned} (A \oplus v) \oplus w &= A \\ A \oplus (v + w) &= A \end{aligned}$$

Jelikož existuje právě jeden takový vektor pro každé A a o poslední rovnost splňuje, platí $v + w = o$, tedy $w = -v$.

3. Necht' $\mathbf{v} = \mathbf{B} \ominus \mathbf{C}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$.



Ukážeme, že následující výraz je roven $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{C} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{C} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}$$

Podobně bychom dokázali i zbylé formule.

□

Důsledek 3.3.

- Pro každé $\mathbf{X} \in A$ je zobrazení $\varphi_a : V \rightarrow A$ definované jako $\varphi_a(\mathbf{v}) = \mathbf{A} + \mathbf{v}$ bijekcí množin V a A .
- Pro každé $\mathbf{v} \in V$ je zobrazení $f_v : A \rightarrow A$ definované jako $f_v(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{v}$ bijekcí množiny A . Navíc zobrazení $\mathbf{v} \rightarrow f_v$ je vnořením aditivní grupy $(V, +)$ do grupy bijekcí (permutací) $(A, \circ)$.

Definice 3.4. *Soustavou souřadnic (nebo také repérem) v afinním prostoru A dimenze n rozumíme $(n + 1)$ -tici $S = (\mathbf{P}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, kde $\mathbf{P} \in A$ je bod nazývaný počátek a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze V . Pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem*

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B.$$

Jedná se tedy o jednoznačně určenou n -tici skalárů $(t_1, \dots, t_n)^T$ tak, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \dots + t_n \mathbf{u}_n.$$

Pro jednoduchost se i pro vektory dovoluje zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$.

Věta 3.5. Mějme v afinním prostoru A dvě soustavy souřadnic $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}_B)$ a $S' =$

$(\mathbf{P}', \underbrace{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n}_{B'})$. Pak pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ platí

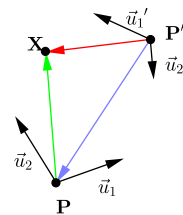
$$[\mathbf{X}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{X}]_S + [\mathbf{P}]_{S'}.$$

Zároveň pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ triviálně platí $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{v}]_S$.

Důkaz. Pro vektory dovoluujeme zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$ pro soustavu S a B bázi V , tedy také $[\mathbf{v}]'_S := [\mathbf{v}]'_B$. Ze znalosti přechodu mezi bázemi ve vektorových prostorech pak dostáváme $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{v}]_S$.

První část tvrzení spočteme přechodem do vektorového prostoru s využitím definice, převodem mezi bázemi zde a pak návratem k druhé soustavě souřadnic.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{X}]_{S'} &= [\mathbf{X} - \mathbf{P}']_{B'} = [(\mathbf{X} - \mathbf{P}) + (\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{B'} = \\
 &= [(\mathbf{X} - \mathbf{P})]_{B'} + \underbrace{[(\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{B'}}_{[\mathbf{P}]_{S'}} = \\
 &= [Id]_{B'}^B \underbrace{[\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B}_{[\mathbf{X}]_S} + [\mathbf{P}]_{S'}
 \end{aligned}$$



□

Definice a lemma 3.6. Pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \dots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ definujeme *afinní kombinaci* $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i$ jako bod

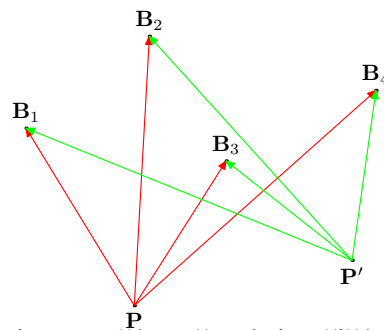
$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}), \quad (1)$$

kde $\mathbf{P}$ je libovolný bod a výraz (1) na jeho volbě nezáleží.

Důkaz. Mějme dva libovolné body $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}'$. Ukážeme, že se výraz (1) pro $\mathbf{P}'$ rovná tomu pro $\mathbf{P}$.

Přičteme výraz rovný dle bodu 2. Věty 3.2 nulovému vektoru a upravíme.

$$\begin{aligned}
 &\left[\mathbf{P}' + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') \right] + \underbrace{(\mathbf{P} - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P})}_{\mathbf{0}} = \\
 &= \mathbf{P}' + \left[\sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P} - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \right] =
 \end{aligned}$$



Podle druhého axiomu jsme mohli vektory v hranaté závorce nejprve sečíst, až pak je přičíst k bodu $\mathbf{P}'$. Dále z komutativity sčítání ve vektorovém prostoru máme:

$$= \underbrace{[\mathbf{P}' + (\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{\mathbf{P}}}_{\mathbf{P}} + \left[\sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \right] =$$

První člen je roven $\mathbf{P}$ z definice. Vektor $(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ vynásobíme c_i , jejichž součet je 1, a posčítáme. Poté sumy sloučíme, vytknutím c_i a použitím bodu 3. z Věty 3.2 získáme výsledek.

$$= \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) =$$

$$= \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P})] = \left[\mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}) \right]$$

□

Důsledek 3.7. Jestliže máme jakoukoliv soustavu souřadnic S , pak v ní vyjádříme afinní kombinaci $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i$ snadno jako $[\mathbf{X}]_S = \sum_{i=1}^k c_i [\mathbf{B}_i]_S$.

Důkaz. Necht' $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n}_B)$ je soustava souřadnic s počátkem souřadnic $\mathbf{P}$. Z minulé definice pro $\mathbf{X}$ platí (zvolili jsme $\mathbf{P}$ jako počátek souřadnic)

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}).$$

Vyjádříme $\mathbf{X}$ v soustavě S .

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B = \left[\sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}) \right]_B = \sum_{i=1}^k c_i [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P})]_B = \sum_{i=1}^k c_i [\mathbf{B}_i]_S$$

Použili jsme definici soustavy souřadnic pro vyjádření v B , zavedení $\mathbf{X}$, linearitu přechodu mezi bázemi vektorového prostoru a opět definici pro vyjádření výsledku v soustavě souřadnic S . □

Definice 3.8. O libovolných bodech $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou v *obecné poloze* právě tehdy, když vektory $(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)$ jsou lineárně nezávislé.

Definice a lemma 3.9. V afinním prostoru A dimenze n mějme $(n+1)$ bodů $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1}$ v obecné poloze. Pak lze každý bod $\mathbf{X} \in A$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1.$$

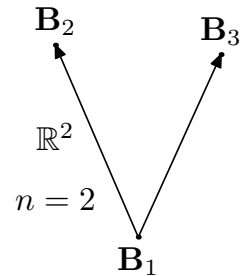
Posloupnost bodů $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1})$ nazýváme *barycentrická soustava souřadnic* a $(n+1)$ -tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ nazýváme *barycentrické souřadnice* bodu $\mathbf{X}$.

Důkaz. Mějme $\mathbf{X} \in A$. Označíme si $B = \{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_1)\}$.

Díky předpokladu obecné polohy je to lineárně nezávislá posloupnost n vektorů v prostoru dimenze n , tedy báze.

Vektor $\mathbf{X} - \mathbf{B}_1 \in V$ vyjádříme jednoznačně v bázi B (tedy $[\mathbf{X} - \mathbf{B}_1]_B$) pomocí koeficientů $c_2, \dots, c_{n+1}$. Navíc jelikož $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 = \mathbf{o}$, můžeme sumu sčítat od $i = 1$ a za c_1 zvolit libovolné číslo, aby rovnost platila.

$$(\mathbf{X} - \mathbf{B}_1) = \sum_{i=2}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1)$$



Vezmeme

$$c_1 = 1 - c_2 - \dots - c_{n+1}.$$

Pak je součet $c_1 + c_2 + \dots + c_{n+1} = 1$, jak jsme chtěli, a $\mathbf{X}$ odpovídá výrazu (1) z definice 3.6 pro volbu $\mathbf{P} = \mathbf{B}_1$. Získali jsme $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i$.

Nyní ukážeme jednoznačnost. Máme tuto afinní kombinaci, zvolíme $\mathbf{P} = \mathbf{B}_1$ ve výrazu (1). Pak platí $\mathbf{X} - \mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1)$. První vektor sumy je nulový, koeficienty c_i u ostatních jsou jednoznačně určeny, neboť ty vektory tvoří bázi, a c_1 je jejich doplněk do jedničky. $\square$

Důsledek 3.10. Jestliže $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ odpovídající barycentrické souřadnice bodu X , pak

$$S = (\mathbf{B}_1, (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1))$$

je afinní soustava souřadnic a $[\mathbf{X}]_S = (c_2, \dots, c_{n+1})^T$.

Poznámka 3.11. Jsou-li všechny složky barycentrických souřadnic bodu $\mathbf{X}$ nezáporné $c_i \geq 0$ (a v důsledku i $c_i \leq 1$), pak tuto kombinaci nazýváme *konvexní* a charakterizuje to, zda-li bod X leží v konvexním obalu bodů $\mathbf{B}_i$.

Definice 3.12. Necht' A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V . Afinní prostor B nad tělesem T se zaměřením W nazveme *afinní podprostor* prostoru A , pokud $B \subseteq A$, $W \leq V$ a sčítání bodu a vektoru v B je zúžením sčítání bodu a vektoru v A .

Věta 3.13. Necht' A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V , $\mathbf{X} \in A$ libovolný bod a $W \leq V$ libovolný vektorový podprostor. Pak množina

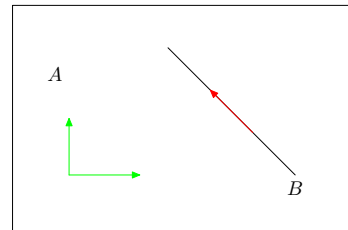
$$\mathbf{X} + W$$

je podprostor A a každý vektorový podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, který nazýváme *parametrické vyjádření*.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že je to afinní podprostor A . Je jasné, že se jedná o podmnožinu A a zaměřením W je podprostor V .

Nahlédneme, že množina $B = \mathbf{X} + W$ je afinním prostorem, ověřením dvou axiomů. Vlastnost sčítání z prvního axiomu se zdědí z celého prostoru. Ve druhém chceme dokázat

$$\forall \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in B, \exists! \mathbf{w} \in W : \mathbf{Y} + \mathbf{w} = \mathbf{Z}.$$



Existuje nejvýše jeden takový vektor $\mathbf{w}$, protože v celém V , odkud jsou i $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Z}$, je právě jeden. Ukážeme, že tento vektor je i ve W . Z popisu množiny B máme pro $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_2.$$

Chceme $(\mathbf{X} + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_2$, což splníme, když zvolíme $\mathbf{w} := \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$. Pak $\mathbf{w} \in W$, protože W je vektorový podprostor. Tedy popisovaná množina je afinní podprostor.

Nyní zbývá ukázat, že každý afinní podprostor B lze vyjádřit tímto způsobem. Stačí vzít libovolný bod $\mathbf{X} \in B$, pak $B = \mathbf{X} + W$, protože platí axiom, že do každého bodu $z B$ se dostaneme přičtením vektoru ze zaměření. $\square$

Definice 3.14. Necht' Z je neprázdná množina bodů afinního prostoru A . Afinním obalem množiny Z rozumíme množinu $AO(Z)$ všech afinních kombinací bodů $z Z$.

Věta 3.15. Pro každou konečnou neprázdnou množinu bodů je $AO(Z)$ afinním podprostorem. Každý afinní podprostor dimenze k lze vyjádřit jako afinní obal $(k + 1)$ bodů. Toto vyjádření nazýváme *bodové vyjádření*.

Důkaz. Označme $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_l)$. Pak body $\sum_{i=1}^l c_i \mathbf{B}_i$, kde $\sum_{i=1}^l c_i = 1$, tvoří množinu B všech těchto afinních kombinací, tedy $AO(Z)$. Každou takovou afinní kombinaci můžeme zapsat

$$\underbrace{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\sum_{i=2}^l c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1)}_{\in W},$$

kde lineární kombinace reprezentovaná sumou může být libovolná, c_i už nemusí mít součet 1, a $W = LO\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_l - \mathbf{B}_1)\}$. Tedy $LO(Z)$ lze vyjádřit jako $\mathbf{X} + W$ a dle Věty 3.13 je to afinní podprostor.

Naopak ukážeme, že každý afinní prostor dimenze k se dá vyjádřit jako AO $k + 1$ bodů. Provedeme stejnou úvahu opačně. Máme afinní prostor $B = \mathbf{X} + W$, označíme bázi W jako $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$. Pak $B = AO\{\underbrace{\mathbf{X}, \mathbf{X} + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{X} + \mathbf{w}_k}_{k+1 \text{ bodů}}\}$. $\square$

Věta 3.16. Mějme soustavu lineárních rovnic s maticí M typu $m \times n$ nad tělesem T a pravou stranou c . Pak její řešení $\{x : Mx = c\}$ tvoří afinní podprostor aritmetického afinního prostoru T^n . Navíc každý afinní podprostor T^n lze vyjádřit tímto způsobem. Toto vyjádření nazýváme *rovnicevé vyjádření*.

Důkaz (Částečný). Z lineární algebry víme, že množina řešení soustavy $Mx = c$ má tvar $x_1 + \ker M$ pro nějaké partikulární řešení x_1 . Dle Věty 3.13 je tedy tato množina afinním podprostorem.

Naopak ukážeme na příkladu postup, jak každý afinní podprostor T^n takto vyjádřit. Máme libovolný podprostor tvaru $\mathbf{X} + W$, tedy bod a bázi zaměření. Necht' je to takovýto podprostor:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Chceme, aby naše zaměření W bylo jádrem matice M , budeme tedy řešit homogenní soustavu, kde do řádků vložíme bázi prostoru, který máme.

$$W = LO \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Máme dva pivoty, dvě volné proměnné, tedy řešení bude mít dimenzi 2. (Obecně to 2 být nemusí.)

$$\text{Řešení: } LO \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vektory z báze řešení dáme do řádků matice M .

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ker M = W$$

Ještě určíme pravou stranu c tak, aby $\mathbf{X}$ byl řešením – jen dosadíme.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Získali jsme soustavu $Mx = c$, jejímž řešením je zadaný afinní podprostor, a jde to takto udělat vždy. $\square$

Definice 3.17. (Pod)prostor dimenze 0 je *bod*, (pod)prostor dimenze 1 se nazývá *přímka*, (pod)prostor dimenze 2 se nazývá *rovina*, podprostor dimenze $(n - 1)$ v prostoru dimenze n se nazývá *nadrovina*.

Definice 3.18. Necht' A je afinní prostor a $B = \mathbf{X} + U$, $C = \mathbf{Y} + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $U \leq W$ nebo $W \leq U$
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a množiny bodů mají neprázdný průnik $B \cap C$.
- *mimoběžné* pokud nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.

Poznámka 3.19. Aritmetický prostor $\mathbb{R}^n$ ve kterém uvažujeme standardní skalární součin se nazývá *Eukleidovský* prostor. S jeho pomocí můžeme definovat vzdálenosti a úhly podprostorů podobně jako v analytické geometrii.

Definice 3.20. Mějme afinní prostory A, B se zaměřenými V, W nad stejným tělesem T . Řekneme, že zobrazení $f : A \rightarrow B$ je *afinní*, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $B_1, \dots, B_k \in A$ a koeficienty $c_1, \dots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ platí

$$f\left(\sum_{i=1}^k c_i B_i\right) = \sum_{i=1}^k c_i f(B_i).$$

Definice a lemma 3.21. Mějme afinní prostory A, B se zaměřenými V, W nad stejným tělesem T a $f : A \rightarrow B$ afinní zobrazení. Definujeme zobrazení $\bar{f} : V \rightarrow W$ předpisem

$$\bar{f}(\mathbf{v}) = f(\mathbf{X} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{X}),$$

kde $\mathbf{X} \in A$ je libovolný bod. Tato definice na volbě bodu $\mathbf{X}$ nezávisí a navíc takto definované $\bar{f}$ je lineární a nazývá se asociovaný homomorfismus.

Důsledek 3.22. Obrazem afinního podprostoru v afinním zobrazení je opět afinní podprostor. Afinní zobrazení navíc zachovávají rovnoběžnost podprostorů.

Důsledek 3.23. Afinní zobrazení je injektivní, surjektivní či bijektivní právě tehdy když tuto vlastnost má asociovaný homomorfismus.

Věta 3.24. Afinní zobrazení $f : A \rightarrow A$ z afinního prostoru do sebe nazveme *afinita*, jestliže je bijektivní. Všechny afinity daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *afinní grupa*.

Důkaz. Protože je zobrazení f bijekcí, můžeme k němu nalézt inverzní zobrazení f^{-1} . Dále víme, že všechny bijekce na A tvoří grupu, neboť složení dvou bijekcí, stejně jako inverzní zobrazení k bijekci, je znovu bijekce. Proto nám stačí dokázat, že inverzní zobrazení k afinitě je afinita a složení dvou afinit zobrazení je také afinita.

Dokážeme nejprve, že inverzní zobrazení k afinitě je afinita.

Nechť $f : A \rightarrow A$ je afinita. Potom je f bijekcí a existuje inverzní zobrazení $f^{-1} : A \rightarrow A$.

V množině A nalezneme body $B'_1, B'_2, \dots, B'_k$ a k nim díky tomu, že zobrazení f a f^{-1} jsou bijektivní, tedy i prosté, nalezneme body $B_1, B_2, \dots, B_k$, takové, že platí $f(B_i) = B'_i$. Vezmeme libovolnou afinní kombinaci $X = \sum c_i \cdot B'_i$, kde $\sum c_i = 1$. Pomocí těchto koeficientů, nalezneme afinní kombinaci $Y = \sum c_i \cdot B_i$.

Pomocí předpokladu, že zobrazení f je afinní platí, že $f(Y) = X$. Platí tedy také, že $f^{-1}(X) = Y$. To ale znamená, že f^{-1} zobrazuje libovolnou afinní kombinaci prvků z množiny A na stejnou afinní kombinaci obrazů těchto prvků. Zobrazení f^{-1} je tedy afinní.

Nyní ukážeme, že složení afinních zobrazení zachovává afinní kombinace.

Znovu si určíme libovolné body $B_1, B_2, \dots, B_k$. Pro dvě afinní zobrazení $f^{-1} : A \rightarrow A$ a $g^{-1} : A \rightarrow A$, pro které platí $g(B_i) = B'_i$ a $f(B'_i) = B''_i$, kde $i \in \{1, \dots, k\}$. Pak pro libovolnou afinní kombinaci $X = \sum c_i \cdot B'_i$ platí:

$$f \circ g(X) = f\left(\sum c_i \cdot B'_i\right) = \sum c_i \cdot B''_i$$

□

Věta 3.25. Zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je afinní právě tehdy když má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice $n \times m$ a $\mathbf{p}$ je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ regulární.

Důkaz. Nejprve dokážeme první ekvivalenci. Předpokládejme, že f je afinní.

Označíme $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ nulový vektor. Potom pro každé $\mathbf{Y}$ platí

$$f(\mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) + \bar{f}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}),$$

kde $\bar{f}$ je asociovaný homomorfismus, tedy lineární zobrazení. Jeho matici označíme $\mathbf{A}$. Vektor $f(\mathbf{X})$ označíme $\mathbf{p}$.

$$f(\mathbf{Y}) = \mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{Y})$$

První implikace tedy platí.

Nyní budeme předpokládat, že zobrazení $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}.$$

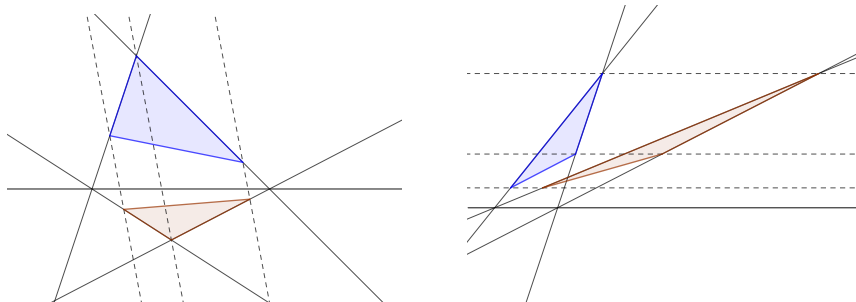
Potom pro každou afinní kombinaci z $\mathbb{R}^m$ platí

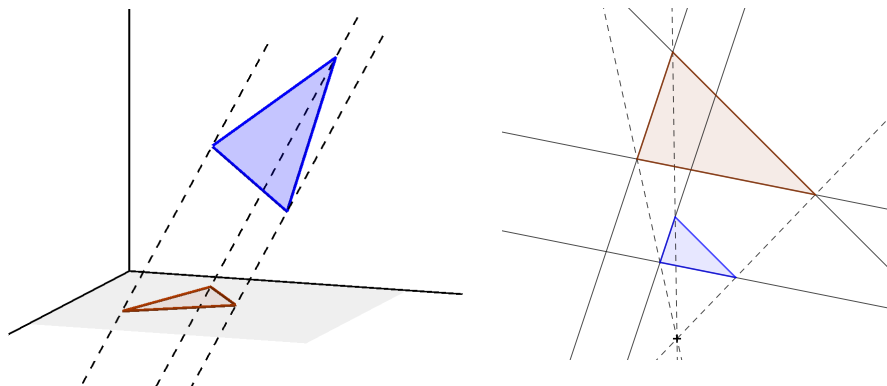
$$f\left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) + \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{A}\mathbf{B}_i + \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k (c_i \mathbf{A}\mathbf{B}_i + \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k c_i f(\mathbf{B}_i).$$

f je tedy afinní.

Afinní zobrazení je bijekcí právě tehdy když je odpovídající lineární zobrazení bijekcí. To nastane právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ čtvercová a regulární. Vektor $\mathbf{p}$ udává pouze posunutí, které je jakožto shodnost bijekcí.

Důsledek 3.26. Každá shodnost je afinitou. Dalšími příklady jsou projekce, stejnoolehlosti, podobnosti, osové afinity.





Definice a lemma 3.27. Mějme tři body A, B, X na afinní přímce nad tělesem T , přičemž $A \neq B$ a $X \neq B$. Pak dělicí poměr

$$\frac{AX}{XB} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(B - X) = (X - A)$. Potom platí, že X je afinní kombinací bodů A, B

$$X = \frac{1}{\lambda + 1}A + \frac{\lambda}{\lambda + 1}B$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice X v soustavě (A, B) , pak

$$\frac{AX}{XB} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Definice 3.28. Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho orientovaný obsah jako

$$S_{ABC} := \frac{1}{2} \det(B - A | C - A).$$

Věta 3.29. Afinity zachovávají dělicí poměry. Je-li f afinita v $\mathbb{R}^2$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = (\det \mathbf{A})S_{ABC}.$$

Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

Důkaz. Protože afinity zachovávají barycentrické souřadnice na přímce, zachovávají také dělicí poměr. Ten je s nimi přímo svázán.

Je-li f afinita s maticí tvaru $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak je $\mathbf{A}$ maticí asociovaného homomorfismu. $\mathbf{A}$ je regulární. f zobrazí vektory $B - A$ a $C - A$ na $\mathbf{A}(B - A)$ a $\mathbf{A}(C - A)$. Pro orientovaný obsah zobrazeného trojúhelníku tedy platí

$$\begin{aligned}
S_{f(A)f(B)f(C)} &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}(B-A)|\mathbf{A}(C-A)) \\
&= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}(B-A|C-A)) \\
&= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}) \det(B-A|C-A) \\
&= \det(\mathbf{A}) \frac{1}{2} \det(B-A|C-A) \\
&= \det(\mathbf{A}) S_{ABC}.
\end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

Věta 3.30. Necht' $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbf{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbf{R}^2$. Pak platí

1. Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) = 0$.
2. Obecněji platí $S_{PQR} = \det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) S_{ABC}$.

Důkaz. Nejprve dokážeme první tvrzení. Označíme

$$[P]_Z = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, [Q]_Z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, [R]_Z = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Vyjádříme si potřebný determinant pomocí těchto souřadnic a upravíme pomocí řádkových a sloupcových úprav.

$$\begin{aligned}
\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) &= \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} p_1 + p_2 + p_3 & q_1 + q_2 + q_3 & r_1 + r_2 + r_3 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (q_2 - p_2)(r_3 - p_3) - (q_3 - p_3)(r_2 - p_2)$$

Body P, Q, R můžeme vyjádřit takto

$$P = A + p_2(B - A) + p_3(C - A),$$

$$Q = A + q_2(B - A) + q_3(C - A),$$

$$R = A + r_2(B - A) + r_3(C - A),$$

a obsah trojúhelníku PQR takto

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \det(Q - P | R - P).$$

Obsah bude nulový právě tehdy když leží body P, Q a R na přímce.

Místo původních bodů můžeme dosadit předchozí vyjádření pomocí A, B, C . Dostáváme

$$\begin{aligned} S_{PQR} &= \frac{1}{2} \det(Q - P | R - P) = \\ &= \frac{1}{2} \det(A - A + (q_2 - p_2)(B - A) + (q_3 - p_3)(C - A) | A - A + (r_2 - p_2)(B - A) + (r_3 - p_3)(C - A)) = \\ &= \frac{1}{2} \det((q_2 - p_2)(B - A) + (q_3 - p_3)(C - A) | (r_2 - p_2)(B - A) + (r_3 - p_3)(C - A)) = \\ &= \frac{1}{2} \det(B - A | C - A) \cdot ((q_2 - p_2)(r_3 - p_3) - (q_3 - p_3)(r_2 - p_2)) \\ &= \frac{1}{2} \det(B - A | C - A) \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z), \end{aligned}$$

kde $\det(B - A | C - A) \neq 0$.

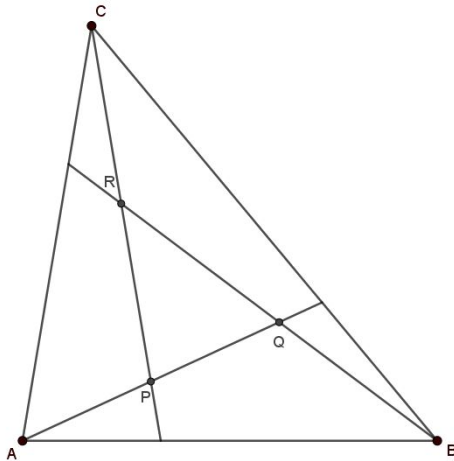
Ekvivalence tedy platí.

Zároveň víme

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \det(B - A | C - A)$$

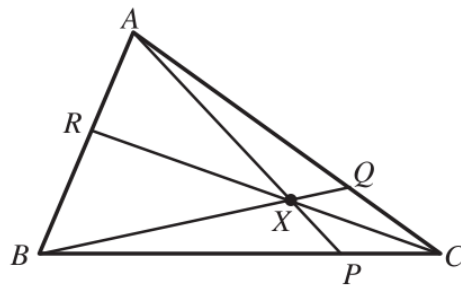
a platí tedy i druhé tvrzení.

Příklad 3.31. V libovolném trojúhelníku ABC ved' me z každého vrcholu spojnic do (vhodné) třetiny protilehlé strany. Průsečky těchto spojnic označme P, Q, R . Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je jedna sedmina obsahu ABC .

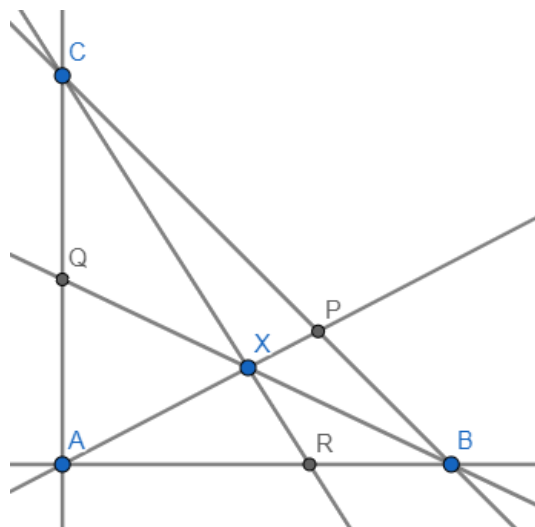


Věta 3.32 (Cevova věta). Mějme trojúhelník ABC a bod X , který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Důkaz. Protože víme, že afinní zobrazení zachovává dělicí poměry, můžeme říci, že hodnota dělicích poměrů ve znění věty se nezmění, pokud trojúhelník zobrazíme afinním zobrazením na $A = [0, 0]$, $B = [0, 1]$ a $C = [1, 0]$. Bude nám stačit dokázat tvrzení pro tento trojúhelník.



Označíme si souřadnice $X = [x, y]$. Nyní můžeme dopočítat souřadnice bodů P , Q a R . P je průsečíkem přímek AX a BC . Platí tedy $P = [\alpha x, \alpha y]$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\alpha x + \alpha y = 1$, tedy $\alpha = \frac{1}{x+y}$ a

$$P = \left[\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right].$$

R je průsečíkem CX a $y = 0$. Přímku CX dokážeme vyjádřit jako $[0, 1] + t(x, y - 1)$. Dosazením $t = \frac{1}{1-y}$ získáváme

$$R = \left[\frac{x}{1-y}, 0 \right].$$

Stejným způsobem dostaneme

$$Q = \left[0, \frac{y}{1-x} \right].$$

V tuto chvíli jsme schopni dopočítat dělicí poměry.

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{x}{1-y}}{1 - \frac{x}{1-y}} = \frac{\frac{x}{1-y}}{\frac{1-y-x}{1-y}} = \frac{x}{1-y-x}.$$

Protože se dělicí poměr zachovává i když ho počítáme jen pro jednu ze souřadnic, můžeme si vybrat, kterou do výpočtu dosadíme. Tentokrát budeme počítat pouze s první souřadnicí.

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{x}{x+y} - 1}{0 - \frac{x}{x+y}} = \frac{x - x - y}{-x} = \frac{y}{x}$$

V posledním případě budeme počítat podle druhé souřadnice, protože první souřadnice je nulová.

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\frac{y}{1-x} - 1}{0 - \frac{y}{1-x}} = \frac{y - 1 + x}{-y}$$

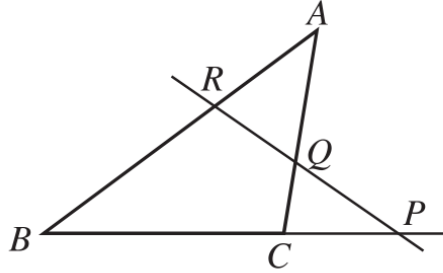
Po dosazení získáváme

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{x}{1-y-x} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{y+x-1}{-y} = 1.$$

Tím je důkaz dokončen.

Věta 3.33 (Menelaova věta). Mějme trojúhelník ABC a přímku p , která neprochází žádným z vrcholů a není rovnoběžná se žádnou se stran. Označme si $P = p \cap BC$, $Q = p \cap CA$ a $R = p \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$



Důkaz. Označme si dělicí poměry ve znění věty $\frac{AR}{RB} = \lambda_r$, $\frac{BP}{PC} = \lambda_p$ a $\frac{CQ}{QA} = \lambda_q$. Chceme vyjádřit body R , P a Q vzhledem k soustavě souřadnic $Z = (A, B, C)$. Z definice dělicího poměru plyne

$$R = \frac{1}{\lambda_r + 1}A + \frac{\lambda_r}{\lambda_r + 1}B$$

$$P = \frac{1}{\lambda_p + 1}B + \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 1}C$$

$$Q = \frac{1}{\lambda_q + 1}C + \frac{\lambda_q}{\lambda_q + 1}A$$

Z věty 3:30 víme, že body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\det([R]_Z|[P]_Z|[Q]_Z) = 0$. Vyjádříme si tedy tento determinant.

$$\begin{aligned} 0 = \det([R]_Z|[P]_Z|[Q]_Z) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_r+1} & \frac{\lambda_r}{\lambda_r+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_p+1} & \frac{\lambda_p}{\lambda_p+1} \\ \frac{\lambda_q}{\lambda_q+1} & 0 & \frac{1}{\lambda_q+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_r+1} \cdot \frac{1}{\lambda_p+1} \cdot \frac{1}{\lambda_q+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_p \\ \lambda_q & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(\lambda_r+1)(\lambda_p+1)(\lambda_q+1)} \cdot (1 + \lambda_r\lambda_p\lambda_q) \end{aligned}$$

Víme, že

$$\frac{1}{(\lambda_r+1)(\lambda_p+1)(\lambda_q+1)} \neq 0,$$

proto musí platit

$$1 + \lambda_r\lambda_p\lambda_q = 0$$

$$-1 = \lambda_r\lambda_p\lambda_q = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA}.$$

4 Projektivní geometrie

Definice 4.1. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $(n + 1)$ nad tělesem T . Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme projektivním prostorem dimenze n nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme projektivní body a odpovídající vektory $\mathbf{v}$ jejich vektorové zástupce. Zjevně, jestliže $\mathbf{v}$ je vektorovým zástupcem X , pak pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X .

Definice 4.2. Podmnožinu $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$ nazveme projektivním podprostorem dimenze k , jestliže existuje vektorový podprostor $V^{k+1} \leq V^{n+1}$ dimenze $(k + 1)$ tak, že

$$\mathbb{P}^k = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $(n - 1)$ nadrovina.

Definice 4.3. Mějme dva projektivní prostory $\mathbf{P}^m = \mathbf{P}(V^{m+1})$ a $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbf{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \rightarrow \mathbf{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \rightarrow V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

Poznámka 4.4. Omezení na podmnožinu A v definici 4.3 je nutné z toho důvodu, že když lineární zobrazení $\bar{F}$ není prosté, tak zobrazení F nemůže být definováno na bodech reprezentovaných vektory z $\ker \bar{F}$, neboť $LO\{\mathbf{0}\}$ není projektivní bod. Jestliže je $\bar{F}$ prosté, pak je F definováno na celém prostoru $\mathbb{P}^m$, v opačném případě na doplňku projektivního podprostoru (odpovídajícího $\ker \bar{F}$). Budeme studovat zejména projektivní zobrazení na témže prostoru (tedy $m = n$) generovaná regulárními lineárními zobrazeními na V^{n+1} .

Věta 4.5. Projektivní zobrazení $F : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ z afinního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení $\bar{F}$ jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

Důkaz. Necht' $\bar{F}$ je bijekce. Zvolme $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ z příslušného vektorového prostoru V^{n+1} a označme $X = LO\{\mathbf{v}\}, Y = LO\{\mathbf{w}\}$. Předpokládejme $F(X) = F(Y)$, z definice $\bar{F}$ plyne $LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\} = LO\{\bar{F}(\mathbf{w})\}$. Jelikož se rovnají lineární obaly, musí se generující vektory lišit pouze o nějaký nenulový násobek λ , tedy $\bar{F}(\mathbf{v}) = \lambda\bar{F}(\mathbf{w}) = \bar{F}(\lambda\mathbf{w})$, neboť $\bar{F}$ je lineární zobrazení. Díky

prostotě $\bar{F}$ máme $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ a nakonec $LO\{\mathbf{v}\} = LO\{\mathbf{w}\}$, neboli $X = Y$ a F je prosté. Z toho, že $\text{bar } F$ je surjektivní plyne, že v jeho obrazu jsou všechny vektory a tedy i všechny jednodimenzionální podprostory a tedy F je surjektivní.

Jestli-že naopak předpokládáme, že F je bijekce, pak musí být $\bar{F}$ prosté, protože jinak by F nebylo definováno pro lineární obaly vektorů z $\text{Ker } \bar{F}$. Ze surjektivity F pak plyne, že pro libovolné $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ musí existovat $\lambda \neq 0$ takové, že $\lambda \mathbf{v} \in \text{Im } \bar{F}$ a z linearit je i $\mathbf{v} \in \text{Im } \bar{F}$.

Projektivní transformace F tvoří grupu, protože skládání, identita a braní inverzního zobrazení odpovídají těmto operacím pro bijektivní lineární zobrazení $\bar{F}$.¹ $\square$

Definice a lemma 4.6. Mějme vektorový prostor V dimenze $n + 1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor $\mathbb{P}_n$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru $\mathbb{P}_n$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}_n$ pak rozumíme uspořádanou $n + 1$ -tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})$ takovou, že

$$X = LO\left\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i\right\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(c_1, \dots, c_{n+1})$ a $(\lambda c_1, \dots, \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X . Proto se těmto souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu \mathbf{v}_1, \dots, \mu \mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

Definice 4.7. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1} , pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO\left\{\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i\right\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(t_1, \dots, t_{k+1})$ a $(\lambda t_1, \dots, \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X .

Definice 4.8. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T . Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární formy $\ell \in V_*^{n+1}$:

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme *rovnicevé vyjádření nadroviny*. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda \ell$ tutéž nadrovinu. Všechny nadroviny v prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$ tedy odpovídají bodům v duálním projektivním prostoru $\mathbb{P}(V_*^{n+1})$. Je-li $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ soustava projektivních souřadnic, pak duální bázi $(\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_{n+1}^*)$ nazveme *duální soustavou souřadnic* a příslušné souřadnice označujeme hvězdičkou.

Příklad 4.9 (Výpočty v projektiní rovině.). V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C = (0, 1, 1)$, $D = (5, 2, 1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

¹Obě grupy však nejsou isomorfní, protože $\bar{F}$ a $\lambda \bar{F}$ odpovídá stejnému projektivnímu F . Lineární zobrazení tvoří tak zvanou obecnou lineární grupu $GL(n + 1)$, zatímco projektivní transformace tak zvanou projektivní grupu $PGL(n) = GL(n + 1)/T^*$, kde T^* označuje multiplikativní grupu nenulových skalárů.

Věta 4.10. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n + 2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned}$$

Důkaz. Body $X_1, \dots, X_{n+1}$ lze vyjádřit jako $X_1 = LO\{\mathbf{v}_1\}, X_2 = LO\{\mathbf{v}_2\}, \dots, X_{n+1} = LO\{\mathbf{v}_{n+1}\}$, kde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1} \in V^{n+1}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Označme $B_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ bázi prostoru V^{n+1} . Souřadnice bodu X_i vzhledem k soustavě projektivních souřadnic C prostoru $\mathbb{P}^n$ budeme značit $[X_i]_C$. Pak máme

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_1} &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_1} &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Uvažujme $[X_{n+2}]_{B_1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$. Všechna čísla c_i jsou nenulová, jinak by totiž X_{n+2} ležel v nějaké nadrovině společně s n body X_i , a to je spor s předpoklady věty. Položme $B_2 = (c_1\mathbf{v}_1, c_2\mathbf{v}_2, \dots, c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1})$ projektivní soustavu souřadnic. Pak ale můžeme zapsat

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_2} &= (c_1^{-1}, 0, \dots, 0, 0) = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_2} &= (0, c_2^{-1}, \dots, 0, 0) = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_2} &= (0, 0, \dots, c_n^{-1}, 0) = (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_2} &= (0, 0, \dots, 0, c_{n+1}^{-1}) = (0, 0, \dots, 0, 1) \\ [X_{n+2}]_{B_2} &= (1, 1, \dots, 1, 1), \end{aligned}$$

jelikož souřadnice bodu projektivního prostoru vynásobené nenulovou konstantou určují stejný bod. $\square$

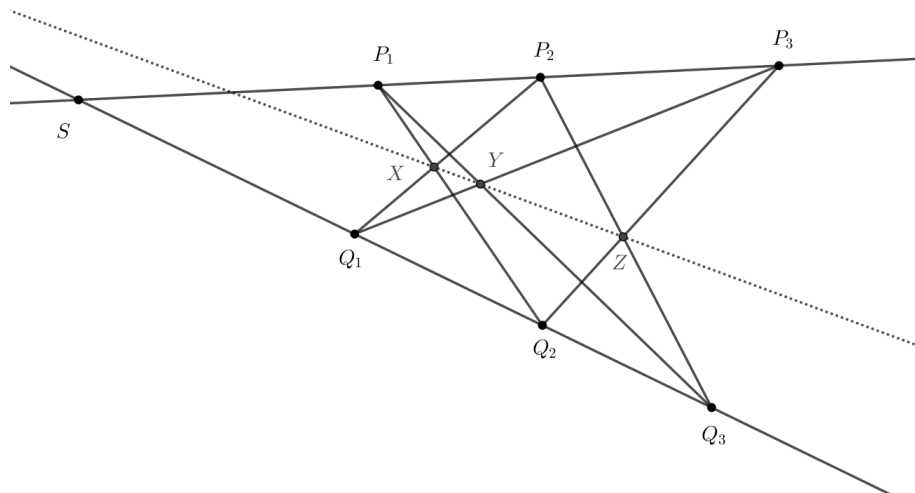
Důsledek 4.11. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n + 2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině a také $n + 2$ bodů $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \quad i = 1, \dots, (n + 2).$$

Věta 4.12 (Pappova věta). V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dvě přímky p, q , které se protínají v bodě S . Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S . Podobně na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S . Pak platí, že body

$$X := \overleftrightarrow{P_1Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_1}, \quad Y := \overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}, \quad Z := \overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$$

leží na přímce.



Důkaz. Nejprve si všimneme, že bod X neleží na přímce P_1Q_1 , protože pak by body P_1 a P_2 splývaly. Podle věty 4.10. můžeme zvolit soustavu projektivních souřadnic tak, že $S = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$, $Q_1 = (0, 0, 1)$ a $X = (1, 1, 1)$. Popis přímky $\overleftrightarrow{SP_1}$ získáme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neboli $\overleftrightarrow{SP_1} = (0, 0, 1)^*$. Podobně získáme $\overleftrightarrow{SQ_1} = (0, 1, 0)^*$, $\overleftrightarrow{P_1X} = (1, 0, -1)^*$ a $\overleftrightarrow{Q_1X} = (1, -1, 0)^*$. Body P_2, Q_2 spočítáme jako průniky přímk $\overleftrightarrow{Q_1X}$ a $\overleftrightarrow{SP_1}$, respektive $\overleftrightarrow{P_1X}$ a $\overleftrightarrow{SQ_1}$. To odpovídá řešení soustav

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy $P_2 = (1, 1, 0)$, $Q_2 = (1, 0, 1)$. Bod P_3 leží na přímce $\overleftrightarrow{SP_1}$, lze ho tedy zapsat jako lineární kombinaci $t_1S + t_2P_1$. Oba tyto koeficienty musí být zřejmě nenulové, jinak by P_3 splýval s S nebo P_1 . Můžeme proto položit $P_3 = t_1(1, 0, 0) + t_2(0, 1, 0) = (t_1, t_2, 0) = (1, \alpha, 0)$, kde $\alpha = \frac{t_2}{t_1}$. Stejnou úvahou dostaneme $Q_3 = (1, 0, \beta)$. Nyní spočteme $\overleftrightarrow{P_3Q_1} = (\alpha, -1, 0)^*$, $\overleftrightarrow{P_3Q_2} = (-\alpha, 1, \alpha)^*$, $\overleftrightarrow{P_1Q_3} = (\beta, 0, -1)^*$ a $\overleftrightarrow{P_2Q_3} = (-\beta, \beta, 1)^*$. Pomocí soustav

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} -\beta & \beta & 1 \\ -\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

které odpovídají hledání průniku $\overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}$ a $\overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$, spočteme $Y = (1, \alpha, \beta)$ a $Z = (\alpha\beta - 1, \alpha\beta - \alpha, \alpha\beta - \beta)$. To, že body X, Y, Z leží na jedné přímce ověříme výpočtem determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \alpha\beta - 1 & \alpha\beta - \alpha & \alpha\beta - \beta \end{vmatrix}.$$

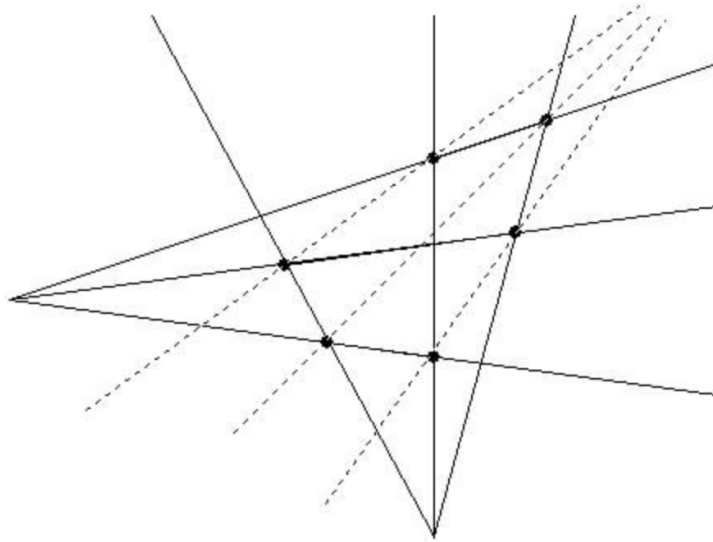
Třetí řádek je $\alpha\beta$ -násobek prvního řádku minus druhý řádek, takže determinant je nulový a body X, Y, Z skutečně leží na jedné přímce. $\square$

Věta 4.13 (Princip duality). Jestliže v projektivní rovině platí věta, ve které se vyskytují pouze přímky, body, jejich průsečíky, spojení a vlastnost "ležet na", pak platí i věta duální, t.j. ve které nahradíme přímky body, body přímkami, průsečík spojením, spojení průsečíkem a "ležet na" nahradíme "procházet".

Věta 4.14 (duální k Pappově). V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dva body P, Q , které leží na přímce s . Bodem P prochází přímky p_1, p_2, p_3 různé navzájem a různé od s . Podobně bodem Q prochází přímky q_1, q_2, q_3 různé navzájem a různé od S . Pak platí, že se přímky

$$x := \overleftrightarrow{(p_1 \cap q_2)(p_2 \cap q_1)}, \quad y := \overleftrightarrow{(p_1 \cap q_3)(p_3 \cap q_1)}, \quad z := \overleftrightarrow{(p_2 \cap q_3)(p_3 \cap q_2)}$$

protínají v jednom bodě.



Definice a lemma 4.15. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem různé body A, B, C, D , které leží na jedné projektivní přímce. Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a necht' platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definuji *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců.

Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Jestliže $(A, B, C, D) = -1$ řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*. Pak ovšem harmonickou čtveřici tvoří i body v pořadí (B, A, C, D) , (A, B, D, C) , (B, A, D, C) , (C, D, B, A) , (C, D, A, B) , (D, C, A, B) , (D, C, B, A) .

Věta 4.16. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestliže je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

Důkaz. Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou vektoroví reprezentanti bodů A, B, C, D a dále necht'

$$\mathbf{c} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}$$

$$\mathbf{d} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.$$

Pak platí

$$F(C) = \bar{F}(\mathbf{c}) = \bar{F}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_1 \bar{F}(\mathbf{b})$$

$$F(D) = \bar{F}(\mathbf{d}) = \bar{F}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_2 \bar{F}(\mathbf{b}),$$

kde $\bar{F}$ je lineární zobrazení příslušné F . Vektory $\bar{F}(\mathbf{a}), \bar{F}(\mathbf{b}), \bar{F}(\mathbf{c})$ a $\bar{F}(\mathbf{d})$ reprezentují body $F(A), F(B), F(C)$ a $F(D)$. Vidíme, že F zachovává koeficienty lineární kombinace, a proto se dvojpoměr nezmění. $\square$

Definice 4.17. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1} . Neprázdnou množinu

$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme regulární, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnotu $n + 1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

Věta 4.18. Každá regulární kuželosečka v reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \quad (\text{nepřímková kvadrika})$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \quad (\text{přímková kvadrika}).$$

Důkaz. Mějme nějakou regulární kvadriku Q v $\mathbb{P}^2$ danou kvadratickou formou q s maticí B . Jelikož nenulový násobek q určuje stejnou formu, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice B má signaturu $(0, 3, 0)$, nebo $(0, 2, 1)$, tj. pozitivní index setrvačnosti je větší než negativní index setrvačnosti. Nulita musí být 0, jinak B nemůže být regulární matice. Příklad $(0, 3, 0)$ však není možný, protože to určuje pozitivně definitní formu, takže kvadrika Q by byla prázdná. B má tedy signaturu $(0, 2, 1)$. Existuje proto matice P taková, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^T B P$$

Takovou matici P získáme metodou symetrických úprav. Označme K kvadriku $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Bod $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2$ náleží K právě když

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3) P^T B P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Z toho ale plyne, že $PX \in Q$. Dostáváme ekvivalenci $X \in K \Leftrightarrow PX \in Q$. Matice P je regulární a určuje tedy projektivní transformaci. Kuželosečku Q tak dostaneme zobrazením bodů na K pomocí matice P . Podobnou úvahou použitou na případ $\mathbb{P}^3$ dostaneme, že B by měla signaturu $(0, 3, 1)$ nebo $(0, 2, 2)$ a opět by šla získat jako projektivní transformace kuželosečky $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ nebo kuželosečky $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$. $\square$

Definice a lemma 4.19. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a necht' b je příslušná symetrická bilineární forma (tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$). Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou polárně sdružené, jestliže $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Lemma 4.20 (O polaritě). Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q . Pak

1. Množina bodů sdružených s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ je nadrovina, kterou nazveme *polára* k X a označíme p_X .
2. Každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím *pólem*.
3. Pro libovolné dva body X, Y platí

$$X \in p_Y \Leftrightarrow Y \in p_X.$$

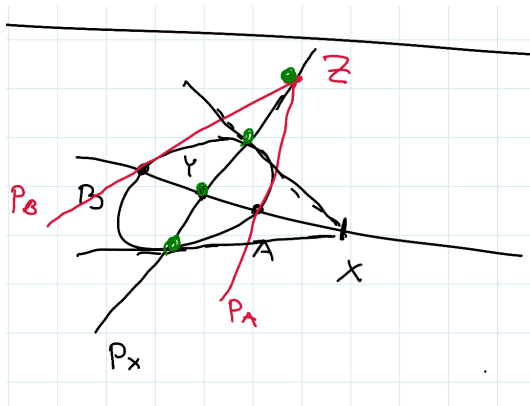
4. Bod je X sdružen sám se sebou (nebo-li leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q . V takovém případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X .

Důkaz. Zvolme bázi prostoru V^{n+1} a označme B matici kvadriky Q vzhledem k této bázi.

1. Zvolme $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{P}^n$. Polára k X má duální souřadnice $B \cdot X = B \cdot (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})^T$. Dle předpokladu je B regulární matice, tedy $B \cdot X$ má nenulové duální souřadnice, a proto skutečně tvoří nadrovinu.
2. Vezměme nějakou nadrovinu $(p_1, \dots, p_{n+1})^* \in \mathbb{P}^n$. Ke každé takové rovině můžeme díky regularitě B najít $Y \in \mathbb{P}^n$ takové, že $(p_1, \dots, p_{n+1})^* = B \cdot Y$. Pak $Y = B^{-1} \cdot (p_1, \dots, p_{n+1})^T$, Y je tedy určené jednoznačně.
3. Polára k bodu X je množina bodů polárně sdružených s X . Uvažujeme-li první implikaci, pak speciálně X je polárně sdružený s Y . Podle definice 4.19 je pak zřejmě i Y polárně sdružený s X , a tedy $Y \in p_X$. Druhá implikace je stejná.
4. Je-li X sdružen sám se sebou, musí platit podle definice 4.19 $X^T B X = 0$. To ale nastává právě tehdy když $X \in Q$.

Lemma 4.21. Mějme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v něm regulární kvadriku Q . Pak

1. Jestliže A, B jsou dva různé body na Q , pak se tečny p_A, p_B protínají v pólu přímky $\overleftrightarrow{AB}$.
2. Pro libovolnou přímku p platí, že $Q \cap p$ je prázdná, jednoprvková nebo dvouprvková množina a všechny tyto případy nastávají. Jeden průsečík mají právě tečny ke Q .
3. Každým bodem X prochází 0, 1 nebo 2 tečny ke Q a všechny tyto případy nastávají. Jedna tečna prochází bodem X právě tehdy, když $X \in Q$ a je to polára p_X .
4. Na každé přímce existují body, kterými procházejí dvě tečny.
5. Mějme přímku p , která není tečnou ke Q a $X \in p$. Pak existuje právě jeden $Y \in p$ tak, že X a Y jsou polárně sdružené. Jestliže navíc $X \notin Q$, pak platí $X \neq Y$.
6. Mějme přímku p , která protíná Q ve dvou různých bodech A, B . Necht' $X \in p$ různé od A, B a necht' $Y = p_X \cap p$. Pak (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici. Navíc se přímky p_A, p_B a p_X protínají v jednom bodě, který je pólem přímky p .



Důkaz. Každou kvadriku lze získat projektivní transformací kuželosečky $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Počty průsečíků se při projektivní transformaci nezmění, stačí tedy dokázat tvrzení pro kuželosečku $Q : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

1. Označme X průsečík tečen p_A, p_B a najděme jeho poláru p_X . Jelikož $X \in p_A$ a $X \in p_B$, platí podle bodu 3 lematu 4.20 $A \in p_X$ a $B \in p_X$. Dostaneme $p_X = \overleftrightarrow{AB}$ a bod X je skutečně pólem této přímky.
2. Parametrizujeme kuželosečku Q pomocí zobrazení

$$\phi(t, s) = (s^2 - t^2, 2ts, s^2 + t^2).$$

Dosazením bodu $(x_1, x_2, x_3) = (s^2 - t^2, 2ts, s^2 + t^2)$ do rovnice kuželosečky dostaneme, že toto zobrazení zobrazuje bod (t, s) projektivního prostoru $\mathbb{P}^1$ na kuželosečku Q , která je podmnožinou $\mathbb{P}^2$. Ověříme, že ϕ je dobře definované a bijekce. Definujme $\phi^{-1} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1 + x_3)$. Toto zobrazení je dobře definováno až na bod $(-1, 0, 1)$, který se zobrazuje na $(0, 0)$. Platí pro $s \neq 0$

$$(\phi^{-1} \circ \phi)(t, s) = (2st, s^2 - t^2 + s^2 + t^2) = 2s(t, s) = (t, s).$$

Dodefinujeme proto $\phi^{-1}(-1, 0, 1) = (1, 0)$. Pro $s = 0$ pak totiž máme $(\phi^{-1} \circ \phi)(t, 0) = \phi^{-1}(-t^2, 0, t^2) = (t^2, 0) = (1, 0)$, protože ϕ^{-1} zobrazuje mezi projektivními prostory $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{P}^1$. Zřejmě i $t \neq 0$. Celkově je zobrazení $\phi^{-1} \circ \phi$ identita na $\mathbb{P}^1$, tedy ϕ je prosté. Dále

$$\begin{aligned} (\phi \circ \phi^{-1})(x_1, x_2, x_3) &= ((x_1 + x_3)^2 - x_2^2, 2(x_1 + x_3)x_2, (x_1 + x_3)^2 + x_2^2) = \\ &= (2(x_1 + x_3)x_1 - (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2), 2(x_1 + x_3)x_2, 2(x_1 + x_3)x_1 + (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)). \end{aligned}$$

Jelikož bereme (x_1, x_2, x_3) na kuželosečce Q , platí $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Dostaneme

$$(\phi \circ \phi^{-1})(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 + x_3)(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

, kde $x_1 \neq -x_3$. V případě $x_1 = -x_3$ dosazením do kuželosečky dostaneme $x_2 = 0$. Tento případ jsme vyřešili dodefinováním ϕ^{-1} v bodě $(-1, 0, 1)$. Takže ϕ je prosté i na, tedy bijekce. Nyní dosadíme parametrizaci $\phi(t, s) = (s^2 - t^2, 2ts, s^2 + t^2)$ do nějaké přímky $p : p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0$. Získáme

$$\begin{aligned} 0 &= p_1(s^2 - t^2) + p_2(2st) + p_3(s^2 + t^2) = \\ &= t^2(-p_1 + p_3) + st(2p_2) + s^2(p_1 + p_3) \end{aligned}$$

Zobrazme nejdříve $(t, s) = (1, 0)$, ten odpovídá bodu $\phi(1, 0) = (-1, 0, 1)$ na kuželosečce. Dosazením dostaneme $0 = t^2(-p_1 + p_3)$, to nastává právě když $p_1 = p_3$. Opět dosadíme do rovnice výše abychom získali $0 = st(2p_2) + s^2(2p_1) = s(tp_2 + sp_1)$. To má dvě řešení $s = 0$ a $s = -p_2, t = p_1$. V případě $p_2 \neq 0$ protíná přímka p kuželosečku ve 2 bodech $(1, 0)$ a $\phi(p_1, -p_2)$, jinak je to tečna v bodě $(-1, 0, 1)$.

Nyní případ $s \neq 0$, pak $(t, s) = (\alpha, 1)$ položením $\alpha = \frac{t}{s}$. Dosadíme a dostaneme $\alpha^2(-p_1 + p_3) + \alpha(2p_2) + (p_1 + p_3) = 0$. To je kvadratická rovnice v proměnné α a s diskriminantem $D = 4(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)$. V závislosti na D dostaneme 2, 1, nebo žádný průsečík.

3. Zvolme nějaký bod X . Dle předchozího bodu jeho polára protíná kuželosečku ve 2, 1, nebo 0 bodech. Počet těchto průsečíků odpovídá počtu tečen vedených z X na kuželosečku. Polára k $X = (x_1, x_2, x_3) \in Q$, tj. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, je $(x_1, x_2, -x_3)^*$. Dosazením poláry do diskriminantu v důkazu předchozího bodu dostaneme $D = 4(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = 0$, takže je tečnou ke kuželosečce Q .
4. Na nějaké přímce $p = (p_1, p_2, p_3)^*$ zvolme bod $X = (-p_2, p_1, 0)$. Platí $p_X = (-p_2, p_1, 0)^*$. Jako v důkazu druhého bodu dosadíme do diskriminantu a spočteme $D = 4(p_1^2 + p_2^2) > 0$, neboli polára má dva průsečíky s Q a existují 2 tečny vedené z X . Je-li $p_1 = p_2 = 0$, pak zvolíme $X = (1, 0, 0)$ s polárou $(1, 0, 0)^*$, ten leží na p a diskriminant bude také kladný.
5. Y musí ležet na poláře p_X . Je-li $p_X = p$, pak $X \in p_X$, z toho by ale plynulo, že p_X je tečnou, což je spor s předpokladem. Existuje tedy právě jeden průsečík p s p_X , a to je Y . Pokud $X \notin Q$, pak polára neprochází X a $X \neq Y$.
6. Označme b symetrickou bilineární formu příslušnou kvadrice Q . Necht' $X = LO(\mathbf{x})$, $Y = LO(\mathbf{y})$. Body A, B leží na přímce $\overleftrightarrow{XY}$, takže je lze psát jako $A = LO(\alpha_1 \mathbf{x} + \beta_1 \mathbf{y})$, $B = LO(\alpha_2 \mathbf{x} + \beta_2 \mathbf{y})$. Koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ jsou nenulové, jinak by některé body mohly splývat. Bod Y je polárně sdružený s X , platí proto $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Díky vlastnostem bilineární formy platí

$$\begin{aligned}
0 &= b(\alpha_1 \mathbf{x} + \beta_1 \mathbf{y}, \alpha_1 \mathbf{x} + \beta_1 \mathbf{y}) = \\
&= \alpha_1^2 \cdot b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\alpha_1 \beta_1 \cdot \underbrace{b(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=0} + \beta_1^2 \cdot b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\
&= \alpha_1^2 \cdot b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \beta_1^2 \cdot b(\mathbf{y}, \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Stejným postupem pro druhý bod a drobnou úpravou dostáváme

$$\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2 = -\frac{b(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{b(\mathbf{y}, \mathbf{y})} \text{ a } \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^2 = -\frac{b(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{b(\mathbf{y}, \mathbf{y})}.$$

Pokud se tyto poměry budou rovnat, příslušné lineární kombinace budou určovat stejný projektivní bod $A = B$, to máme zakázáno. Jediná možnost tedy je

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \sqrt{-\frac{b(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{b(\mathbf{y}, \mathbf{y})}} \text{ a } \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\sqrt{-\frac{b(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{b(\mathbf{y}, \mathbf{y})}},$$

nebo stejné poměry s opačným znaménkem. V obou případech však dostaneme

$$(X, Y, A, B) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} = -1.$$

□

Definice 4.22. Mějme n -dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem T a $(n+1)$ -dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$ a bod $\mathbf{P} \in B \setminus \text{Im}(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \rightarrow \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(\mathbf{X}) := LO\{\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{P}\},$$

prosté a nazývá se *vnoření* A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$.

Definice 4.23. Pro libovolné těleso splňuje zobrazení $\Phi : T^n \rightarrow \mathbb{P}(T^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\}$$

definici 4.22 a nazývá se *kanonické vnoření* aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru stejné dimenze. $\mathbb{P}(T^{n+1})$ se pak nazývá kanonickým projektivním rozšířením nebo též úplněním afinního prostoru T^n . Přiřazení $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 1)$ je zároveň vyjádřením Φ vůči kanonickým afinním souřadnicím T^n a kanonickým homogenním souřadnicím $\mathbb{P}(T^{n+1})$.

Poznámka 4.24. Následující definice a věty by bylo často možno uvažovat v obecném afinním prostoru a jeho libovolném projektivním rozšíření. Pro jednoduchost výkladu se však budeme omezovat jen na aritmetický afinní prostor a jeho kanonické projektivní rozšíření, nebo dokonce jen na reálnou afinní a projektivní rovinu.

Definice a lemma 4.25. Necht' $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n , pak

1. $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$, kde $\mathbb{P}^{n-1}$ je nadrovina s homogenní rovnicí $x_{n+1} = 0$, tedy se souřadnicemi $(0, \dots, 0, 1)^*$. Tato nadrovina se nazývá nevlastní nadrovina, označuje se p_∞ a její body se nazývají nevlastní body. Ostatní nadroviny $\mathbb{P}^n$ se nazývají vlastní.
2. Pro každou nadrovinu $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$, která není nevlastní platí, že $A^{n-1} = \Phi^{-1}(\mathbb{P}^{n-1} \cap \text{Im}(\Phi))$ je afinní nadrovina prostoru T^n . O $\mathbb{P}^{n-1}$ hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním úplnění nadroviny A^{n-1} a o A^{n-1} hovoříme jako o afinní verzi $\mathbb{P}^{n-1}$. Toto přiřazení je zároveň bijekcí mezi všemi vlastními nadrovinami $\mathbb{P}^n$ a všemi nadrovinami T^n . Nevlastní body $\mathbb{P}^{n-1}$ považujeme i za nevlastní body A^{n-1} .

Příklad 4.26 (Počítání v afinní a projektivní rovině). Uvažujme afinní rovinu $\mathbb{R}^2$ s kanonickými afinními souřadnicemi $[x, y]$ a její kanonické projektivní rozšíření $\mathbb{P}^2$ s kanonickými homogenními souřadnicemi (x_1, x_2, x_3) .

1. Nalezněte projektivní bod, který odpovídá afinnímu bodu $A = [3, -1]$, přesněji tedy nalezněte $\Phi(A)$.
2. Nalezněte afinní bod, který odpovídá projektivnímu bodu $B = (-6, 9, 3)$, přesněji tedy nalezněte $\Phi^{-1}(B)$.
3. Nalezněte projektivní rozšíření afinní přímky $2x+3y+4=0$ a určete všechny její nevlastní body.

4. Nalezněte afinní verzi přímky s duálními souřadnicemi $(2, -1, 5)^*$.
5. Rozhodněte, zda-li afinní body $A = [1, 2]$, $B[4, -4]$ a $C[3, -2]$ leží na přímce. Určete obecnou rovnici této přímky.
6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3, 5]$, $E = [1, 7]$.

Definice 4.27. Necht' $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n , pak

1. O množině $\tilde{Q} \subset A$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže existuje regulární kvadrika Q v $\mathbb{P}^n$ taková, že $\Phi(\tilde{Q}) = Q \cap \text{Im}(\Phi)$. O Q hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění $\tilde{Q}$ a o $\tilde{Q}$ hovoříme jako o afinní verzi Q . Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body $\tilde{Q}$.
2. Tečné nadroviny k $\tilde{Q}$ definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.
3. Jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastní bod T^n , pak jej nazýváme středem kvadriky $\tilde{Q}$.
4. Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadrovinu, která je vlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k $\tilde{Q}$.

Příklad 4.28. Afinní verze kanonické reálné kuželosečky $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ je $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Afinní verze její projektivní parametrizace

$$\Phi(t, s) = (s^2 - t^2, 2st, s^2 + t^2)$$

je

$$\Phi(t) = \left[\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right].$$

Srovnej příklad 2.1.

Poznámka 4.29. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme stejným písmenem označovat afinní objekt (nadrovinu, kvadriku, prostor) a jeho projektivní zúplnění.

Definice a lemma 4.30. Regulární kuželosečku v $\mathbb{R}^2$ nazveme *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají.

Příklad 4.31. Ukažte, že afinní kuželosečka $x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0$ je regulární, určete její afinní typ, nalezněte její střed (pokud existuje) a asymptoty (pokud existují).

Věta 4.32. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ má každá afinní přímka p v $\mathbb{R}^2$ se směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat *směr* p .

Důkaz. Přímka p má normálový vektor $(-v_y, v_x)$. Její afinní verze je $p : -v_yx + v_xy + c = 0$. Přímku si vyjádříme i projektivně jako $-v_yx_1 + v_xx_2 + cx_3$. Nevlastní přímka v takovém prostoru má duální souřadnice $p_\infty = (0, 0, 1)^*$, jinak zapsáno, $p_\infty : x_3 = 0$. Nevlastní bod najdeme jako $p \cap p_\infty$. Jednoduchým dosazením dostaneme rovnici $-v_yx_1 + v_xx_2 = 0$, což má jako řešení bod $(v_x, v_y, 0)$. $\square$

Poznámka 4.33. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ se všechny rovnoběžky protínají v jednom nevlastním bodě - ve svém směru. Přitom všechny nevlastní body leží na (projektivní) přímce $(0, 0, 1)^*$. Reálnou projektivní rovinu $\mathbb{P}^2$ je tedy možno chápat jako $\mathbb{R}^2$, ke kterému se přidá jeden bod v každém směru. Přitom ale po tomto přidání vznikne dokonale symetrická (projektivní) geometrie. Mnoho různých afinních problémů je možno převést na stejný projektivní problém - např. afinní verze Pappovy věty.

Věta 4.34. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělicí poměry platí

1. Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$

2. Jestliže D je nevlastní, pak

$$(A, B, C, D) = -\frac{AC}{CB}.$$

3. Speciálně, pokud je (A, B, C, D) harmonická čtveřice a bod D je nevlastní, pak C je středem AB .

Důkaz. 1. Uvažujeme následující vlastní body a jejich projektivní verze bereme zůvově jako jejich vektorové zástupce:

$$\begin{aligned} A &= [a_x, a_y] \sim (a_x, a_y, 1) =: \mathbf{a} \\ B &= [b_x, b_y] \sim (b_x, b_y, 1) =: \mathbf{b} \\ C &= [c_x, c_y] \sim (c_x, c_y, 1) =: \mathbf{c} \\ D &= [d_x, d_y] \sim (d_x, d_y, 1) =: \mathbf{d} \end{aligned}$$

Všechny tyto body leží na jedné přímce, zvolíme tedy barycentrickou soustavu této přímky jako (A, B) a vyjádříme $C = c_1A + c_2B, D = d_1A + d_2B$ pomocí barycentrických souřadnic (c_1, c_2) a (d_1, d_2) . Věta 3.27 nám pak zaručuje

$$\frac{AC}{CB} = \frac{c_2}{c_1} \text{ a } \frac{AD}{DB} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Všimneme si také, že

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b}. \end{aligned}$$

To platí protože

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = (c_1 a_x + c_2 b_x, c_1 a_y + c_2 b_y, c_1 + c_2) = (c_1 a_x + c_2 b_x, c_1 a_y + c_2 b_y, 1)$$

Stejně to platí i pro $\mathbf{d}$. Můžeme tedy spočítat dvojpoměr jako

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1 c_2}{d_2 c_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}.$$

2. Bod D je nevlastním bodem přímky $\overleftrightarrow{AB}$ se směrovým vektorem $(b_x - a_x, b_y - a_y)$. Ten se podle věty 4.32 spočítá jako $(b_x - a_x, b_y - a_y, 0)$. Pak je zřejmé, že $\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$, což dává dvojpoměr

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1 c_2}{d_2 c_1} = \frac{(-1) \cdot c_2}{1 \cdot c_1} = -\frac{c_2}{c_1} = -\frac{AC}{CB}.$$

3. Je-li (A, B, C, D) harmonická čtveřice a D nevlastní bod, pak

$$(A, B, C, D) = -1 = -\frac{AC}{CB}.$$

To plyne z bodu 2 části tvrzení. Pak ale $\frac{AC}{CB} = 1$, neboli C je středem úsečky AB . □

Definice a lemma 4.35. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme regulární kuželosečku Q . O dvou afinních přímkách řekneme, že mají sdružené směry, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q .

Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Věta 4.36. Necht' přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B . Pak

- S je středem úsečky AB .
- Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p .
- Jestliže má přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky C, D , pak přímka p půlí úsečku CD .

Důkaz. 1. Přímka p protíná nevlastní přímku p_∞ v nějakém bodě X . Body X, A, S, B leží na jedné přímce, přičemž X je bod nevlastní. Podle druhého bodu věty 4.34 je pak S středem úsečky AB .

2. S výhodou využijeme bod 6 tvrzení 4.21, který říká, že jsou-li body A, B dva různé průniky přímky p s Q , $X \in p$ je nějaký bod různý od A, B a $S \in p_X$, pak se p_A, p_B a p_X protínají v pólu přímky p . Ukážeme tedy, že pól přímky p je bod ležící na p_∞ , to nám stačí pro ukázání rovnoběžnosti tečen. Bod S je středem Q a podle definice je to pól nevlastní přímky. To znamená, že p_∞ jsou všechny body polárně sdružené s S . Pól přímky p musí být polárně sdružený s každým bodem na p , speciálně se S , takže pól musí ležet na p_∞ . Tento pól leží na p_A a p_B a je polárně sdružený s nevlastním bodem X přímky p . Přímky p_A, p_B a p tedy mají sdružené směry.
3. Vezmeme nevlastní bod této přímky Z , podle věty 4.34 je S středem úsečky CD . Jelikož p prochází bodem S , pólí i úsečku CD .

□

Důsledek 4.37. Uvažujme parabolu a směr X jejího nevlastního bodu a nějaký další směr Y . Uvažujme všechny rovnoběžky se směrem Y . Některé parabolu neprotnou, jedna z nich bude tečna s bodem dotyku A a ostatní protnou parabolu ve dvou bodech. Pak přímka procházející AO pólí všechny vyt'até úsečky.

Definice 4.38. Směr nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Bod A kuželosečky nazveme vrcholem, jestliže v něm má tečna p_A hlavní směr. Přímka, která prochází vrcholem a je kolmá na tečnu se nazývá osa. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Věta 4.39. Elipsa má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly.

Důkaz. Parabola má jeden nevlastní bod X na přímce p_∞ , která je zároveň její tečnou. Všechny body na p_∞ jsou polárně sdružené s X . To znamená, že všechny přímky mají sdružený směr s přímkou, která má nevlastní bod X . Speciálně existuje právě jedna přímka se sdruženým kolmým směrem, která se dotýká paraboly v jejím vrcholu. Přímka s nevlastním bodem X má hlavní směr paraboly. Přímka vedená vrcholem a bodem X je tedy osou paraboly. Mějme nějakou kuželosečku zadanou bilineární formou b a její maticí B . Vezměme nějaký nevlastní bod $(x, y, 0)$ a zobrazme ho bilineární formou b . Nula ve třetí složce nám "ořízne" matici B na hlavní submatici řádu 2, kterou označíme B' . Je-li B' pozitivně definitní, pak

$$(x \ y \ 0) \underbrace{\begin{pmatrix} B' & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} > 0,$$

neboli neexistuje průnik s nevlastní přímkou a kuželosečka je elipsa. Pokud je ale pozitivně B' pozitivně definitní, pak je i ortonormálně diagonalizovatelná. Existuje tedy ortonormální matice $U = (\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2)$ taková, že $D = \text{diag}(d_1, d_2) = UB'U^T$ je diagonální. Dále platí

$$\mathbf{u}_1^T B' \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^T U^T D U \mathbf{u}_2 = (U^T \mathbf{u}_1)^T D (U \mathbf{u}_2) = (1, 0) D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Neboli nevlastní body přímek se směry u_1 a u_2 jsou polárně sdružené. Jsou to sdružené, na sebe kolmé směry, tedy hlavní směry. Pro oba tyto směry existují 2 tečny k elipse, celkově najdeme 4 vrcholy. Má-li B' signaturu $(0, 1, 1)$, pak určuje hyperbolu. Symetrickými úpravami ji lze tedy diagonalizovat a podobným argumentem jako výše zjistíme, že má 2 na sebe kolmé osy. Jedna osa protíná hyperbolu ve dvou vrcholech a druhá nemá s hyperbolou žádný průnik. Celkově 2 vrcholy. $\square$

Poznámka 4.40 (Meta-věta o projektivních, afinních a eukleidovských pojmech). Projektivní zobrazení zachovávají (správně zobrazují) projektivní pojmy, afinní zobrazení zachovávají afinní pojmy a shodnosti zachovávají eukleidovské (na skalárním součinu závisící) pojmy.

Věta 4.41. Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor T^n . Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ta zobrazení, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body.

Důkaz. Větu dokážeme v rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$. Analogie pro vyšší dimenze a jiná tělesa pak bude zřejmá. Projektivní transformaci popíšeme regulární maticí F a zobrazme nějaký vlastní bod $(x, y, 1)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Z toho je zřejmý tvar lineárně lomených zobrazení. Afinitu ze zobrazení F získáme položením $a_{31} = a_{32} = 0$ a $a_{33} = 1$. Pak totiž

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

To odpovídá afinnímu bodu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

Všechny afinity musí být v tomto tvaru jinak bychom našli x, y takové, že poslední složka nebude konstantní. Pokud $a_{33} \neq 1$ (nemůže platit $a_{33} = 0$ protože pak by byla F singulární), tak můžeme celou matici F vydělit tímto číslem a dostaneme stejný projektivní bod. Z toho taky vidíme, že taková afinita zobrazuje vlastní body na vlastní, protože třetí složka je jedna. Pokud zobrazujeme nevlastní bod, tj. s nulou ve třetí složce, pak

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 0 \end{pmatrix}$$

je nevlastní bod. Afinity tedy zobrazují vlastní body na vlastní a nevlastní body na nevlastní. To, že afinity tvoří podgrupu plyne z faktu, že složení afinit je afinita, inverz je afinita a díky regularitě existuje, a identita je také afinita. $\square$

Věta 4.42 (Příklad afinně zachovaného pojmu). V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme elipsu Q se středem S . Jestliže F je afinita, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.

Důkaz. Elipsa v rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ nemá žádný nevlastní bod. Podle předchozí věty 4.41 F zobrazuje vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní, takže $F(p_\infty) = p_\infty$ a $F(Q) \cap p_\infty = \emptyset$. Obraz elipsy proto nemá žádný nevlastní bod a je to opět elipsa. Označme b a $\bar{b}$ bilineární formy generující Q , resp. $F(Q)$. Je-li S středem Q , pak pro každý $X \in p_\infty$ platí $b(X, S) = 0$. Všimneme si, že $\bar{b}(F(X), F(Y)) = b(X, Y)$. Pak máme pro každý $Y \in p_\infty$

$$\bar{b}(F(S), Y) = b(S, F^{-1}(Y)) = 0,$$

protože $F^{-1}(Y) \in p_\infty$. $F(S)$ je proto skutečně středem $F(Q)$. □

Věta 4.43. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ platí, že

1. každá elipsa je afinní transformací elipsy $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
2. každá parabola je afinní transformací paraboly $x^2 - y = 0$,
3. každá hyperbola je afinní transformací hyperboly $xy - 1 = 0$.

V důsledku jsou tedy každé dvě kuželosečky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Definice 4.44 (Afinní klasifikace kvadrik v prostoru). V projektivně rozšířeném prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik

1. *elipsoid* jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,
2. *eliptický paraboloid*, jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,
3. *dvojdílný hyperboloid* jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
4. *jednodílný hyperboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
5. *hyperbolický paraboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří dvě přímky.

Věta 4.45. Každé dvě kvadriky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

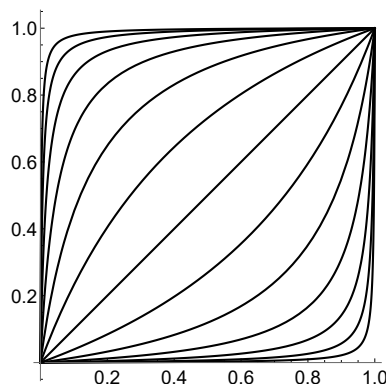
5 Möbiovy transformace

V této kapitole budeme studovat reálnou a komplexní projektivní přímku, které budeme označovat $\mathbb{RP}^1$ a $\mathbb{CP}^1$.

Věta 5.1. Funkce reálné proměnné

$$f_a(x) = \frac{ax}{(a-1)x+1}, \quad a \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty),$$

jsou rostoucí difeomorfismy intervalu $[0, 1]$ na sebe. Pro libovolné hodnoty $x_0, y_0 \in (0, 1)$ existuje právě jedno $a \in \mathbb{R}_+$ takové, že $f_a(x_0) = y_0$. Tyto funkce tvoří vzhledem ke skládání grupu, která je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}_+, *)$. Jedná se o zúžení na interval $[0, 1]$ prvků podgrupy projektivní grupy $PGL(\mathbb{RP}^1)$.

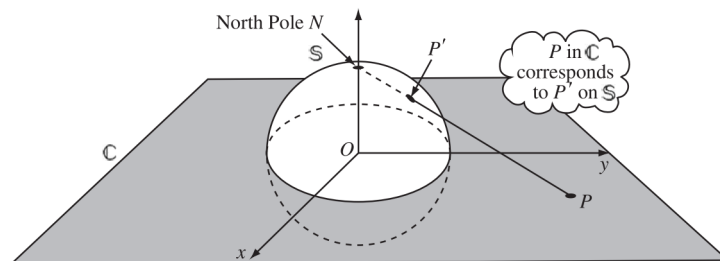


Funkce f_a pro několik hodnot parametru a .

Definice 5.2. Komplexní projektivní přímka má vlastní body $[z] \sim (z, 1)$ a jeden nevlastní bod $(1, 0)$, který budeme též označovat ∞ a tedy psát $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Jsou-li z_i vlastní body pak

$$(z_i \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (|z_i| \rightarrow +\infty)$$

a jestliže ztotožníme $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$, pak ∞ leží na každé přímce a na žádné kružnici. Správnou představu o $\mathbb{CP}^1$ získáme, když zobrazíme $\mathbb{C}$ na sféru $\mathbb{S}$ pomocí projekce π z bodu $N = (0, 0, 1)$ (tak zvaná stereografická projekce).



Dostaneme tak obrazy všech vlastních bodů:

$$\pi(z) = \pi(x + yi) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

a navíc definujeme $\pi(\infty) \rightarrow \underbrace{(0, 0, 1)}_N$. Pak je π homeomorfismem (oboustranně spojitou bijekcí)

$\mathbb{S}^1$ a $\mathbb{CP}^1$, které nazýváme také *Riemannova sféra*. Obrazy přímek a kružnic v $\mathbb{R}^2$ jsou kružnice na $\mathbb{S}$, tyto křivky souhrně nazýváme *kruhové křivky*.

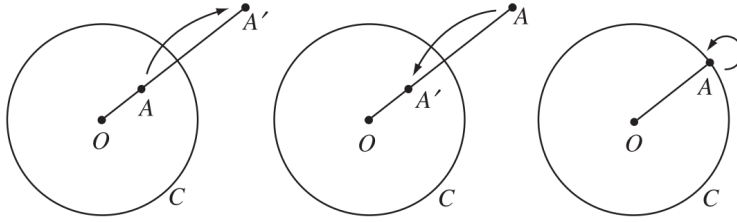
Grupa projektivních transformací $PGL(\mathbb{CP}^1)$, pokud se uvažuje na Riemannově sféře $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}$, se nazývá též Möbiova a její prvky Möbiovy transformace.

Definice 5.3. Na Riemannově sféře definujeme *kruhovou inverzi* ρ vzhledem k jednotkové kružnici předpisem

$$\rho(z) = \frac{1}{\bar{z}} \text{ pro } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \rho(0) = \infty, \quad \rho(\infty) = 0.$$

Jestliže $z = x + yi \neq 0$, pak v reálných souřadnicích máme

$$\rho(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$



Zobrazení $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$ nazýváme *převrácená kruhová inverze*.

Věta 5.4. Každou Möbiovu transformaci lze vyjádřit jako složení posunutí, otočení, stejnoledlosti a převrácené kruhové inverze.

Věta 5.5. Každá Möbiova transformace i kruhová inverze zachovává kruhové křivky. Jinými slovy, obrazem přímky nebo kružnice je přímka nebo kružnice.

Věta 5.6. Každá Möbiova transformace i kruhová inverze zachovává úhly mezi křivkami (je to tedy konformní zobrazení). Přesněji, mějme rovinné regulární hladké křivky $c_1(t)$ a $c_2(s)$ takové, že $c_1(t_0) = c_2(s_0) = A \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ a Möbiovu transformaci F , přičemž $B = F(A) \neq \infty$. Definujme $\tilde{c}_1(t) = F(c_1(t))$ a $\tilde{c}_2(s) = F(c_2(s))$. Pak vektory $\tilde{c}'_1(t_0)$, $\tilde{c}'_2(s_0)$ svírají stejný úhel jako vektory $c'_1(t_0)$, $c'_2(s_0)$.

Věta 5.7. Jsou-li dány tři různé vzory $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{CP}^1$ a tři různé obrazy $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{CP}^1$, pak existuje právě jedna Möbiova transformace F taková, že $F(z_i) = w_i$, pro $i = 1, 2, 3$.

Věta 5.8. Čtyři různé body $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{CP}^1$ leží na kruhové křivce právě tehdy, když je jejich dvojpoměr (z_1, z_2, z_3, z_4) reálné číslo.

Definice 5.9. Poincarého polorovinový model neeuklidovské geometrie má množinu bodů

$$H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

přímkami jsou všechny kruhové křivky kolmé na osu x a přímé shodnosti jsou všechny Möbiovy transformace, které zachovávají množinu H .