

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Verze ze dne 30. září 2020

1 Shodná zobrazení v rovině

Cíle cvičení a DU:

- Zopakovat analytickou geometrii ze střední školy.
- Důkladně studovat shodnosti v rovině.
- Za domácí úkol je úloha 1.7. Odevzdejte prosím do SISu nejpozději do začátku třetího cvičení.

Příklady:

Úloha 1.1. Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20, y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1, y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3, y' = -y$

Úloha 1.2. Pomocí zobrazení z úlohy 1.1, a) zobrazte

a) bod $[2, -3]$

b) přímku $[1, 1] + t(1, 2)$

c) přímku $x + y = 3$

d) parabolu $y = x^2$

Úloha 1.3. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v \mathbb{R}^2 taková, že $f : [3, 0] \mapsto [1, 4]$, $f : [1, 2] \mapsto [3, p]$, $f : [-1, 2] \mapsto [1 + p, -q]$. Tuto shodnost analyzujte.

Úloha 1.4. Nalezněte rovnice rotace v rovině se středem $[1, 3]$ o úhel α .

Úloha 1.5. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.6. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.7. Nalezněte všechny shodnosti v \mathbb{R}^2 , které zobrazují přímkou $3x + 4y - 5 = 0$ na osu "x" a bod $[2, 1]$ na některý bod osy "y".

Úloha 1.8. Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $A = [2, 5]$ na bod $A' = [-6, 3]$.

Úloha 1.9. Nalezněte všechny shodnosti, které zachovávají čtverec s vrcholy $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[2, 0]$ a $[1, 1]$. Popište grupu, kterou tvoří.

Úloha 1.10. Konstrukčně i početně nalezněte všechny pětiúhelníky (ne nutně konvexní), jestliže jsou zadány (popořadě) středy jeho stran $S_1 = [3, -2]$, $S_2 = [6, 0]$, $S_3 = [3, 2]$, $S_4 = [-2, 1]$, $S_5 = [-1, -2]$.

Úloha 1.11. Nalezněte shodnost v rovině, která zobrazí kuželosečku s implicitní rovnicí

$$20x - 9x^2 - 15y - 24xy - 16y^2 = 0$$

na kuželosečku, která nemá smíšený člen xy . Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná.

Úloha 1.12. Nalezněte shodnost v rovině, kterou lze složit ze tří osových souměrností, ale ne z menšího počtu. Dokažte!