# Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 8, verze ze dne 28. listopadu 2020

## 8 Afinní prostor a zobrazení

**Cíle cvičení a DU:**

- Naučit se pracovat s afinními zobrazeními
- Naučit se používat barycentrické souřadnice v rovině

**Příklady:**

**Úloha 8.1.** Určete rovnice afinního zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do sebe, ve kterém bod $M[0,1]$ přechází do bodu $M'[-3,3]$ a asociovaný homomorfismus zobrazuje vektory $\mathbf{u}(1,2)$ a $\mathbf{v}(1,0)$ po řadě na vektory $\mathbf{u}'(-7,-2)$, $\mathbf{v}'(1,-2)$.

**Úloha 8.2.** Určete afinní zobrazení $f$ z $\mathbb{R}^2$ do sebe tak, aby $f([-1,1]) = [6,7]$, $f([1,-1]) = [4,5]$ a $f([2,0]) = [7,12]$. Určete zda-li se jedná o afinitu a případně nalezněte zobrazení inverzní.

**Úloha 8.3.** Určete obraz bodu $[3,1,-2] \in \mathbb{R}^3$ při afinním zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ splňujícím $f([2,1,-1]) = [1,3]$, $f([1,0,2]) = [0,2]$, $f([0,1,1]) = [1,-1]$, $f([1,1,1]) = [1,1]$ a obraz vektoru $(3,1,-2)^T$ při asociovaném homomorfismu $\bar{f}$.

**Úloha 8.4.** Lineární zobrazení $\bar{f}$ asociované s afinním zobrazením $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi $B$ matici $A$. Navíc platí $f([1,2]) = [5,-8]$. Určete $f([3,4])$.

$$B = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right), A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 8.5.** Vyjádřete kolmou projekci $\pi$ celého $\mathbb{R}^2$ na přímku $x + 2y + 3 = 0$ a ověřte, že $\pi \circ \pi = \pi$.

**Úloha 8.6.** V afinní rovině $\mathbb{Z}_5^2$ jsou dány body $A = [2,3]$, $B = [1,4]$. Nalezněte rovnoběžku s přímkou $AB$, která prochází bodem $C = [2,2]$ a popište ji parametricky i rovnicově.

**Úloha 8.7.** Na reálné afinní přímce jsou dva různé body $A$, $B$. Definujme $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ a $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Vyjádřete dělící poměry $\frac{AT}{TB}$, $\frac{TA}{AB}$, $\frac{ST}{TB}$. Vyjádřete bod $S$ jako afinní kombinaci bodů $A$ a $T$.

**Úloha 8.8.** V $\mathbb{R}^2$ je dán trojúhelník $ABC$ s vrcholy $A[2,0]$, $B[-3,0]$ a $C[3,-3]$. Ukažte, že body $P[-1,-1]$, $Q[1,3]$, a $R[-\frac{1}{4},0]$ leží postupně na úsečkách $BC$, $CA$ a $AB$ a určete v jakém poměru je rozdělují. Rozhodněte, zda-li body $P$, $Q$, $R$ leží na přímce.

**Úloha 8.9.** V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník $ABC$ a dále je $S$ střed strany $AB$ a bod $T$ leží v jedné pětině strany $AC$. Označme si $P$ průsečík přímek $CS$ a $BT$. V jakém poměru dělí bod $P$ úsečky $CS$ a $BT$? Jaký je poměr obsahů trojúhelníku $ABC$ a $PBC$?

**Úloha 8.10.** (**) V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník $ABC$ a bod $X$, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Označme si $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Dokažte, že platí

$$\frac{AX}{XP} = \frac{AR}{RB} + \frac{AQ}{QC}.$$