

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 12, verze ze dne 6. ledna 2021

12 Möbiova grupa

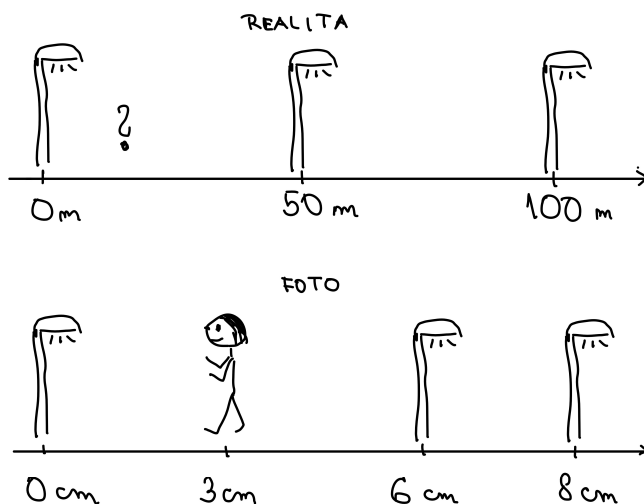
Cíle cvičení a DU:

- Pochopit lineární lomená zobrazení v reálné i komplexní proměnné.
- Umět pracovat s kruhovou inverzí.

Příklady:

Úloha 12.1. Nalezněte projektivní transformaci \mathbb{RP}^1 , která zobrazuje $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$ a $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}$. Ukažte, že zúžené na $[0, 1]$ je toto zobrazení difeomorfismem tohoto intervalu na sebe. Srovnajte s úlohou 3.1.(3).

Úloha 12.2. Na fotografii (kterou považujeme za projektivně zobrazenou realitu) rovné ulice vidíme tři pouliční lampy a jednoho chodce. Víme, že rozestup lamp v realitě je rovnoměrný, a to 50 metrů. Na fotografii je vzdálenost prvních dvou lamp 6 centimetrů a vzdálenost druhé a třetí lampy 2 centimetry. Chodec je na fotografii přesně uprostřed mezi první a druhou lampou. Jak je od první lampy vzdálen v realitě?



Úloha 12.3. V kruhové inverzi podle jednotkové kružnice (střed v počátku) určete obraz

- bod $[2, 3]$,
- přímky $x + y - 3 = 0$

c) kružnice se středem $[2, 3]$ a poloměrem 2.

Řešte konstrukčně i početně.

Úloha 12.4. Rozhodněte, zda body $0, -4, -2i, -1 - 3i$ leží na jedné kružnici v komplexní rovině.

Úloha 12.5. V Möbiově transformaci $f(z) = \frac{z+i}{z+1}$ zobrazte osy x a y a ukažte, že jejich obrazy jsou na sebe kolmé.