Úloha 2.6. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\ y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\ z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3, \end{aligned}$$

popisují přímou shodnost $\mathbb{R}^3$. Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete shodnost jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

Matica $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ má vl. č. $\underline{\lambda = 1}$ s vl. vektorom $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Posunutie $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{násobok } \vec{n}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\perp \vec{n}}$

Zobrazenie $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ má samodružné body ako riešenia

$$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a sú to práve body priamky
$\boxed{[0, \tfrac{1}{2}, 2] + t(1, 0, 1)}$

To je tá samodružná priamka.

Posunutie je $(2, 0, 2)$ a má veľkosť $\underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

$\measuredangle$ určíme napríklad tak, že vezmeme ľubovoľný vektor kolmý na $\vec{n}$, napríklad $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{v}' = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

pak $\underline{\cos\alpha} = \vec{v} \cdot \vec{v}' = \underline{-\frac{1}{3}}$