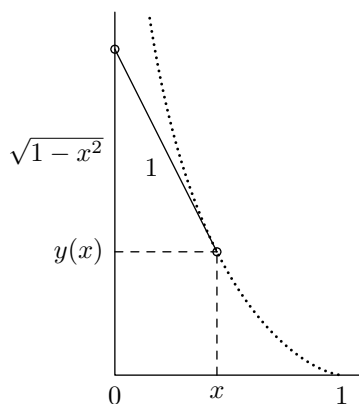


Tractrix. Nalezněte nějakou parametrizaci tractrix.

Řešení. Uvažujme následující situaci: Táhneme předmět na provázku délky 1 po ose y konstantní rychlostí. Ve výchozí pozici se předmět nachází v bodě $[1, 0]$. Označme si $y(x)$ polohu předmětu závislé na proměnné $x \in (0, 1)$. Situace je znázorněna na obrázku.



Protože průvodič je v každém bodě tečnou ke křivce, musí funkce y splňovat následující diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 0$, kde jsme směrnicí v bodě $[x, y(x)]$ spočítali z pravoúhlého trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty. Integrací obdržíme řešení ve tvaru

$$y = -\sqrt{1-x^2} - \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

což je hladká funkce na intervalu $(0, 1)$. Pro větší přehlednost můžeme pro parametrizaci použít goniometrické funkce a dostaneme

$$x = \sin t, \quad y = -\cos t - \log \frac{1-\cos t}{\sin t},$$

kde $t \in (0, \pi/2)$.