Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Verze ze dne 9. prosince 2020

1 Shodná zobrazení v rovině

Cíle cvičení a DU:

- Zopakovat analytickou geometrii ze střední školy.
- Důkladně studovat shodnosti v rovině.
- Za domácí úkol je úloha 1.7. Odevzdejte prosím do SISu nejpozději do začátku třetího cvičení.

Příklady:

Úloha 1.1. Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1,\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20,\ y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1,\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1,\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1,\ y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3,\ y' = -y$

Řešení.

a) otočení se středem v bodě $[-\frac{3}{2}, -2]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{11}{5},\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$

b) osová souměrnost, samodružná přímka $-5x+y+52 = 0$, samodružné směry $(1, 5),\ (5, -1)$, inverzní zobrazení $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20,\ y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) není shodné

d) otočení, samodružný bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2},\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) středová souměrnost, samodružný bod $[\frac{1}{2}, 1]$, všechny směry samodružné s vlastním číslem -1, inverzní zobrazení $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$.

f) posunutá osová souměrnost, žádný samodružný bod, samodružné směry $(1, 0)$, $(0, 1)$, inverzní zobrazení $x' = x + 3$, $y' = -y$

Úloha 1.2. Pomocí zobrazení z úlohy 1.1, a) zobrazte

a) bod $[2, -3]$

b) přímku $[1, 1] + t(1, 2)$

c) přímku $x + y = 3$

d) parabolu $y = x^2$

Řešení.

a) $[-\frac{1}{5}, -\frac{27}{5}]$,

b) $[\frac{12}{5}, -\frac{11}{5}] + t(11, 2)$,

c) $7x' - y' - 24 = 0$,

d) $9x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 86x' + 73y' + 111 = 0$.

Úloha 1.3. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v $\mathbb{R}^2$ taková, že $f : [3, 0] \mapsto [1, 4]$ $f : [1, 2] \mapsto [3, p]$, $f : [-1, 2] \mapsto [1 + p, -q]$. Tuto shodnost analyzujte.

Řešení. Sestavíme soustavu rovnic a vyjde nám, že

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2-p}{2} & \frac{4-p}{2} \\ \frac{p+q}{2} & \frac{2p+q-4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4+3p}{2} \\ \frac{8-3p-3q}{2} \end{pmatrix}$$

První řádek matice má normu 1 pro $p = 2$ nebo $p = 4$. Norma prvního sloupce pak bude 0 pro $q = 0$ resp. $q = -4$. Pouze první volba dává ortogonální matici, zobrazení pak je

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To je posunutá osová souměrnost s osou $-x + y = 0$ a posunutím o vektor $(1, 1)$

Úloha 1.4. Nalezněte rovnice rotace v rovině se středem $[1, 3]$ o úhel α.

Řešení. $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha - \cos\alpha + 3\sin\alpha - 1$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha - \sin\alpha - 3\cos\alpha - 3$.

Úloha 1.5. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Řešení. Rotace, $x' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 15)$ $y' = \frac{1}{13}(5x - 12y - 55)$.

Úloha 1.6. Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Řešení. Posunutí, $x' = x + \frac{16}{13}$, $y' = y + \frac{24}{13}$.

Úloha 1.7. Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, které zobrazují přímku $3x + 4y - 5 = 0$ na osu "x"a bod $[2, 1]$ na některý bod osy "y".

Úloha 1.8. Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $A = [2, 5]$ na bod $A' = [-6, 3]$.

Řešení. Přímé shodnosti: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sin\alpha - 2\cos\alpha - 6 \\ -2\sin\alpha - 5\cos\alpha + 3 \end{pmatrix}$,

nepřímé shodnosti: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\sin\alpha - 2\cos\alpha - 6 \\ -2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3 \end{pmatrix}$.

Úloha 1.9. Nalezněte všechny shodnosti, které zachovávají čtverec s vrcholy $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[2, 0]$ a $[1, 1]$. Popište grupu, kterou tvoří.

Řešení. Grupa D_8, identita, rotace se středem v bodě $[1, 0]$ o $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, osové symetrie s osami $y = 0$, $x - 1 = 0$, $-x + y + 1 = 0$ a $x + y - 1 = 0$.

rotace o $\frac{\pi}{2}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

rotace o π: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

rotace o $\frac{3\pi}{2}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

osová souměrnost s osou $y = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

osová souměrnost s osou o $x - 1 = 0$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

osová souměrnost s osou o $-x + y + 1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

osová souměrnost s osou o $x + y - 1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 1.10. Konstrukčně i početně nalezněte všechny pětiúhelníky (ne nutně konvexní), jestliže jsou zadány (popořadě) středy jeho stran $S_1 = [3, -2]$, $S_2 = [6, 0]$, $S_3 = [3, 2]$, $S_4 = [-2, 1]$, $S_5 = [-1, -2]$.

Řešení. První vrchol pětiúhelníku dostaneme jako samodružný bod zobrazení složeného z pěti středových souměrností se středy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Durhý vrchol získáme jako obraz prvního ve středové symetrii se středem S_1 atd.

Také je možné zapsat středy jako $S_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $S_2 = \frac{1}{2}(A_2 + A_3)$ atd. a vyřešit příslušnou soustavu rovnic, tj. $A_1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$ atd.. Vyjde $A_1 = [1, -3]$, $A_2 = [5, -1]$, $A_3 = [7, 1]$, $A_4 = [-1, 3]$, $A_5 = [-3, -1]$.

Úloha 1.11. Nalezněte shodnost v rovině, která zobrazí kuželosečku s implicitní rovnicí

$$20x - 9x^2 - 15y - 24xy - 16y^2 = 0$$

na kuželosečku, která nemá smíšený člen xy. Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná.

Řešení. Zobrazení

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

převede rovnici na tvar $-y' - x'^2 = 0$. Je to tedy parabola, která vznikne z paraboly $y = -x^2$ rotaci se středem v počátku o $\arctan(\frac{4}{3})$.

Úloha 1.12. Nalezněte shodnost v rovině, kterou lze složit ze tří osových souměrností, ale ne z menšího počtu. Dokažte!

Řešení. Posunutá osová souměrnost. Jde o nepřímou shodnost, musí být tedy složena z jedné nebo tří osových souměrností a jedna to jistě není, protože nemá samodružné body.