Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 4, verze ze dne 23. října 2020

4 Diferenciální geometrie rovinných křivek

Příklady:

Úloha 4.1. Uvažujme orientovanou rovinnou křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t) = (t, t^3)$. V jejím bodě $t = 1$ vypočtěte znaménkovou křivost, tečný a orientovaný normálový vektor, tečnou a normálovou přímku a oskulační kružnici. V nějaké reparametrizaci zachovávající orientaci ověřte, že znaménková křivost v odpovídajícím bodě zůstává stejná.

Řešení. Znaménková křivost $\frac{3}{5\sqrt{10}}$, tečný vektor $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)^T$, orientovaný normálový $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)^T$, tečna $-3x + y + 2 = 0$, normála $x + 3y - 4 = 0$, oskulační kružnice se středem $[-4, \frac{8}{3}]$ a poloměrem $\frac{5}{3}\sqrt{10}$.

Úloha 4.2. Nalezněte přímou shodnost, která pro křivku z Úlohy 4.1 zobrazí její bod $\mathbf{c}(1)$ do počátku souřadnic a její tečný vektor v tomto bodě na vektor $(1, 0)$. Ověřte, že znaménková křivost zobrazené křivky v odpovídajícím bodě bude stejná.

Řešení.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Úloha 4.3. V obecném bodě vyjádřete znaménkovou křivost křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$. V bodě s extremální křivostí sestrojte oskulační kružnici.

Řešení. $\kappa_z(t) = -\frac{2}{3(t^2+1)^2}$, extrém v 0, střed oskulační kružnice $[0, \frac{3}{2}]$, poloměr $\frac{3}{2}$

Úloha 4.4. Studujte znaménkovou křivost elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Jaká jsou její minima a maxima?

Řešení. Maxima křivosti $\frac{3}{4}$ v hlavních vrcholech, minima $\frac{2}{9}$ ve vedlejších.

Úloha 4.5. Spočtěte křivost v bodě $(1, 1)$ rovinné křivky zadané implicitně

$$x^4 - 2xy^3 + y^4 = 0.$$

Řešení. V tomto bodě je $\kappa_z = 0$.