

# Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 6, verze ze dne 12. listopadu 2020

## 6 Křivkový integrál

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se počítat a aplikovat křivkový integrál prvního a druhého druhu.

**Příklady:**

**Úloha 6.1.** Spočtěte délku křivky  $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos \frac{t}{2}]$  na intervalu  $t \in (0, 2\pi)$ .

**Řešení.**  $8\sqrt{2}$

**Úloha 6.2.** Spočtěte délku asteroidy  $\mathbf{c}(t) = [a \cos^3 t, a \sin^3 t]$  na intervalu  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

**Řešení.**  $\frac{3a}{2}$

**Úloha 6.3.** Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} |x| ds,$$

kde  $\mathbf{c}$  je parabola  $y = x^2$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

**Řešení.**  $\frac{1}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1)$

**Úloha 6.4.** Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} (a - y) dx + x dy,$$

kde  $\mathbf{c}(t)$  je cykloida  $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ .

**Řešení.**  $-4\pi a^2$

**Úloha 6.5.** Spočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} \frac{-y^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dx + \frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dy$$

kde  $\mathbf{c}$  je křivka  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$  od  $[0, 1]$  do  $[1, 0]$ .

**Řešení.**  $-\frac{3\pi}{16}$  parametrizace  $\mathbf{c}(t) = [\sin^3 t, \cos^3 t]$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

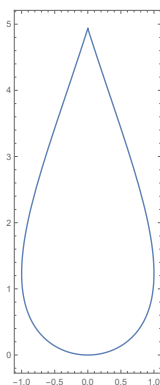
**Úloha 6.6.** Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{c}} (x + y)dx - (x - y)dy,$$

kde  $\mathbf{c}$  je kladně orientovaná elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > 0, b > 0$ .

**Řešení.**  $-2\pi ab$

**Úloha 6.7.** Určete obsah plochy ohraničené křivkou  $\mathbf{c}(t) = \left[ \sin t, \frac{t^2}{2} \right]$ , kde  $t \in (-\pi, \pi)$ .



**Řešení.**  $2\pi$

**Úloha 6.8.** (\*) Jaký obsah má plocha, kterou může spást koza přivázaná na provazu o délce  $L$  k mohutnému stromu, který má kmen o kruhovém průřezu s poloměrem  $a$ ,  $L < \pi a$ . Místo, kde je provaz přivázaný ke stromu se nehýbe.

**Řešení.**  $\frac{L^3}{3a} + \frac{\pi L^2}{2}$

**Úloha 6.9.** (\*) Vyjádřete obsah pravidelného  $n$ -úhelníku, který má předepsaný obvod  $\ell$ . Studujte jak se tento obsah chová pro  $n \rightarrow \infty$ .

**Řešení.**  $A = \frac{\ell^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$ , blíží se monotonně zdola k  $\frac{\ell^2}{4\pi}$ .