

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 10, verze ze dne 14. prosince 2020

10 Afinní a projektivní prostor

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat v projektivním rozšíření afinní roviny.
- Vzhledem k velkému počtu dodělávek minula zadáváme tento týden méně cvičení.
- Za DU je Úloha 10.4.

Příklady:

Úloha 10.1. V \mathbb{R}^2 jsou dány body $A = [1, 2]$, $B[3, 4]$ a přímka p parametrizací $p(t) = [-5, -11] + t(1, -2)$. Nalezněte nevlastní body přímek \overleftrightarrow{AB} a p a určete průsečík těchto přímek.

Řešení. Nevlastní bod \overleftrightarrow{AB} : $(1, 1, 0)$, nevlastní bod p : $(1, -2, 0)$, průsečík: bod $(22, 19, -3)$, resp. $[-\frac{22}{3}, -\frac{19}{3}]$.

Úloha 10.2. V \mathbb{R}^2 jsou dány body $A = [1, 3]$, $B[-1, 7]$. Nalezněte na úsečce AB bod X tak, aby pro dělicí poměr platilo $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{4}$. Nalezněte nevlastní bod přímky \overleftrightarrow{AB} a označte si ho Y . Vypočtěte dvojpoměr (A, B, X, Y) .

Řešení. $X = \frac{4}{5}A + \frac{1}{5}B = [\frac{3}{5}, \frac{19}{5}]$, $Y = (1, -2, 0)$, $(A, B, X, Y) = -\frac{1}{4}$.

Úloha 10.3. V \mathbb{R}^2 určete afinní typ kuželosečky $x^2 - 2xy + 4x - 6y + y^2 + 7 = 0$ a nelezněte tečnu jejím bodě $[1, 2]$.

Řešení. Parabola (jeden bod v nekonečnu: $(1, 1, 0)$), tečna: $x - 2y + 3 = 0$.

Úloha 10.4. Je dána afinní kuželosečka \tilde{Q} s rovnicí

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0.$$

- Ukažte, že \tilde{Q} je regulární kuželosečka.
- Určete její afinní typ.
- Určete tečny k \tilde{Q} z bodu $[-1, -1]$.
- Nalezněte její střed a asymptoty \tilde{Q} , jestliže existují.
- Nalezněte její osy, vrcholy a délky poloos.
- Nalezněte nějakou parametrizaci \tilde{Q} a ukažte, že všechny vrcholy jsou body s nejmenší či největší znaménkovou křivostí.