

# Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 12, verze ze dne 6. ledna 2021

## 12 Möbiova grupa

Cíle cvičení a DU:

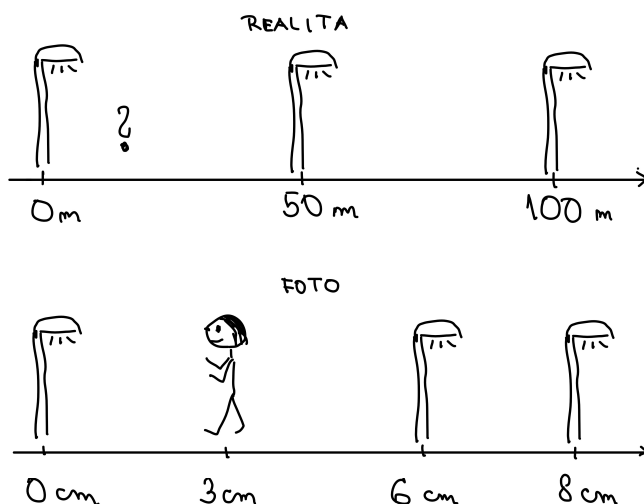
- Pochopit lineární lomená zobrazení v reálné i komplexní proměnné.
- Umět pracovat s kruhovou inverzí.

Příklady:

**Úloha 12.1.** Nalezněte projektivní transformaci  $\mathbb{RP}^1$ , která zobrazuje  $0 \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow 1$  a  $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}$ . Ukažte, že zúžené na  $[0, 1]$  je toto zobrazení difeomorfismem tohoto intervalu na sebe. Srovnejte s úlohou 3.1.(3).

**Řešení.**  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .

**Úloha 12.2.** Na fotografii (kterou považujeme za projektivně zobrazenou realitu) rovné ulice vidíme tři pouliční lampy a jednoho chodce. Víme, že rozestup lamp v realitě je rovnoměrný, a to 50 metrů. Na fotografii je vzdálenost prvních dvou lamp 6 centimetrů a vzdálenost druhé a třetí lampy 2 centimetry. Chodec je na fotografii přesně uprostřed mezi první a druhou lampou. Jak je od první lampy vzdálen v realitě?



**Řešení.**  $\frac{150}{9} \approx 16.67$ .

**Úloha 12.3.** V kruhové inverzi podle jednotkové kružnice (střed v počátku) určete obraz

- a) bodu  $[2, 3]$ ,
- b) přímky  $x + y - 3 = 0$
- c) kružnice se středem  $[2, 3]$  a poloměrem 2.

Řešte konstrukčně i početně.

**Řešení.**

- a)  $[\frac{2}{13}, \frac{3}{13}]$
- b) kružnice se středem  $[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$  a poloměrem  $\frac{\sqrt{2}}{6}$
- c) kružnice se středem  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$  a poloměrem  $\frac{2}{9}$ .

**Úloha 12.4.** Rozhodněte, zda body  $0, -4, -2i, -1 - 3i$  leží na jedné kružnici v komplexní rovině.

**Úloha 12.5.** V Möbiově transformaci  $f(z) = \frac{z+i}{z+1}$  zobrazte osy  $x$  a  $y$  a ukažte, že jejich obrazy jsou na sebe kolmé.