Coonsovy pláty

- typy Coonsových platů:
  1. přechodová plocha – určena dvěma okrajovými křivkami
  2. bilineární Coonsův plát – určen čtyřmi okrajovými křivkami (křivočarým čtyřúhelníkem)
  3. bikubický Coonsův plát – určen čtyřmi okrajovými křivkami (křivočarým čtyřúhelníkem)
  4. dvanáctivektorový Coonsův plát – určen čtyřmi rohovými body a tečnými vektory parametrických křivek v nich (tj. vektory parciálních derivací v těchto bodech)
  5. šestnáctivektorový plát – určen čtyřmi rohovými body, tečnými vektory parametrických křivek v nich a twisty v rozích plátu (tj. vektory druhých parciálních derivací v rozích plátu)
  6. obecný Coonsův plát – určen čtyřmi rohovými body, okrajovými křivkami plátu, průběhem příčných derivací podél okrajových křivek a twisty v rozích plátu

Přechodová plocha

- určena okrajovými křivkami $\mathbf{a}_i(v)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v)$, $v \in I$
- důležité je, že obě křivky musí být parametrizovány nad stejným intervalem parametru – pokud to tak není, je nutné provést lineární transformaci parametru jedné z křivek na stejný interval parametru
- mějme dvě křivky $\mathbf{p}(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, a $\mathbf{q}(s)$, $s \in \langle s_1, s_2 \rangle$, jak vypadá lineární transformace křivky $\mathbf{p}(t)$ tak, aby byla parametrizována nad intervalem $\langle s_1, s_2 \rangle$?
- konstrukce plochy: úsečkou spojujeme body $\mathbf{a}_i(v_k)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v_k)$, $v_k \in I$ na obou křivkách, které odpovídají stejným hodnotám parametru, tj. rovnice plátu je

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{a}_i(v)(1-u) + \mathbf{a}_{i+1}(v)u, \quad v \in I, \ u \in \langle 0, 1 \rangle$$

- pokud máme více takových křivek, můžeme najít přechodovou plochu pro každé dvě sousední křivky – výsledná plocha má nízkou kvalitu (obecně pouze z C^0)

Přechodová plocha

- určena okrajovými křivkami $\mathbf{a}_i(v)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v)$, $v \in I$
- důležité je, že obě křivky musí být parametrizovány nad stejným intervalem parametru – pokud to tak není, je nutné provést lineární transformaci parametru jedné z křivek na stejný interval parametru
- mějme dvě křivky $\mathbf{p}(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, a $\mathbf{q}(s)$, $s \in \langle s_1, s_2 \rangle$, jak vypadá lineární transformace křivky $\mathbf{p}(t)$ tak, aby byla parametrizována nad intervalem $\langle s_1, s_2 \rangle$?
- z podmínek $t(s_1) = t_1$ a $t(s_2) = t_2$ dostáváme

$$t = t_1 + (s - s_1)\frac{t_2 - t_1}{s_2 - s_1},$$

  kde křivky $\mathbf{p}(t(s))$ a $\mathbf{q}(s)$ jsou parametrizovány nad stejným intervalem parametru $\langle s_1, s_2 \rangle$
- konstrukce plochy: úsečkou spojujeme body $\mathbf{a}_i(v_k)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v_k)$, $v_k \in I$ na obou křivkách, které odpovídají stejným hodnotám parametru, tj. rovnice plátu je

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{a}_i(v)(1 - u) + \mathbf{a}_{i+1}(v)u, \quad v \in I, \ u \in \langle 0, 1 \rangle$$

- pokud máme více takových křivek, můžeme najít přechodovou plochu pro každé dvě sousední křivky – výsledná plocha má nízkou kvalitu (obecně pouze z C^0)

Přechodová plocha

- určena okrajovými křivkami $\mathbf{a}_i(v)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v)$, $v \in I$
- důležité je, že obě křivky musí být parametrizovány nad stejným intervalem parametru – pokud to tak není, je nutné provést lineární transformaci parametru jedné z křivek na stejný interval parametru
- mějme dvě křivky $\mathbf{p}(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, a $\mathbf{q}(s)$, $s \in \langle s_1, s_2 \rangle$, jak vypadá lineární transformace křivky $\mathbf{p}(t)$ tak, aby byla parametrizována nad intervalem $\langle s_1, s_2 \rangle$?
- z podmínek $t(s_1) = t_1$ a $t(s_2) = t_2$ dostáváme

$$t = t_1 + (s - s_1)\frac{t_2 - t_1}{s_2 - s_1},$$

  kde křivky $\mathbf{p}(t(s))$ a $\mathbf{q}(s)$ jsou parametrizovány nad stejným intervalem parametru $\langle s_1, s_2 \rangle$
- konstrukce plochy: úsečkou spojujeme body $\mathbf{a}_i(v_k)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v_k)$, $v_k \in I$ na obou křivkách, které odpovídají stejným hodnotám parametru, tj. rovnice plátu je

$$\mathbf{P}(u,v) = \mathbf{a}_i(v)(1-u) + \mathbf{a}_{i+1}(v)u, \quad v \in I,\ u \in \langle 0, 1 \rangle$$

- pokud máme více takových křivek, můžeme najít přechodovou plochu pro každé dvě sousední křivky – výsledná plocha má nízkou kvalitu (obecně pouze z C^0)

Přechodová plocha

- určena okrajovými křivkami $\mathbf{a}_i(v)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v)$, $v \in I$
- důležité je, že obě křivky musí být parametrizovány nad stejným intervalem parametru – pokud to tak není, je nutné provést lineární transformaci parametru jedné z křivek na stejný interval parametru
- mějme dvě křivky $\mathbf{p}(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, a $\mathbf{q}(s)$, $s \in \langle s_1, s_2 \rangle$, jak vypadá lineární transformace křivky $\mathbf{p}(t)$ tak, aby byla parametrizována nad intervalem $\langle s_1, s_2 \rangle$?
- z podmínek $t(s_1) = t_1$ a $t(s_2) = t_2$ dostáváme

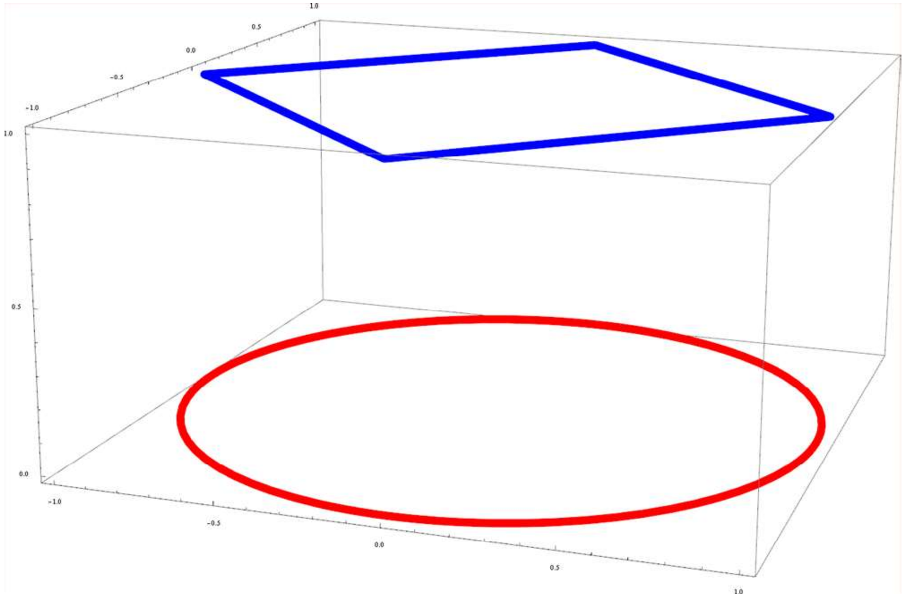
  $$t = t_1 + (s - s_1)\frac{t_2 - t_1}{s_2 - s_1},$$

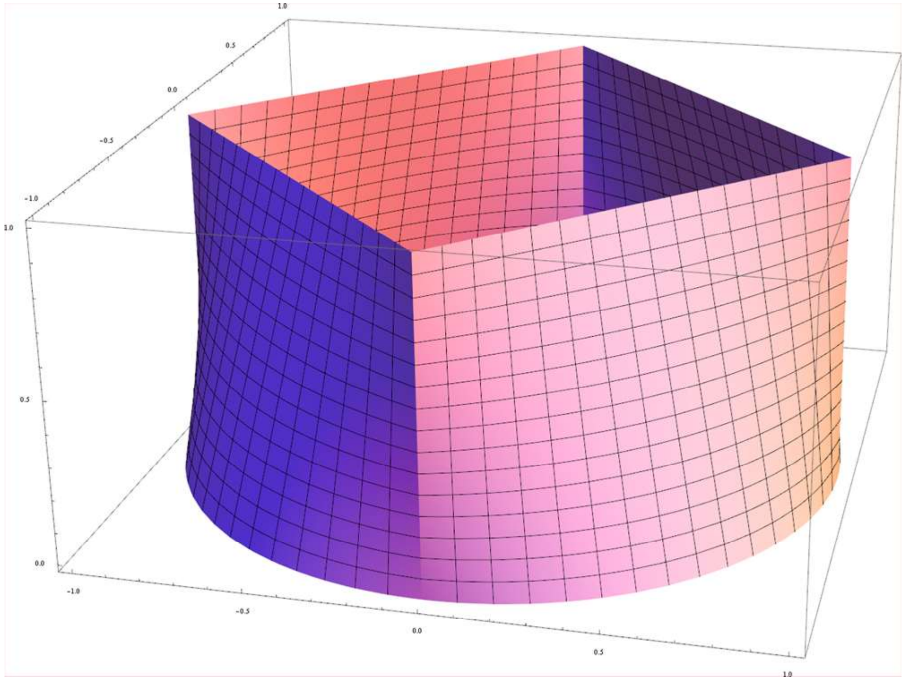
  kde křivky $\mathbf{p}(t(s))$ a $\mathbf{q}(s)$ jsou parametrizovány nad stejným intervalem parametru $\langle s_1, s_2 \rangle$
- konstrukce plochy: úsečkou spojujeme body $\mathbf{a}_i(v_k)$, $\mathbf{a}_{i+1}(v_k)$, $v_k \in I$ na obou křivkách, které odpovídají stejným hodnotám parametru, tj. rovnice plátu je

  $$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{a}_i(v)(1 - u) + \mathbf{a}_{i+1}(v)u, \quad v \in I, \ u \in \langle 0, 1 \rangle$$

- pokud máme více takových křivek, můžeme najít přechodovou plochu pro každé dvě sousední křivky – výsledná plocha má nízkou kvalitu (obecně pouze z C^0)

Příklad přechodové plochy





Bilineární Coonsův plát

- určen okrajovými křivkami $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$
- všechny okrajové křivky musí být parametrizovány nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$ (pokud ne, je možné je snadno transformovat)
- rovnice plochy potom je

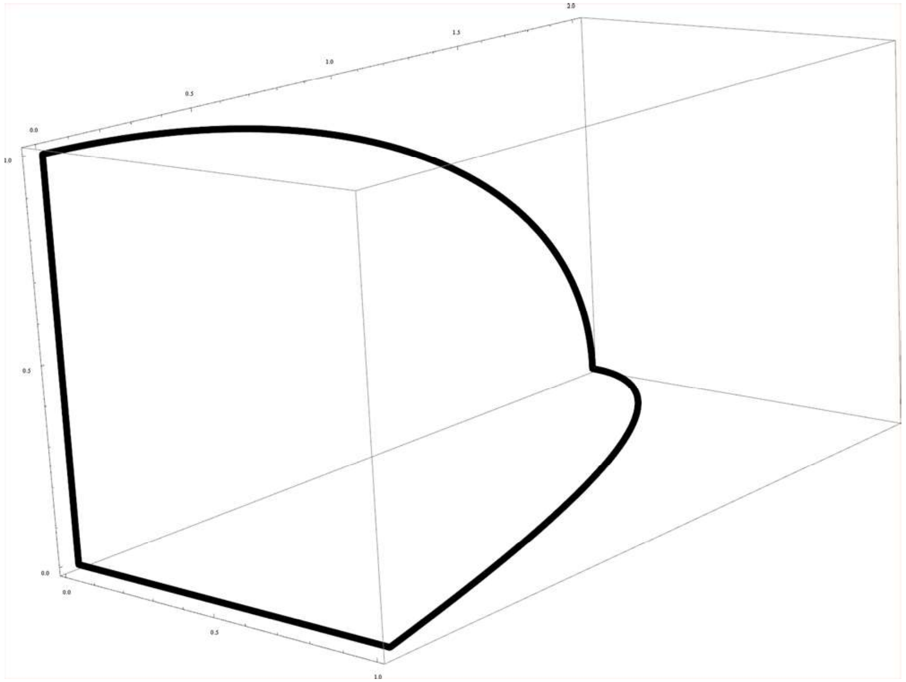
$$(1-u, -1, u) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

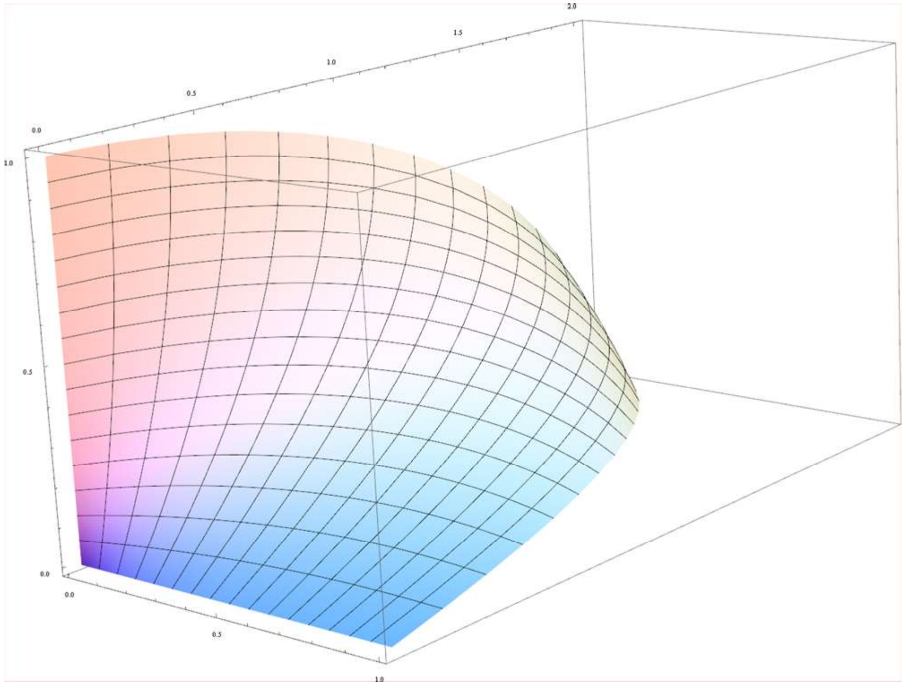
  kde $(u,v) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$
- $\mathbf{P}(u,v)$ představuje polohový vektor plátu
- jsou-li protější dvě hraniční křivky bilineárního plátu přímky, splývá bilineární plát s přechodovou plochou zkonstruovanou pro zbývající dvě okrajové přímky
- je možné jej vyjádřit také ve tvaru

$$\mathbf{P}(u,v) = \mathbf{R}_1(u,v) + \mathbf{R}_2(u,v) - \mathbf{T}(u,v),$$

  kde $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ jsou přechodové plochy určené vždy protějšími okrajovými křivkami a $\mathbf{T}$ je hyperbolický paraboloid určený rohovými body $\mathbf{P}_{ij}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$

Příklad bilineárního Coonsova plátu





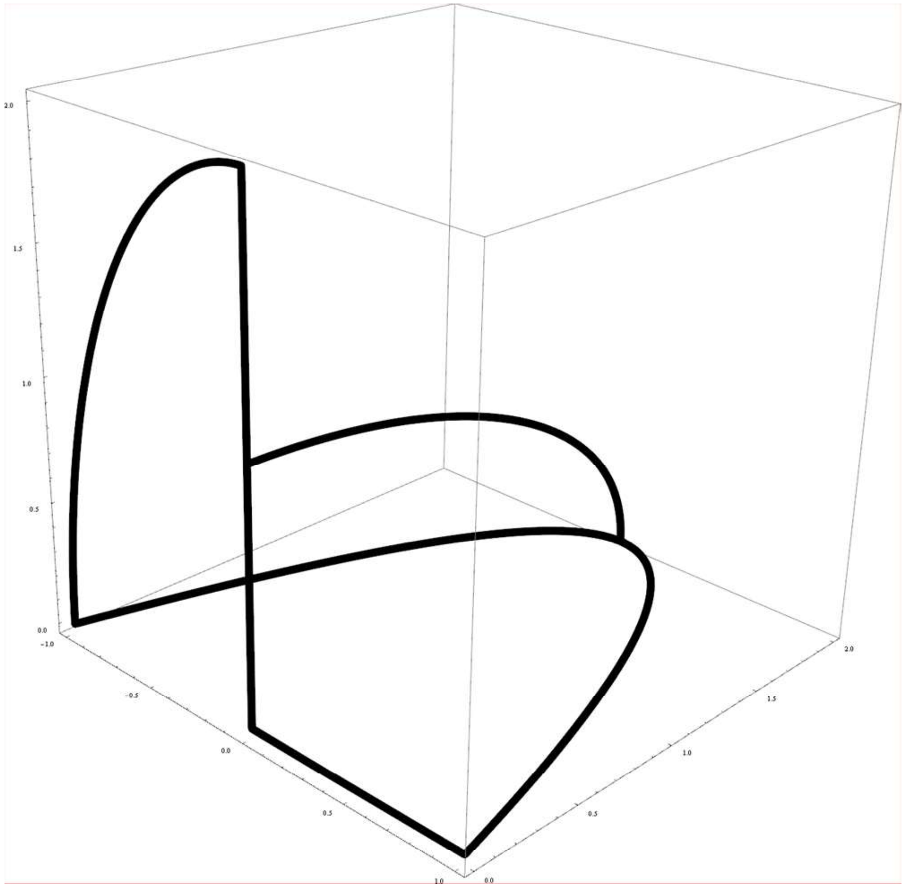
Bikubický Coonsův plát

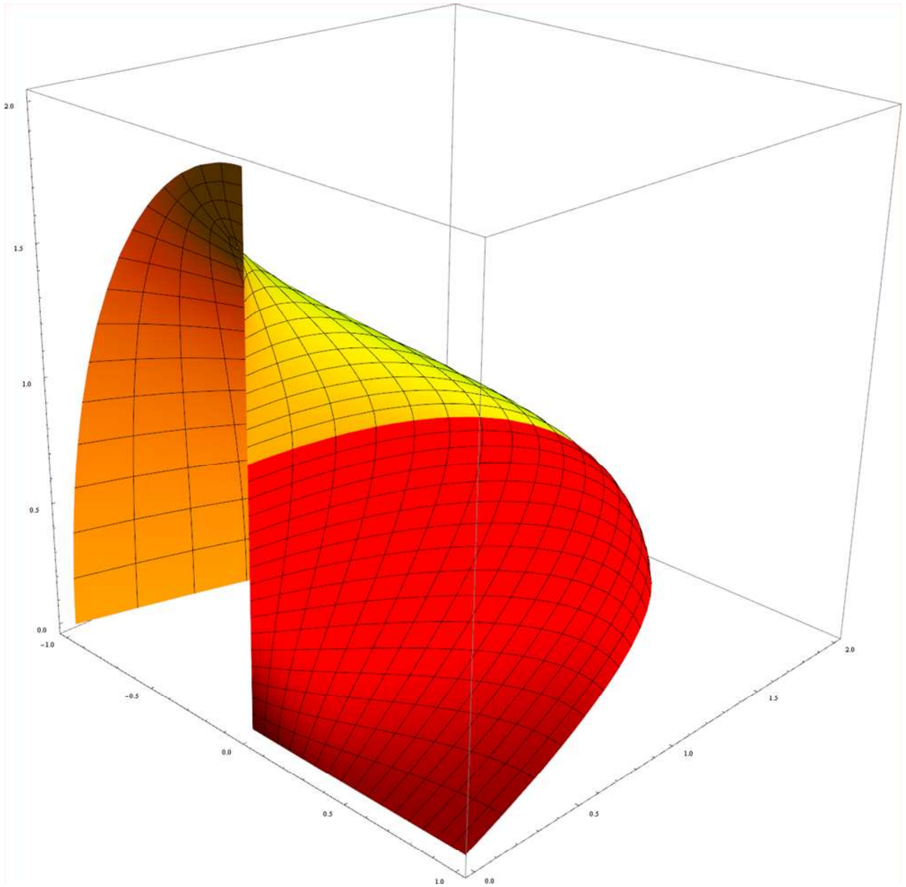
- určen okrajovými křivkami $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$
- křivky musí být opět parametrizovány nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$
- rovnice plochy potom je

$$(F_0(u), -1, F_1(u)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ -1 \\ F_1(v) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

  kde $F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$, $F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$ a $(u, v) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$
- $\mathbf{P}(u, v)$ představuje opět polohový vektor plátu
- bikubický Coonsův plát zajišťuje plátování, tj. pro dva pláty, které mají společnou hraniční křivku a příčné hraniční křivky jsou napojeny alespoň ve třídě G^1, je automaticky zajištěna tato spojitost pro všechny parametrické křivky
- takové sousední pláty mají podél společné křivky společné tečné roviny
- společná hraniční křivka netvoří ve výsledném modelu vizuální hranu
- twisty v rozích bikubického Coonsova plátu jsou nulové

Příklad bikubického Coonsova plátu





Dvanáctivektorový plát

- určen polohovými vektory rohových bodů $\mathbf{P}_{00}$, $\mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{P}_{11}$, tečnými vektory v jednom směru v rohových bodech $\mathbf{P}^u_{00}$, $\mathbf{P}^u_{10}$, $\mathbf{P}^u_{01}$, $\mathbf{P}^u_{11}$, tečnými vektory ve druhém směru v rohových bodech $\mathbf{P}^v_{00}$, $\mathbf{P}^v_{10}$, $\mathbf{P}^v_{01}$, $\mathbf{P}^v_{11}$
- plát se nazývá také Fergusonův plát
- twisty v rozích plochy jsou nulové
- rovnice plochy je

$$\mathbf{P}(u,v) = (F_0(u), F_1(u), F_2(u), F_3(u)) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}^v_{00} & \mathbf{P}^v_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}^v_{10} & \mathbf{P}^v_{11} \\ \mathbf{P}^u_{00} & \mathbf{P}^u_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^u_{00} & \mathbf{P}^u_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{pmatrix},$$

  kde $F_i(t)$ jsou bázové funkce Fergusonovy kubiky a $(u,v) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$
- okrajovými křivkami plátu jsou Fergusonovy kubiky
- splývá s bikubickým Coonsovým plátem, jehož okrajovými křivkami jsou Fergusonovy kubiky
- dvanáctivektorový plát zajišťuje plátování
- lze použít např. pro vytvoření hladce napojené plochy mezi dvěma plochami

Šestnáctivektorový plát

- určen
  - polohovými vektory rohových bodů $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{11}$,
  - tečnými vektory v jednom směru v rohových bodech $\mathbf{P}^u_{00}, \mathbf{P}^u_{10}, \mathbf{P}^u_{01}, \mathbf{P}^u_{11}$,
  - tečnými vektory ve druhém směru v rohových bodech $\mathbf{P}^v_{00}, \mathbf{P}^v_{10}, \mathbf{P}^v_{01}, \mathbf{P}^v_{11}$ a
  - twisty v rozích plátu $\mathbf{P}^{uv}_{00}, \mathbf{P}^{uv}_{10}, \mathbf{P}^{uv}_{01}, \mathbf{P}^{uv}_{11}$
- rovnice plochy je

$$\mathbf{P}(u,v) = (F_0(u), F_1(u), F_2(u), F_3(u)) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}^v_{00} & \mathbf{P}^v_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}^v_{10} & \mathbf{P}^v_{11} \\ \mathbf{P}^u_{00} & \mathbf{P}^u_{01} & \mathbf{P}^{uv}_{00} & \mathbf{P}^{uv}_{01} \\ \mathbf{P}^u_{00} & \mathbf{P}^u_{01} & \mathbf{P}^{uv}_{10} & \mathbf{P}^{uv}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{pmatrix},$$

  kde $F_i(t)$ jsou bázové funkce Fergusonovy kubiky a $(u,v) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$
- okrajovými křivkami plátu jsou opět Fergusonovy kubiky
- šestnáctivektorý plát je základem pro generování tzv. spline ploch, tj. ploch, jejichž parametrické křivky jsou spline křivkami

Obecný Coonsův plát

- bikubický Coonsův plát zajišťuje plátování, ale pouze při napojení opět na bikubický Coonsův plát
- pokud jej potřebujeme napojit na obecný plát (který není bikubickým C. plátem), je výhodné použít obecný Coonsův plát
- určen
  - okrajovými křivkami $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$,
  - průběhy příčných derivací podél okrajových křivek $\mathbf{P}^u(0, v)$, $\mathbf{P}^u(1, v)$, $\mathbf{P}^v(u, 0)$, $\mathbf{P}^v(u, 1)$,
  - twisty v rozích plátu $\mathbf{P}^{uv}_{00}$, $\mathbf{P}^{uv}_{10}$, $\mathbf{P}^{uv}_{01}$, $\mathbf{P}^{uv}_{11}$
- dále je nutné splnit podmínky kompatibility:
  - okrajové křivky na sebe navazují,
  - zadané příčné derivace se shodují s derivacemi okrajových křivek,
  - twisty v rozích plátu jsou v souladu s derivacemi zadaných příčných derivací

Obecný Coonsův plát

- rovnice plochy potom je

$$(F_0(u), -1, F_1(u), F_2(u), F_3(u)) \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ -1 \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}^v(0,0) & \mathbf{P}^v(0,1) \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) & \mathbf{P}^v(u,0) & \mathbf{P}^v(u,1) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}^v(1,0) & \mathbf{P}^v(1,1) \\ \mathbf{P}^u(0,0) & \mathbf{P}^u(0,v) & \mathbf{P}^u(0,1) & \mathbf{P}^{uv}_{00} & \mathbf{P}^{uv}_{01} \\ \mathbf{P}^u(1,0) & \mathbf{P}^u(1,v) & \mathbf{P}^u(1,1) & \mathbf{P}^{uv}_{10} & \mathbf{P}^{uv}_{11} \end{pmatrix}$$

a $F_i(t)$ jsou bázové funkce Fergusonovy kubiky a $(u,v) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$