

# Geometrické modelování

Zbyněk Šír

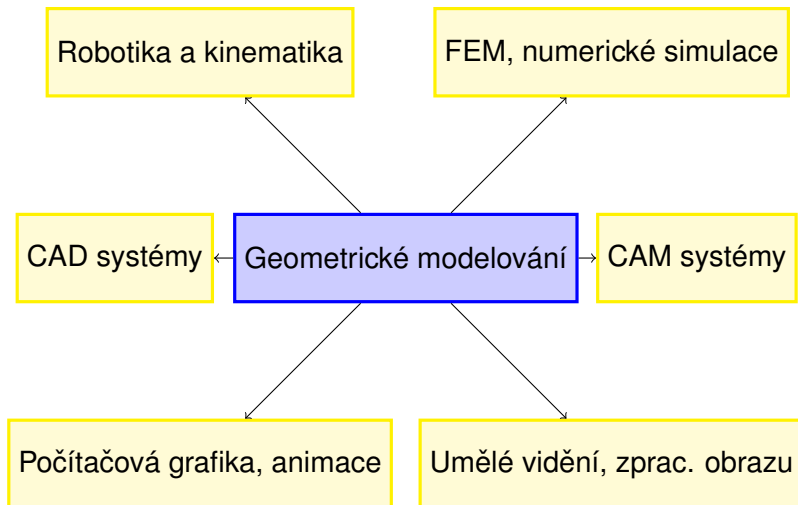


Matematický ústav UK  
Matematicko-fyzikální fakulta

- Co je to geometrické modelování?
- Cíle předmětu a jeho kontext na MFF.
- Plánovaná témata.
- Jakým způsobem budeme pracovat?
- Praktické záležitosti a úmluva času.
- Příklady

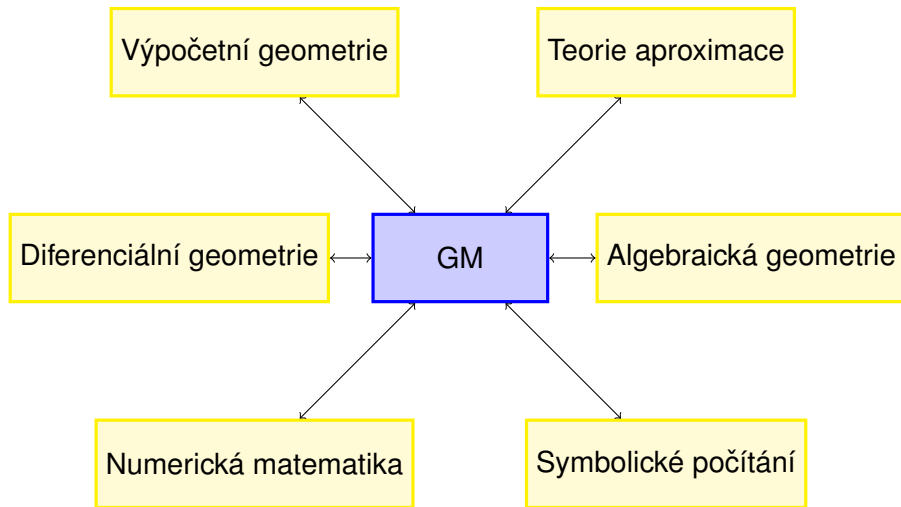
# Co je geometrické modelování?

- moderní teoretická geometrická disciplína
- studuje objekty a reprezentace vhodné pro geometrické aplikace



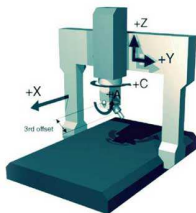
# Teoretické a metodologické souvislosti

Vzájemné ovlivňování:



# Správné pochopení geometrie je zásadní

Obrábění rotoru turbodmychadla:



- pouze rozvinutelné plochy je možno obrábět válcovou frézou, jinak nutně dochází k podřezu
- chyby jsou často marně odstraňovány pokusy o vyšší kvalitu a přesnost frézování
- návrh správného nástroje je obtížný geometrický problém

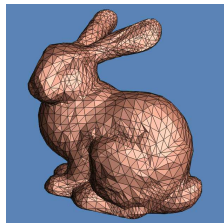
# Co je geometrické modelování

Zachycení tvaru pomocí daných dovolených elementů.



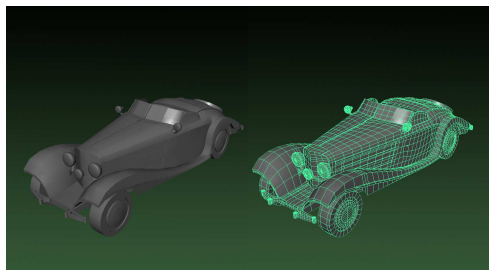
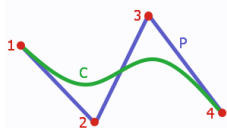
# Dva hlavní typy geometrických reprezentací v GM

- 1 diskrétní či po částech lineární objekty, mnohostěny, body
  - především v počítačové grafice, animacích, FEM ...
  - paradigmatem je trojúhelníkový mesh
  - metody výpočetní geometrie, diskrétní matematiky, diskrétní diferenciální geometrie ...
- 2 spojité a hladké reprezentace, parametrizace, plochy
  - využívá se zejména v CAD, CAM, robotice ...
  - paradigmatem je po částech polynomiální či racionální parametrizace
  - užívá metod diferenciální a algebraické geometrie, teorie aproximace ...



# Ráj racionálních parametrizací

- Bézierovy křivky mají mnoho dobrých vlastností (vysoká stabilita, intuitivní ovládání tvaru, efektivní vykreslení, výpočet polohy, omezení konvexním obalem, omezená variace)



- racionální po částech = NURBS (non-uniform rational B-splines)
- v CAD, CAM systémech jsou reprezentovány velmi efektivně
- neracionální reprezentace tradičně podporovány nejsou



# Cíle předmětu a jeho kontext

- Pochopit co to je NURBS a spol. (level designer, level programátor, level **matfyzák**). Motivace, podstata, algoritmy, omezení.
- Kultivovat geometrické myšlení a dovednosti ve 2d a 3d.
- Seznámit se s některými významnými matematickými koncepty, větami a postupy.
- Souvisí s předměty
  - Matematická analýza, Lineární algebra (ty jediné předpokládá)
  - Geometrie (diferenciální)
  - Geometrie pro počítačovou grafiku
  - Diskrétní matematika (výpočetní geometrie)
  - Matematické modelování (obor)
  - Počítačová algebra, Algebraická geometrie, Deskriptivní geometrie, atd.
- Seznámit se se zajímavým software

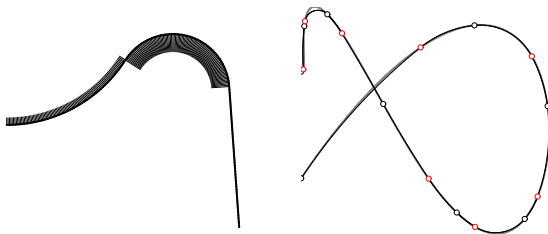
## Možná témata - upravíme podle času a zájmu

- Parametrický popis křivky, plochy a tělesa. Křivosti a podobně.
- Lineární, kruhové, parabolické a kubické splajny. Problém interpolace a aproximace.
- Béziérový křivky, racionální křivky, NURBS křivky. Vlastnosti a algoritmy.
- Totéž pro plochy.
- Aproximační a interpolační plochy. Bilineární a bikubická Coonsova plocha.
- Obalové křivky a plochy. Křivky a plochy se zvláštními algebraickými vlastnostmi. PH křivky a PN plochy.
- Polygonální reprezentace povrchu, triangulace, diskretní diferenciální geometrie. Dělicí schémata (Subdivision), Doo-Sabin a Catmull-Clark.
- Isogeometrická analýza, diskretní diferenciální geometrie.
- Kinematika.

- Přednášky: definice, algoritmy, tvrzení (občas nějaký důkaz), příklady.
- Cvičení: převážně samostatné, příklady, studium, implementace. Na příště:
  - nainstalovat MATHEMATIKU, vykreslit nějakou rovinnou křivku, aproximovat jí lomenou čarou a vyhodnotit chybu
- Zápočet: předvedení 2-3 krátkých implementací (výběr ze seznamu)
- Zkouška: ústní, diskuze nad implementacemi a algoritmy, občas nějaký důkaz.

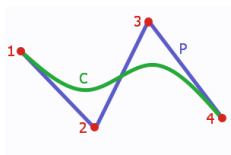
- 2/2 Z+Zk, 6 kreditů
- jazyk: čeština (s občasnými anglickými vsuvkami)
- pro studenty oboru matematika je možná lepší zapsat si jako NMMB434.
- cvičení: převážně domácí práce, budeme jí komentovat na přednášce (cca 15 min. týdně) a bude možnost (i hromadných konzultací)
- konzultace: KDY a KDE?

## Příklad: Křivka převedená na kruhové oblouky



Tomuto formátu se říká G-code a je využíván v počítačem řízeném obrábění (CNC).

# Příklad: Bézierova křivka



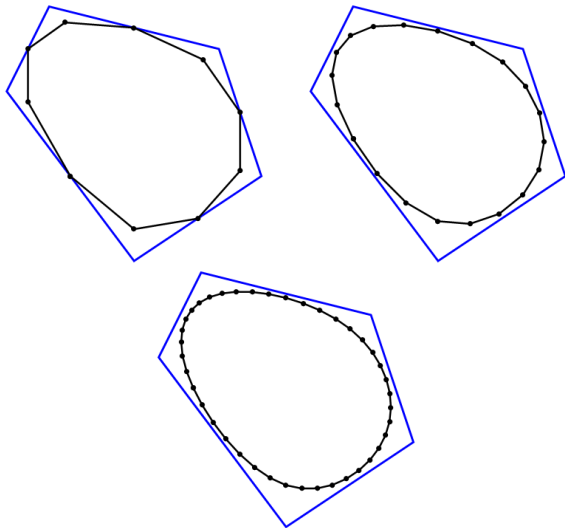
- Každou polynomiální křivku parametrizujeme na intervalu  $[0, 1]$ .
- $i$ -tý Bernsteinův polynom stupně  $n$  je definován jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

- Polynomy  $B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)$  pevného stupně  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů stupně nejvýše  $n$ . Ten má opravdu dimenzi  $n + 1$ .
- Máme-li  $n + 1$  bodů  $\mathbf{P}^j \in \mathbb{R}^2$ , které tvoří tzv. řídicí polygon, pak definujeme Bézierovu křivku na intervalu  $[0, 1]$

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}^i B_i^n(t).$$

## Příklad: Subdivision křivky



# Příklad: Zachycení nejen tvaru, ale i pohybu.

Paralelní robot (Steward platform):



- dvě šestice bodů leží na kuželosečkách a jsou projektivně příbuzné  $\Rightarrow$  samopohyb
- šest spojnic tvoří projektivní lineární komplex  $\Rightarrow$  robot lokálně ztrácí stupeň volnosti