Geometrické modelování

Racionální křivky a NURBS

Zbyněk Šír

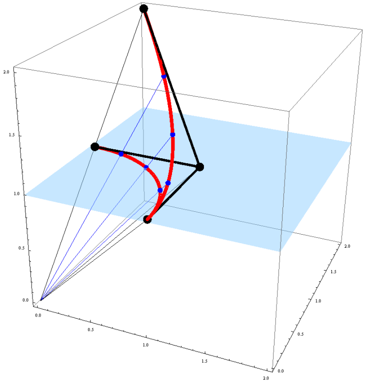
Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

Racionální Bézierovy křivky

- některé standardní objekty, zejména kružnice, resp. její části, nelze popsat pomocí Bézierových křivek, proto se zavádí racionální verze Bézierových křivek (a později také B-spline křivek), které jsou určeny nejen řídícím polygonem, ale také tzv. váhami řídících bodů.

Racionální Bézierovy křivky

- některé standardní objekty, zejména kružnice, resp. její části, nelze popsat pomocí Bézierových křivek, proto se zavádí racionální verze Bézierových křivek (a později také B-spline křivek), které jsou určeny nejen řídícím polygonem, ale také tzv. váhami řídících bodů.
- Jedná se vlastně o projekce prostorových polynomiálních křivek.



Racionální Bézierovy křivky

- Mějme $\mathbf{P}_i = [P_{i,x}, P_{i,y}]$, $i = 0, \ldots, n$ řídící body v rovině a $w_i > 0$ váhy těchto bodů, potom tzv. projektivní řídící body racionální Bézierovy křivky jsou definovány jako

$$\mathbf{P}_i^w = w_i[P_{i,x}, P_{i,y}, 1] = [w_i P_{i,x}, w_i P_{i,y}, w_i].$$

  Jedná se vlastně o vložení bodů do roviny $z = 1$ a jejich stejnolehlé "vysunutí"do prostoru s různými váhami.

Racionální Bézierovy křivky

- Mějme $\mathbf{P}_i = [P_{i,x}, P_{i,y}]$, $i = 0, \ldots, n$ řídící body v rovině a $w_i > 0$ váhy těchto bodů, potom tzv. projektivní řídící body racionální Bézierovy křivky jsou definovány jako

$$\mathbf{P}_i^w = w_i[P_{i,x}, P_{i,y}, 1] = [w_i P_{i,x}, w_i P_{i,y}, w_i].$$

  Jedná se vlastně o vložení bodů do roviny $z = 1$ a jejich stejnolehlé "vysunutí"do prostoru s různými váhami.
- Z nich vytvoříme Bézierovu křivku v prostoru

$$\mathbf{c}^w(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i^w B_i^n(t)$$

  a tu pak zprojektujeme zpět do roviny $z = 1$ a dostaneme výslednou racionální křivku

$$\vec{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)}.$$

Racionální algoritmus de Casteljau

- algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky použitý na projektivní řídící body $\mathbf{P}_i^w$, $i = 0, \ldots, n$, řídícího polygonu

Racionální algoritmus de Casteljau

- algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky použitý na projektivní řídící body $\mathbf{P}_i^w$, $i = 0, \ldots, n$, řídícího polygonu
- např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídícími body $\mathbf{P}_0$, ..., $\mathbf{P}_3$ a jejich váhami w_0, ..., w_3 platí

$$\mathbf{P}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{P}_{i,0}^w + t\mathbf{P}_{i+1,0}^w, \; j = 0, 1, 2$$

Racionální algoritmus de Casteljau

- algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky použitý na projektivní řídící body $\mathbf{P}_i^w$, $i = 0, \ldots, n$, řídícího polygonu
- např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídícími body $\mathbf{P}_0$, ..., $\mathbf{P}_3$ a jejich váhami w_0, ..., w_3 platí

$$\mathbf{P}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{P}_{i,0}^w + t\mathbf{P}_{i+1,0}^w, \; j = 0, 1, 2$$

- je zřejmé, že váha nového bodu $\mathbf{P}_{i,1}$ je určena třetí souřadnicí bodu $\mathbf{P}_{i,1}^w$ a je rovna $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$

Racionální algoritmus de Casteljau

- algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky použitý na projektivní řídící body $\mathbf{P}_i^w$, $i = 0, \dots, n$, řídícího polygonu
- např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídícími body $\mathbf{P}_0$, ..., $\mathbf{P}_3$ a jejich váhami w_0, ..., w_3 platí

$$\mathbf{P}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{P}_{i,0}^w + t\mathbf{P}_{i+1,0}^w, \; j = 0, 1, 2$$

- je zřejmé, že váha nového bodu $\mathbf{P}_{i,1}$ je určena třetí souřadnicí bodu $\mathbf{P}_{i,1}^w$ a je rovna $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$
- kartézské souřadnice nového bodu potom tedy jsou

$$\mathbf{P}_{i,1} = (1-t)\frac{w_{i,0}}{w_{i,1}}\mathbf{P}_{i,0} + t\frac{w_{i+1,0}}{w_{i,1}}\mathbf{P}_{i+1,0}$$

Racionální algoritmus de Casteljau

- celý proces je možné obecně zapsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_i^0 &= \mathbf{P}_i, \\
\mathbf{P}_i^j &= (1-t)\,\frac{w_i^{j-1}}{w_i^j}\,\mathbf{P}_i^{j-1} + t\,\frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j}\,\mathbf{P}_{i+1}^{j-1}, \\
w_i^j &= (1-t)\,w_i^{j-1} + t\,w_{i+1}^{j-1}, \qquad j = 1, \ldots, n,\ i = 0, \ldots, n-j
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Možnost nastavení krajních vah na 1

Věta: Nechť $\mathbf{c}(t)$, $t \in [0,1]$ je racionální Bézierova křivka s řídícími body $(\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n)$ a váhami $(w_0, \ldots, w_n)$. Zvolme $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a definujme $\mathbf{c}(s)$, $s \in [0,1]$ jako reparametrizaci $\mathbf{c}(t)$ pomocí funkce

$$t = t(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}.$$

Pak $\mathbf{c}(s)$ je racionální Bézierova křivka s týmiž řídícími body $(\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n)$ a s váhami $(\tilde{w}_0, \ldots, \tilde{w}_n)$, kde $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$.

Důkaz: Přímým dosazením dostáváme

$$B_i^n(t(s)) = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n}$$

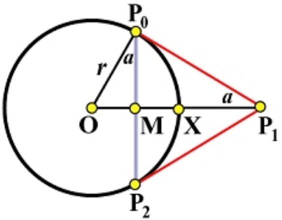
a tedy i

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(s) &= \mathbf{c}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i B_i^n(s)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i B_i^n(s)}.
\end{aligned}$$

□

Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

- Pro $n = 2$ máme tedy $w_0 = 1$, $w_1 = w$, $w_2 = 1$.
- Platí, že výsledná křivka je část paraboly pro $w = 1$, hyperboly pro $w > 1$ a část elipsy pro $w < 1$.
- Oblouk kružnice dostaneme, jestliže $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|$, $w_0 = 1$, $w_2 = 1$ a $w = \sin a$.



NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines

NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano

NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- NURBS křivka je určena řídícími body, váhami těchto řídících bodů, stupněm a uzlovým vektorem

NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- NURBS křivka je určena řídícími body, váhami těchto řídících bodů, stupněm a uzlovým vektorem
- i pro NURBS křivky může být uzlový vektor uniformní nebo neuniformní

NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- NURBS křivka je určena řídícími body, váhami těchto řídících bodů, stupněm a uzlovým vektorem
- i pro NURBS křivky může být uzlový vektor uniformní nebo neuniformní
- křivky jsou racionální, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi

NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- NURBS křivka je určena řídícími body, váhami těchto řídících bodů, stupněm a uzlovým vektorem
- i pro NURBS křivky může být uzlový vektor uniformní nebo neuniformní
- křivky jsou racionální, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek

NURBS křivky

- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- NURBS křivka je určena řídícími body, váhami těchto řídících bodů, stupněm a uzlovým vektorem
- i pro NURBS křivky může být uzlový vektor uniformní nebo neuniformní
- křivky jsou racionální, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- o uzlovém vektoru platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky

NURBS křivky

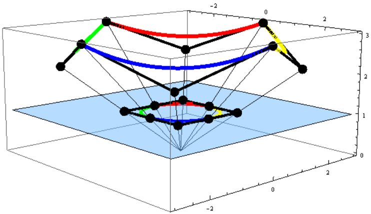
- NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines
- pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- NURBS křivka je určena řídícími body, váhami těchto řídících bodů, stupněm a uzlovým vektorem
- i pro NURBS křivky může být uzlový vektor uniformní nebo neuniformní
- křivky jsou racionální, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- o uzlovém vektoru platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body $\mathbf{P}_i$ a jejich váhy w_i, $i = 0, \ldots, n$, jsou

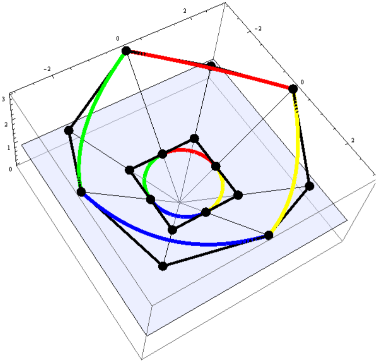
$$\mathbf{P}_i^w = [w_i P_{i,x}, w_i(P_{i,y}, w_i], \; i = 0, \ldots, n$$

tzv. projektivní řídící body NURBS křivky

NURBS křivky

- projektivní řídící body $\mathbf{P}_i^w$ a uzlový vektor T určují polynomiální B-spline křivku v prostoru o dimenzi vyšším a projekcí dostáváme racionální parametrizaci rovinné NURBS křivky
- kružnice na obrázku dole je získána projekcí po částech kvadratické B-spline křivky v $\mathbb{R}^3$





NURBS křivky

- pokud $\mathbf{P}_i$ a w_i, $i = 0, \ldots, n$ jsou řídící body a váhy NURBS křivky, T je vektor parametrizace, potom parametrizace NURBS křivky stupně p je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \tag{2}$$

NURBS křivky

- pokud $\mathbf{P}_i$ a w_i, $i = 0, \ldots, n$ jsou řídící body a váhy NURBS křivky, T je vektor parametrizace, potom parametrizace NURBS křivky stupně p je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \tag{2}$$

- pokud $\mathbf{P}_i^w$ jsou příslušné projektivní řídící body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)(w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

a projekcí dostáváme (2).

NURBS křivky

- pokud $\mathbf{P}_i$ a w_i, $i = 0, \ldots, n$ jsou řídící body a váhy NURBS křivky, T je vektor parametrizace, potom parametrizace NURBS křivky stupně p je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \tag{2}$$

- pokud $\mathbf{P}_i^w$ jsou příslušné projektivní řídící body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)(w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

  a projekcí dostáváme (2).
- vlastnosti obdobné B-spline křivkám – lokalizace změn, platí podmínka konvexního obalu, projektivní invariantnost

NURBS křivky

- pokud $\mathbf{P}_i$ a w_i, $i = 0, \dots, n$ jsou řídící body a váhy NURBS křivky, T je vektor parametrizace, potom parametrizace NURBS křivky stupně p je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \tag{2}$$

- pokud $\mathbf{P}_i^w$ jsou příslušné projektivní řídící body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)(w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

  a projekcí dostáváme (2).
- vlastnosti obdobné B-spline křivkám – lokalizace změn, platí podmínka konvexního obalu, projektivní invariantnost
- pokud jsou váhy všech řídících bodů stejné, dostáváme polynomiální B-spline křivku

NURBS křivky

- pokud $\mathbf{P}_i$ a w_i, $i = 0, \dots, n$ jsou řídící body a váhy NURBS křivky, T je vektor parametrizace, potom parametrizace NURBS křivky stupně p je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i} \tag{2}$$

- pokud $\mathbf{P}_i^w$ jsou příslušné projektivní řídící body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) (w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

  a projekcí dostáváme (2).
- vlastnosti obdobné B-spline křivkám – lokalizace změn, platí podmínka konvexního obalu, projektivní invariantnost
- pokud jsou váhy všech řídících bodů stejné, dostáváme polynomiální B-spline křivku
- (racionální) Bézierovy křivky a B-spline křivky jsou tedy speciálními případy NURBS křivek