

# Geometrické modelování, ZS 2020-21

Toto je seznam vět a definic, které budou u zkoušky vyžadovány formálně přesně včetně důkazů. Důkazy jsou jen naznačeny, přesně byly na přednášce. Ostatní látka z prezentací bude zkoušena orientačně. Zkouška bude písemná a ústní. Písemná část bude trvat 90 minut, bude se při ní používat pouze papír a tužka a otázky mohou vypadat například takto:

1. Formulujte a dokažte větu o souvislosti znaménkové křivosti a změny směru křivky.
2. Pomocí DeCastelja algoritmu vypočtete bod  $\mathbf{c}(1/2)$  pro Bézierovu křivku s řídicími body  $\mathbf{P}_0 = [1, 2]$ ,  $\mathbf{P}_1 = [0, -1]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [-1, 1]$ . V tomto bodě určete tečnou přímkou, znaménkovou křivost a oskulační kružnici.
3. Dokažte vzorec pro derivaci Bézierovy křivky.

## 1 Křivky v rovině a jejich transformace

**Definice 1.1.** Buď  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy  $C^\infty$ )  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se nazývá *parametrizovaná křivka* v  $\mathbb{R}^2$ . Množina  $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^2$  se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže  $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0)^T$  pro každé  $t \in I$ .

**Poznámka.** Je-li  $I$  uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na  $I$  restrikcí na  $I$  diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na  $I$ , tedy  $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$ . Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby  $\mathbf{c}$  a  $\phi$  bylo třídy  $C^\infty$ , ale podle situace postačí nižší hladkost, například  $C^1, C^2, C^3$ .

**Definice 1.2.** Je-li  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka a  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  difeomorfismus intervalu  $\tilde{I}$  na  $I$ , je  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako  $\mathbf{c}$ . Difeomorfismus  $\phi$  pak nazýváme *změnou parametru* a  $\tilde{\mathbf{c}}$  *reparametrizací*  $\mathbf{c}$ . Je-li navíc  $\phi' > 0$  na  $\tilde{I}$ , nazveme  $\tilde{\mathbf{c}}$  reparametrizací  $\mathbf{c}$  *zachovávající orientaci*.

**Definice (a lemma) 1.3.** Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

**Důkaz:** Difeomorfismus je zobrazení  $\Phi : \tilde{I} \rightarrow I$  které je bijekce, hladké  $C^\infty$  a  $\Phi' \neq 0$  všude. Z toho plyne, že  $\Phi^{-1}$  je také difeomorfismus.

- Tranzitivita: složení difeomorfismů je difeomorfismus, tedy  $(\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \Phi \text{ a } \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \psi) \Rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{c} \circ (\Phi \circ \psi)$
- Symetrie: inverze difeomorfismu je difeomorfismus, tedy když  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \Phi \Rightarrow \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \Phi^{-1}$
- Reflexivita: identita je difeomorfismus a tedy  $\mathbf{c} = \mathbf{c} \circ id$
- Orientace: složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy  $(id' > 0); (\Phi' > 0) \Rightarrow (\Phi^{-1})' > 0; (\Phi' > 0 \ \& \ \psi' > 0) \Rightarrow (\Phi \circ \psi)' > 0$ .

□

**Poznámka.** Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.

**Poznámka.** Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrizovanou křivku  $\mathbf{c}(t)$  budeme její reparametrizaci  $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$  označovat jednoduše  $\mathbf{c}(s)$ . Dále budeme psát například  $t(s)$  namísto  $t = \phi(s)$  a v důsledku i  $s(t)$  namísto  $s = \phi^{-1}(t)$ . Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například  $\mathbf{c}'$  místo  $\mathbf{c}'(t)$  a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci  $\frac{d}{dt}$  a tečka derivaci  $\frac{d}{ds}$ .

**Lemma 1.4.** Pro derivace dvou parametrizací  $\mathbf{c}(t)$  a  $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$  téže křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{t} & 0 & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 & 0 \\ \ddot{\ddot{t}} & 3\dot{t}\ddot{t} & \dot{t}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'' \\ \mathbf{c}''' \end{pmatrix}.$$

**Důkaz:** Přímý výpočet derivace složené funkce,

1.

$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{d}{ds} \mathbf{c}(t(s)) = \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) \frac{dt}{ds} = \dot{t} \mathbf{c}'.$$

2.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{c}} &= \dot{t} \mathbf{c}' \quad \Big| \quad \frac{d}{ds} \\ \ddot{\mathbf{c}} &= \ddot{t} \cdot \mathbf{c}' + \dot{t} \cdot \dot{t} \cdot \mathbf{c}'' = \ddot{t} \cdot \mathbf{c}' + (\dot{t})^2 \cdot \mathbf{c}'' \end{aligned}$$

3.

$$\ddot{\ddot{\mathbf{c}}} = \ddot{\ddot{t}} \cdot \mathbf{c}' + \ddot{t} \cdot \dot{t} \cdot \mathbf{c}'' + 2\dot{t} \cdot \ddot{t} \cdot \mathbf{c}'' + (\dot{t})^2 \cdot \dot{t} \cdot \mathbf{c}''' = \ddot{\ddot{t}} \cdot \mathbf{c}' + 3\dot{t} \cdot \ddot{t} \cdot \mathbf{c}'' + (\dot{t})^3 \cdot \mathbf{c}'''$$

□

**Definice (a lemma) 1.5.** Délku křivky dané parametrizací  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in I = (\alpha, \beta)$  definujeme jako určitý integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

který nezávisí na parametrizaci.

**Důkaz:** Pro případ rostoucí reparametrizační funkce  $t(s)$  zobrazující interval  $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$  na interval  $[\alpha, \beta]$  platí, že  $\dot{t} > 0$  a podle věty o substituci

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{t} \mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \dot{t} \|\mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pro případ klesající  $t(s)$  dostaneme, že se interval  $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$  zobrazí na  $[\beta, \alpha]$ , a že  $\dot{t} < 0$ , tedy

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{t} \mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} -\dot{t} \|\mathbf{c}'(t)\| ds = - \int_{\beta}^{\alpha} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

□

**Definice (a lemma) 1.6.** V každém bodě orientované křivky dané parametrizací  $\mathbf{c}(t)$  definujeme její rychlosti budeme označovat  $r(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$ . jednotkový tečný vektor výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Dále definujeme normálový vektor  $\mathbf{n}_*(t)$  tak, aby  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$  byla kladně orientovaná ortonormální báze  $\mathbb{R}^2$ . Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

**Důkaz:** Derivováním dostáváme

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(s)}{\|\dot{\mathbf{c}}(s)\|} = \frac{\dot{t}\mathbf{c}'(t)}{\|\dot{t}\mathbf{c}'(t)\|} = \frac{\dot{t}}{|\dot{t}|} \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t})\mathbf{t}(t).$$

Navíc platí

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t) \Rightarrow \mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \text{sign}(\dot{t}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{t})\mathbf{n}_*(t)$$

□

**Definice (a lemma) 1.7.** Pro regulární parametrizovanou křivku  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

**Důkaz:**

$$\frac{\det(\dot{\mathbf{c}}(s), \ddot{\mathbf{c}}(s))}{\|\dot{\mathbf{c}}(s)\|^3} = \frac{\det \begin{bmatrix} \dot{t} & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}'(t) \\ \mathbf{c}''(t) \end{pmatrix}}{\|\dot{t}\mathbf{c}'(t)\|^3} = \frac{\dot{t}^3}{|\dot{t}|^3} \cdot \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

□

**Definice (a lemma) 1.8.** Označme souřadnice bodů v rovině  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ . Eukleidovské shodnosti (isometrie) jsou právě zobrazení  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ , kde  $A$  je orthonormální matice. Takovou shodnost nazýváme *přímou*, právě když  $\det(A) = 1$ . Každá *přímá* shodnost je posunutí (tedy  $A = I$ ) nebo otočení (okolo vhodného bodu).

**Důkaz:** Z LA víme, že *přímé* shodnosti mají tvar

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}.$$

Pro případ  $\phi = 0$  dostáváme  $A = I$  tedy posunutí. Pro  $\phi \neq 0$  má zobrazení právě jeden pevný bod

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

který je středem otočení o úhel  $\phi$ . Protože platí

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{pmatrix}}_M = (1 - \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi = 2 - 2 \cos \phi = 2(1 - \cos \phi) > 0,$$

matice  $M$  je regulární  $\Rightarrow$  soustava  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$  má právě jedno řešení  $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ . □

**Věta 1.9.** Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou invariantní vůči *přímým* shodnostem  $\mathbb{R}^2$ . Přesněji mějme *přímou* shodnost ve tvaru  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ . Máme-li křivku danou parametrizací  $\mathbf{c}(t)$  a v jejím libovolném (neinflexním) bodě  $\kappa_z$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}_*$ , pak křivka  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$  má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost  $\tilde{\kappa}_z = \kappa_z$ , tečný vektor  $\tilde{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$  a normálový vektor  $\tilde{\mathbf{n}}_* = A\mathbf{n}_*$ .

**Důkaz:** Platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t)$$

Tedy

•

$$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{Ac}', \mathbf{Ac}'')}{\|\mathbf{Ac}'\|^3} = \frac{\det(A) \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa_z$$

neboť  $\|v\| = \sqrt{v^T v} \Rightarrow \|\mathbf{Ac}'\| = \sqrt{(\mathbf{Ac}')^T \mathbf{Ac}'} = \sqrt{\mathbf{c}'^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{c}'} = \sqrt{\mathbf{c}'^T \mathbf{c}'} = \|\mathbf{c}'\|$  a  $\det(A) = 1$ .

•  $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{Ac}'}{\|\mathbf{Ac}'\|} = A \left( \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right) = \mathbf{A} \mathbf{t}$

•  $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{n}_*$ .

□

**Definice 1.10.** Pro každou křivku  $\mathbf{c}$  definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$  a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako  $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$ , její *střed křivosti* jako bod  $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t) \mathbf{n}_*(t)$  a kružnici se středem  $S(t)$  a poloměrem  $R(t)$  nazýváme *oskulační kružnice* v bodě  $\mathbf{c}(t)$ .

**Věta 1.11.** Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou a ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

**Důkaz:**

Kontaktem myslíme nejvyšší možnou shodu derivace ve vhodné parametrizaci. Uvažujme tedy dvě křivky a nějakým způsobem sjednocené parametrizace (například obě obloukem)  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  a zajímá nás jejich kontakt v bodě  $t_0$

- kontakt 0. řádu  $\rightarrow \mathbf{c}_1(t_0) = \mathbf{c}_2(t_0)$
- kontakt 1. řádu  $\rightarrow \mathbf{c}'_1(t_0) = \mathbf{c}'_2(t_0)$
- kontakt 2. řádu  $\rightarrow \mathbf{c}''_1(t_0) = \mathbf{c}''_2(t_0)$

Díky lineární reparametrizaci postačí tuto vlastnost studovat v bodě  $t = 0$  a díky přímé shodnosti můžeme navíc předpokládat, že  $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$  a  $\mathbf{c}'(0) = (c'_x(0), 0)$ , kde  $c'_x(0) > 0$ . Máme tedy  $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$  a  $\mathbf{n}_*(0) = (0, 1)$ . V tomto bodě uvažujeme Taylorův rozvoj křivky

$$\mathbf{c}(t) = \left( c'_x(0)t + \frac{1}{2}c''_x(0)t^2 + o(t^2), \frac{1}{2}c''_y(0)t^2 + o(t^2) \right).$$

Dosazením do obecné rovnice přímky  $Ax + By + C = 0$ , pro  $A \neq 0$  nebo  $B \neq 0$  dostáváme:

$$C + Ac'_x(0)t + \left[ \frac{1}{2}Ac''_x(0) + \frac{1}{2}Bc''_y(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Odtud vyvodíme, že pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit  $C = 0$  a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí navíc platit  $A = 0$ , čímž dostáváme  $By = 0$ , tedy osu  $x$  a tím tečnou přímkou a  $B$  musí být nenulové. Kontakt vyššího řádu není možný, neboť pro kontakt řádu 2 by  $c''_y(0) = 0 \Rightarrow \kappa_z(0) = 0$ , což je spor s předpokladem neinflexního bodu.

Dosazením do obecné rovnice kružnice  $(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$  dostáváme:

$$(S_x^2 + S_y^2 - R^2) - 2S_x c'_x(0)t + \left[ c'_x(0)^2 - 2S_x \frac{1}{2}c''_x(0) - 2S_y \frac{1}{2}c''_y(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Tedy pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit  $R^2 = S_x^2 + S_y^2$  a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí platit  $S_x = 0$ . Pro kontakt řádu 2 (trojnásobný průsečík) pak  $S_y = c'_x(0)^2 / c''_y(0) = 1 / \kappa_z(0)$ , neboť

$$\kappa_z(0) = \frac{\begin{vmatrix} c'_x(0) & c''_x(0) \\ 0 & c''_y(0) \end{vmatrix}}{|c'_x(0)|^3} = c''_y(0) / c'_x(0)^2,$$

čímž dostáváme oskulační kružnici. Kontakt vyššího řádu není obecně možný, neboť jsme vyčerpali všechny volné parametry. Může nastat pouze v případě, že  $\kappa'_z(0) = 0$ , tedy v kritickém bodě křivosti, například v jejím maximu. □

**Věta 1.12.** Označme funkci rychlosti  $r(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$ . Pro regulární parametrizovanou křivku  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  platí

$$\mathbf{t}'(t) = r(t)\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Existuje hladká funkce  $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ ,  $t \in I$  a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{r(t)}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí  $r(t) = 1$ , pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny křivky. Funkce  $r(t)$  a  $\kappa_z(t)$  určují křivku až na přímou shodnost.

**Důkaz:** Uvědomme si, že  $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$ . Derivováním a úpravami dostaneme

$$\mathbf{t}' = \left( \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right)' = \frac{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} \cdot \mathbf{c}'' - \frac{1}{2} \frac{2 \cdot \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''}{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}} \cdot \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} = \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3},$$

Dále platí  $\|\mathbf{t}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}} = 1 \Rightarrow \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$  derivováním získáme  $2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$  a proto je  $\mathbf{t}'$  násobkem  $\mathbf{n}_*(t)$ , tedy  $\mathbf{t}' = K\mathbf{n}_*(t)$ . Z rovností

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K\mathbf{n}_*(t)) = K \underbrace{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*(t))}_{=1} = K$$

a

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det\left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3}\right) = \det\left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}'\|^3}\right) - \underbrace{\det\left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3}\right)}_0 =$$

$$\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \cdot \frac{1}{\|\mathbf{c}'\|^2} = \underbrace{\frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3}}_{\kappa_z} \cdot \underbrace{\|\mathbf{c}'\|}_{=r}$$

dostaneme, že  $K = r\kappa_z$ . Funkce  $\theta$  je spojitou verzí argumentu funkce  $\mathbf{t}(t)$  a její existence a diferencovatelnost je známá z komplexní analýzy.  $\mathbf{t}'(t) = \theta'(t) \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$  z předchozí části máme

$$\theta'(t) = r(t)\kappa_z(t). \quad \square$$

**Věta 1.13.** Na otevřeném intervalu  $I$  budiž zadány dvě hladké reálné funkce  $k(t)$ ,  $r(t)$ , přičemž  $r(t) > 0$  pro  $t \in I$ . Pak existuje až na přímou podobnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in I$ , pro kterou platí

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = r(t), \quad \kappa_z(t) = f(t).$$

## 2 Beziérový křivky

**Definice 2.1.**  $i$ -tý Bernsteinův polynom stupně  $n$  definujeme jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}.$$

**Věta 2.2.** Následující vlastnosti platí pro každou volbu indexů. Jestliže je  $i < 0$  nebo  $i > n$ , pak klademe  $B_i^n(t) = 0$ .

1.  $B_i^n(t)$  je nezáporný na  $[0, 1]$  a pro  $n > 0$  má na tomto intervalu jediné maximum v bodě  $t = i/n$ .

2. Pro každé  $n$  je  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ .

3. Symetrie  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ .

4. Rekurence

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

5. Derivace

$$B_i^n(t)' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

6. Vnoření prostorů  $\mathcal{P}_n[t] \subset \mathcal{P}_{n+1}[t]$  je realizováno vztahem

$$B_i^n(t) = \frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t).$$

**Důkaz:**

1.  $B_i^n(t) = \binom{n}{i}[it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \binom{n}{i}t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}[i(1-t) - (n-i)t] = \underbrace{\binom{n}{i}t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}}_{\geq 0}(i-nt)$ . Pro  $t \in [0, \frac{i}{n}]$  je  $(i-nt) > 0$  a pro  $t \in (\frac{i}{n}, 1]$  platí  $(i-nt) < 0$  a tedy maximum je v bodě  $t = i/n$ .

2.  $1^n = ((1-t) + t)^n = \underbrace{(1-t)^n}_{B_0^n} + \underbrace{\binom{n}{1}t(1-t)^{(n-1)}}_{B_1^n} + \dots + \underbrace{\binom{n}{i}t^i(1-t)^{(n-i)}}_{B_i^n} + \dots + \underbrace{t^n}_{B_n^n}$

3.  $B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i}(1-t)^{n-i}(1-(1-t))^{n-(n-i)} = \binom{n}{i}t^i(1-t)^{(n-i)} = B_i^n(t)$

4.

$$(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) = (1-t)\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{(n-1-i)} + t\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{(n-1-i)} = \underbrace{\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]}_{\binom{n}{i}}t^i(1-t)^{n-i} = B_i^n(t)$$

5.

$$\begin{aligned} B_i^n(t)' &= \binom{n}{i}[it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!}it^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)t^i(1-t)^{n-i-1} = \\ &= n \left[ \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}t^i(1-t)^{n-i-1} \right] = \\ &= n \left[ \binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)} - \binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-1-i} \right] = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t) &= \frac{n-i+1}{n+1}\binom{n+1}{i}t^i(1-t)^{n+1-i} + \\ \frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}t^{i+1}(1-t)^{n+1-i-1} &= \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n+1-i} + \binom{n}{i}t^{i+1}(1-t)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}((1-t) + t) = B_i^n(t) \end{aligned}$$

□

**Definice 2.3.** Mějme posloupnost  $n + 1$  bodů  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$ . Tyto body nazýváme *řídící body* a lomenou čáru, která je postupně spojuje nazýváme *řídící polygon*. Pak definujeme *Bézierovu křivku*

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

**Věta 2.4.** *Bézierova křivka leží v konvexním obalu svých řídících bodů.*

**Důkaz:** Polynomy daného stupně tvoří rozklad jednotky. □

**Věta 2.5.** *Jestliže  $\mathbf{c}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  a  $\tilde{\mathbf{c}}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$ , kde  $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{n-i}$ , pak  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(1 - t)$ .*

**Důkaz:**  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{n-i} B_i^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(1-t) = \mathbf{c}(1-t)$ . □

**Věta 2.6.** *Mějme Eukleidovskou shodnost ve tvaru  $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$ . Jestliže  $\mathbf{c}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  a  $\tilde{\mathbf{c}}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$ , kde  $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{A}\mathbf{P}_i + \mathbf{a}$ , pak  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ .*

**Důkaz:**  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n (\mathbf{A}\mathbf{P}_i + \mathbf{a}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}\mathbf{P}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{a} B_i^n(t) = \mathbf{A} \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)}_{=\mathbf{c}(t)} + \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)}_{=1} = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ . □

**Věta 2.7.** *Pro derivaci (hodograph) křivky  $\mathbf{c}(t)$  s řídícími body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$  platí*

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde  $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$ .

**Důkaz:** Pro zjednodušení zápisu značme  $B_i^n := B_i^n(t)$ . Víme  $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) \Rightarrow$

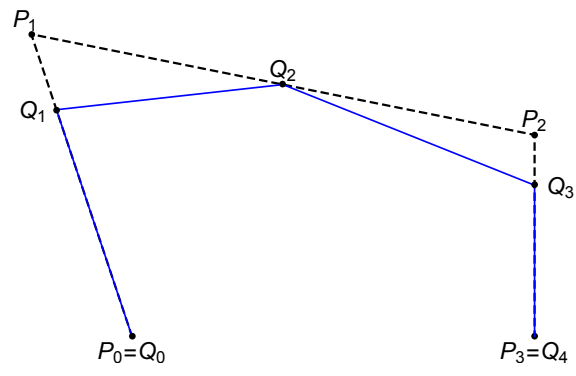
$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \mathbf{P}_0 (B_0^n(t))' + \mathbf{P}_1 (B_1^n(t))' + \dots + \mathbf{P}_{n-1} (B_{n-1}^n(t))' + \mathbf{P}_n (B_n^n(t))' = \\ &= \mathbf{P}_0 n(B_{-1}^{n-1} - B_0^{n-1}) + \mathbf{P}_1 n(B_0^{n-1} - B_1^{n-1}) + \dots + \mathbf{P}_{n-1} n(B_{n-2}^{n-1} - B_{n-1}^{n-1}) + \mathbf{P}_n n(B_{n-1}^{n-1} - B_n^{n-1}) = \\ &= n \mathbf{P}_0 \underbrace{B_{-1}^{n-1}}_{=0} - n \mathbf{P}_0 B_0^{n-1} + n \mathbf{P}_1 B_0^{n-1} - n \mathbf{P}_1 B_1^{n-1} + \dots + n \mathbf{P}_{n-1} B_{n-2}^{n-1} - n \mathbf{P}_{n-1} B_{n-1}^{n-1} + \\ &= n \mathbf{P}_n B_{n-1}^{n-1} - n \mathbf{P}_n \underbrace{B_n^{n-1}}_{=0} = B_0^{n-1} \underbrace{(n \mathbf{P}_1 - n \mathbf{P}_0)}_{\mathbf{Q}_0} + \dots + B_{n-1}^{n-1} \underbrace{(n \mathbf{P}_n - n \mathbf{P}_{n-1})}_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

□

**Věta 2.8** (Degree elevation). *Křivku  $\mathbf{c}(t)$  s řídícími body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$  lze také vyjádřit jako křivku s řídícími body  $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n + 1$  a*

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{P}_i$$

(při využití konvence  $\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{f}0$ ).





**Důkaz:**

- $i = 0$  :  $\mathbf{Q}_0 = \frac{0}{n+1}\mathbf{P}_1 + (1 - \frac{0}{n+1})\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0$
- $0 < i < n + 1$  :  $\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})\mathbf{P}_i$
- $i = n + 1$  :  $\mathbf{Q}_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\mathbf{P}_n + (1 - \frac{n+1}{n+1})\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$

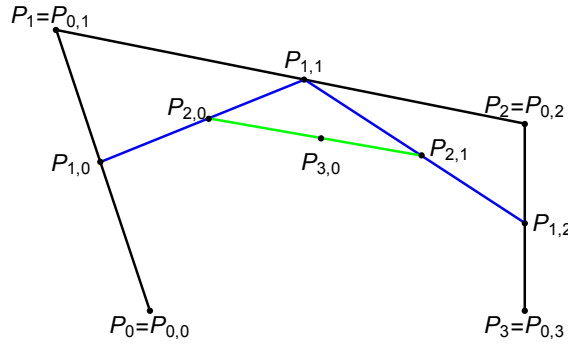
Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \left[ \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} B_j^{n+1}(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} B_j^{n+1}(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[ \mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} + \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} \right] B_j^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \underbrace{\left[ \frac{j}{n+1} \mathbf{P}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1}) \mathbf{P}_j \right]}_{\mathbf{Q}_j} B_j^{n+1}(t) \end{aligned}$$

□

**Definice 2.9.** Mějme řídicí body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$  a odpovídající Bézierovu křivku  $\mathbf{c}(t)$ . DeCasteljau algoritmus vypočítá pro každé pevné  $t \in [0, 1]$  systém bodů  $\mathbf{P}_{i,j}$  indexovaný dvěma indexy  $i = 0, \dots, n$  a  $j = 0, \dots, (n - i)$  takto:

- pro  $i = 0$  :  $\mathbf{P}_{0,j} := \mathbf{P}_j$
- pro  $i > 0$  :  $\mathbf{P}_{i,j} := (1 - t)\mathbf{P}_{i-1,j} + t\mathbf{P}_{i-1,j+1}$



**Lemma 2.10.** V DeCasteljau algoritmu s pevným  $t \in [0, 1]$  pro každou legální volbu indexů  $i, k, m$  platí

$$\mathbf{P}_{i+m,k} = \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t).$$

**Důkaz:** Indukcí podle  $m$ .

- $m = 0$  :  $\mathbf{P}_{i,k} = \sum_{j=0}^0 \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^0(t) = \mathbf{P}_{i,k}$ .
- $m \rightarrow m + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^{m+1}(t) &= \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} [(1-t)B_j^m(t) + tB_{j-1}^m(t)] = \\ (1-t) \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_{j-1}^m(t) &= (1-t) \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k+1} B_j^m(t) = \\ &= (1-t)\mathbf{P}_{i+m,k} + t\mathbf{P}_{i+m,k+1} = \mathbf{P}_{i+m+1,k}. \end{aligned}$$

□

**Věta 2.11.** V algoritmu DeCasteljau  $t \in [0, 1]$  je  $\mathbf{P}_{n,0} = \mathbf{c}(t)$  a úsečka  $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$  je tečnou v tomto bodě.

**Důkaz:** Z předchozího lemmatu pro  $m = n, k = 0, i = 0$ , plyne  $\mathbf{P}_{n,0} = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{0,j} B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t) = \mathbf{c}(t)$ . Pro tečnu z předchozího lemmatu a Věty 2.7. máme  $\mathbf{P}_{n-1,1} - \mathbf{P}_{n-1,0} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j+1} B_j^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j} B_j^{n-1}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j) B_j^{n-1}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{c}'(t)$ . Tedy úsečka  $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$  leží v lineárním obalu jednotkového tečného vektoru a tedy určuje tečnu.  $\square$

### 3 Lagrangeova a Hermitova interpolace

**Definice 3.1.** Mějme zadány hodnoty proměnné  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \in \mathbb{R}$  a funkční hodnoty  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že polynom  $f(x)$  je *Lagrangeovým interpolačním polynomem* těchto hodnot, jestliže platí

$$f(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

**Věta 3.2.** Pro každé vstupní hodnoty existuje právě jeden interpolant stupně nejvýše  $n$ .

**Důkaz:**  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Podmínka:  $f(x_i) = f_i$  dává  $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = f_i$ . Všechny podmínky dávají soustavu lineárních rovnic s Vandermondovou maticí  $M_{n+1 \times n+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$\det M = \prod_{j,i=0, i \neq j}^n (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow M$  regulární, máme jediné řešení  $\begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$   $\square$

**Definice (a lemma) 3.3.** Pro zadaná  $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$  definujeme *Lagrangeovy polynomy*

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mějme funkční hodnoty  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ , pak pro interpolační polynom z předchozí věty platí, že je roven

$$\sum_{i=0}^n f_i l_i(x).$$

**Důkaz:** Plyne z toho, že  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ . Neboť

- pro  $i = j$

$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \Rightarrow \delta_{jj} = 1,$$

- pro  $i \neq j$

$$l_i(x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 0.$$

Definujme  $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$ , tedy  $f(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i \delta_{ij} = f_j$   $\square$

**Věta 3.4.** Mějme  $g(x) \in C^2[a, b]$ , tedy funkce se spojitou druhou derivací na intervalu  $[a, b]$  a označme  $K = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$ . Necht  $f(x)$  je lineární Lagrangeův interpolační polynom v bodech  $a, b$ , tedy polynom stupně nejvýše 1 splňující

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b).$$

Pak platí

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b-a)^2 \frac{K}{4 \cdot 2}.$$

**Důkaz:** Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x)$       $r(a) = r(b) = 0$
- $h(x) = (x-a)(b-x)$       $h(a) = h(b) = 0$  a  $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$
- Zvolme libovolné  $x_0 \in (a, b)$ . Definujme  $F(x) = r(x) - Lh(x)$ , kde  $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$ .

Pak  $F(a) = F(b) = 0$  a také  $F(x_0) = 0$ .  $F$  je  $C^2$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$  takové, že  $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$  takové, že  $F'(x_2) = 0$

Funkce  $F'$  je  $C^1$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje  $x_3 \in (x_1, x_2)$  takové, že  $F''(x_3) = 0$ . Zároveň

$$F''(x_3) = r''(x_3) - Lh''(x_3) = g''(x_3) + 2L$$

neboť  $h''(x) = -2$  a  $f''(x) = 0$ . Tedy

$$L = \frac{g''(x_3)}{-2} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

□

**Definice 3.5.** Mějme zadány hodnoty proměnné  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , násobnosti derivací  $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  a hodnoty  $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že polynom  $f(x)$  je *Hermitovým interpolačním polynomem* těchto dat, jestliže

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

**Definice 3.6.** *Fergusonovu bázi* polynomů stupně nejvýše 3 definujeme jako posloupnost

$$\mathcal{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x)),$$

kde

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ r_1(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ r_3(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}$$

**Věta 3.7.** *Fergusonova báze trivializuje Hermitovu interpolaci prvního řádu v bodech 0 a 1, přesněji*

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x)$$

*je Hermitův interpolant pro hodnoty proměnné  $(0, 0, 1, 1)$  a pro násobnosti derivací  $(0, 1, 0, 1)$ .*

**Důkaz:** Přímým výpočtem:  $f'(x) = f_0 r_0'(x) + f_1 r_1'(x) + f_2 r_2'(x) + f_3 r_3'(x)$ , kde

$$\begin{aligned} r_0'(x) &= -6x + 6x^2 \\ r_1'(x) &= 1 - 4x + 3x^2 \\ r_2'(x) &= 6x - 6x^2 \\ r_3'(x) &= -2x + 3x^2. \end{aligned}$$

odtud již získáme

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0 r_0(0) + f_1 r_1(0) + f_2 r_2(0) + f_3 r_3(0) = f_0 \\ f'(0) &= f_0 r_0'(0) + f_1 r_1'(0) + f_2 r_2'(0) + f_3 r_3'(0) = f_1 \\ f(1) &= f_0 r_0(1) + f_1 r_1(1) + f_2 r_2(1) + f_3 r_3(1) = f_2 \\ f'(1) &= f_0 r_0'(1) + f_1 r_1'(1) + f_2 r_2'(1) + f_3 r_3'(1) = f_3. \end{aligned}$$

Další možností je důkaz provést pomocí matice přechodu k monomiální bázi. □

**Věta 3.8.** Mějme  $g(x) \in C^4[a, b]$ , tedy funkce se spojitou čtvrtou derivací na intervalu  $[a, b]$  a označme  $K = \max_{x \in [a, b]} |g''''(x)|$ . Necht  $f(x)$  je  $C^1$  Hermitův interpolační polynom na intervalu  $[a, b]$ , tedy polynom stupně nejvýše 3 splňující

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad f(b) = g(b), \quad f'(b) = g'(b).$$

Pak platí

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b-a)^4 \frac{K}{16 \cdot 24}.$$

**Důkaz:** Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \quad r(a) = r(b) = r'(a) = r'(b) = 0$
- $h(x) = (x-a)^2(b-x)^2 \quad h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$  a  $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$
- Zvolme libovolné  $x_0 \in (a, b)$ . Definujme  $F(x) = r(x) - Lh(x)$ , kde  $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$ .

Pak  $F(a) = F(b) = 0$  a také  $F(x_0) = 0$ .  $F$  je  $C^4$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$  takové, že  $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$  takové, že  $F'(x_2) = 0$
- navíc však  $F'(a) = F'(b) = 0$ .

Funkce  $F'$  je  $C^3$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existují  $x_3 \in (a, x_1)$ ,  $x_4 \in (x_1, x_2)$ ,  $x_5 \in (x_2, b)$  takové, že  $F''(x_3) = F''(x_4) = F''(x_5) = 0$ . Funkce  $F''$  je  $C^2$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existují  $x_6 \in (x_3, x_4)$ ,  $x_7 \in (x_4, x_5)$  takové, že  $F'''(x_6) = F'''(x_7) = 0$ . Funkce  $F'''$  je  $C^1$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje  $x_8 \in (x_6, x_7)$  takové, že  $F''''(x_8) = 0$ .

Zároveň

$$F''''(x_8) = r''''(x_8) - Lh''''(x_8) = g''''(x_8) - 24L$$

neboť  $h''''(x) = 24$  a  $f''''(x) = 0$ . Tedy

$$L = \frac{g''''(x_8)}{24} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{24} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

□

**Věta 3.9.** Mějme dána  $C^1$  Hermitovská data v rovině, tedy body  $P_0, P_1$  a jednotkové vektory  $U_0, U_1$ . Označme  $K$  jedinou kružnici (případně degenerovanou do přímky), která prochází body  $P_0, P_1$  a s vektory  $U_0, U_1$  svírá stejně velký orientovaný úhel. Necht  $J \in \mathbb{R}^2$  je libovolný bod různý od  $P_0, P_1$ . Pak existuje právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky)  $O_0$  interpolující data  $P_0, U_0$  a  $J$  a právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky)  $O_1$  interpolující data  $J, P_1, U_1$ . Tyto dva oblouky navazují v bodě  $J$  se spojitostí  $C^1$  právě tehdy, když  $J \in K$ .

**Důkaz:** Kružnice  $K$  realizuje symetrii dat, oblouky  $O_0, O_1$  s ní svírají stejné úhly. □

## 4 B-spline a NURBs křivky

**Definice 4.1.** Pro posloupnost reálných čísel  $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ ,  $t_i \leq t_{i+1}$  (tzv. uzlů) definujeme rekurentně funkce  $N_{i,p}(t)$ ,  $i = 0, \dots, (m-p-1)$  stupně  $p$  takto

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

Pro pevné  $p$  označme  $n = m - p - 1$  a pro řídicí body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ ,  $i = 0, \dots, n$ , je B-spline křivka stupně  $p$  dána vztahem

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t), \quad t \in [t_p, t_{m-p}].$$

**Definice 4.2.** Pro řídicí body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ ,  $i = 0, \dots, n$  a váhy těchto bodů  $w_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 0, \dots, n$ , definujeme racionální Bézierovu křivku

$$\tilde{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Zjevně pro libovolné kladné  $\mu$  platí, že váhy  $\tilde{w}_i = \mu w_i$  definují stejnou parametrickou křivku, protože  $\mu$  se zkrátí.

**Věta 4.3.** Necht'  $\tilde{c}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  je racionální Bézierova křivka s řídicími body  $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$  a váhami  $(w_0, \dots, w_n)$ . Zvolme  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  a definujme  $\tilde{c}(s)$ ,  $s \in [0, 1]$  jako reparametrizaci  $\tilde{c}(t)$  pomocí funkce

$$t = t(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}.$$

Pak  $\tilde{c}(s)$  je racionální Bézierova křivka s týmiž řídicími body  $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$  a s váhami  $(\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n)$ , kde  $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$ .

**Důkaz:** Přímým dosazením dostáváme

$$B_i^n(t(s)) = \binom{n}{i} \left( \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1} \right)^i \left( 1 - \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1} \right)^{(n-i)} =$$

$$\binom{n}{i} \frac{(\lambda s)^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^i} \frac{[(\lambda - 1)s + 1 - \lambda s]^{(n-i)}}{[(\lambda - 1)s + 1]^{(n-i)}} =$$

$$\binom{n}{i} \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n} s^i (1 - s)^{n-i} = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n}$$

a tedy i

$$\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i B_i^n(s)} = \tilde{c}(s).$$

□

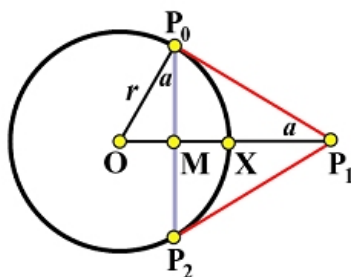
**Důsledek 4.4.** Každou racionální křivku je možno parametrizovat tak, že první a poslední váha je rovna 1.

**Důkaz:** Mějme křivku s váhami  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  a nějakými řídicími body. Řídicí body ponecháme a definujeme nové váhy  $\tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_0}$ , které nám zajistí  $\tilde{w}_0 = 1$  a podle Definice 4.2 popisují stejnou parametrizaci.

Dále definujeme  $\tilde{w}_i = \tilde{w}_n^{-\frac{i}{n}} \tilde{w}_i$ , která zajistí  $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_n = 1$  a podle Věty 4.3 je reparametrizací téže křivky.

□

**Věta 4.5.** Kvadratická racionální Bézierova křivka  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  s řídicími body  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  a váhami  $(w_0, w_1, w_2) = (1, w, 1)$  je parametrizací kruhového oblouku právě tehdy, když  $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|$ , body  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  nejsou kolineární a  $w = \sin a$ , kde  $a = \frac{\sphericalangle \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{2}$ .



## 5 Plochy a subdivize

**Definice 5.1.** Pro dvě prostorové křivky  $\mathbf{a}_0(v)$ ,  $\mathbf{a}_1(v)$  parametrizované na stejném intervalu  $I$ , definujeme jejich lineární přechodovou plochu

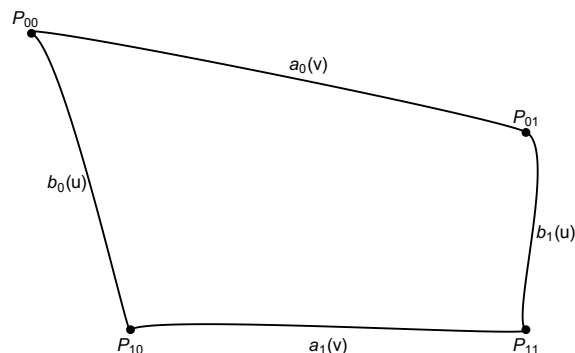
$$\mathbf{P}(u, v) = (1 - u)\mathbf{a}_0(v) + u\mathbf{a}_1(v), \quad u \in [0, 1], v \in I.$$

**Definice 5.2.** Pro prostorové křivky  $\mathbf{a}_0(v)$ ,  $\mathbf{a}_1(v)$ ,  $v \in [0, 1]$  a  $\mathbf{b}_0(u)$ ,  $\mathbf{b}_1(u)$ ,  $u \in [0, 1]$  takové, že

$$\mathbf{a}_0(0) = \mathbf{b}_0(0) =: \mathbf{P}_{00}, \quad \mathbf{a}_0(1) = \mathbf{b}_1(0) =: \mathbf{P}_{01}, \quad \mathbf{a}_1(0) = \mathbf{b}_0(1) =: \mathbf{P}_{10}, \quad \mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1(1) =: \mathbf{P}_{11}$$

definujeme plochu  $\mathbf{P}(u, v)$  zvanou Coonsův bilineární plát jako řešení rovnice

$$(1 - u, -1, u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u, v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = 0,$$



**Věta 5.3.** Coonsův bilineární plát interpoluje zadané křivky, přesněji

$$\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v), \quad \mathbf{P}(1, v) = \mathbf{a}_1(v), \quad \mathbf{P}(u, 0) = \mathbf{b}_0(u), \quad \mathbf{P}(u, 1) = \mathbf{b}_1(u).$$

**Důkaz:** Ukážeme, že  $\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v)$ . Jelikož  $u = 0$ , máme:

$$(1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(0) & \mathbf{P}(0, v) & \mathbf{b}_1(0) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

tedy

$$(0, \mathbf{a}_0(v) - \mathbf{P}(0, v), 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\mathbf{a}_0(v) + \mathbf{P}(0, v) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_0(v) = \mathbf{P}(0, v).$$

□

**Definice 5.4.** *Obdélníková (tensor-product) Bézierova plocha* je pro danou řídicí síť  $\mathbf{P}_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$  dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

kde  $B_i^m(u)$ ,  $B_j^n(v)$  jsou Bernsteinovy polynomy.

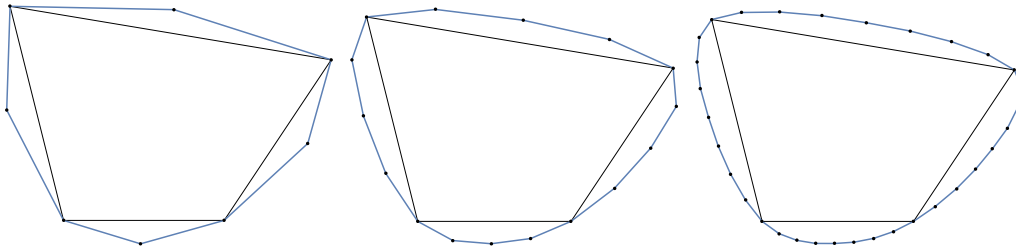
**Definice 5.5.** *NURBS plocha* je určena sítí řídicích bodů  $\mathbf{P}_{i,j}$ , jejich váhami  $w_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$ , dvěma uzlovými vektory  $U = (u_0, \dots, u_k)$  a  $V = (v_0, \dots, v_l)$  a stupni  $p, q$ . Parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}.$$

**Definice 5.6.** *Čtyřbodové schéma pro křivky* je interpolační schéma, které mezi každé dva body  $v_i, v_{i+1}$  vloží nový bod a původní zůstávají. Geometrická pravidla jsou následující:

$$v'_{2i} = v_i, \quad v'_{2i+1} = -\frac{1}{16}v_{i-1} + \frac{9}{16}v_i - \frac{9}{16}v_{i+1} - \frac{1}{16}v_{i+2}.$$

Čtyřbodové schéma zachovává výchozí řídicí polygon ve všech krocích. Výchozí body jsou tedy obsažené také v limitní křivce.



**Definice 5.7.** *Doo-Sabin pro plochy* je aproximační metoda založená na ořezávání vrcholů dané sítě. Každému vrcholu je přiřazeno tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje. Metoda vypočte pro každou stěnu její těžiště  $c$  jako průměr všech vrcholů. Poté každému vrcholu  $v_i$  stěny přiřadí nový vrchol jako střed úsečky  $c, v_i$ . Nově vzniklá síť obsahuje stěny tří typů (v závorce je uvedena, barva odpovídající stěně v obrázku):

- F-stěny: (Modrá) Pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna a to spojením nových vrcholů dané stěny.
- E-stěny: (Zelená) Jsou sestrojeny pro každou hranu původní sítě propojením čtyř nově vzniklých vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů hrany.
- V-stěny: (Červená) Vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě. Pokud měl vrchol valenci  $n$  (počet hran vedoucích do vrcholu), je V-stěna  $n$ -úhelník.

