

Geometrické modelování, ZS 2021-22

Toto je seznam vět a definic, které budou u zkoušky vyžadovány formálně přesně včetně důkazů. Kapitola 1 je zde jen pro úplnost, nebude zkoušena teoreticky. Vyžaduje se však, aby studenti znali definice a byli schopni s nimi prakticky pracovat (výpočet znaménkové křivosti, oskulační kružnice, reparametrizace atd.) Důkazy jsou jen naznačeny, přesně byly na přednášce. Ostatní látka z prezentací bude zkoušena orientačně. Zkouška bude písemná a ústní. Písemná část bude trvat 90 minut, bude se při ní používat pouze papír a tužka a otázky mohou vypadat například takto:

1. Formulujte a dokažte větu chybě Lagrangeovy interpolace polynomem stupně 1.
2. Pomocí DeCastelja algoritmu vypočtete bod $\mathbf{c}(1/2)$ pro Bézierovu křivku s řídícími body $\mathbf{P}_0 = [1, 2]$, $\mathbf{P}_1 = [0, -1]$, $\mathbf{P}_2 = [-1, 1]$. V tomto bodě určete tečnou přímkou, znaménkovou křivost a oskulační kružnici.
3. Dokažte vzorec pro derivaci Bézierovy křivky.

1 Křivky v rovině a jejich transformace

Definice 1.1. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v \mathbb{R}^2 . Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikcí na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na I , tedy $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$. Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby \mathbf{c} a ϕ bylo třídy C^∞ , ale podle situace postačí nižší hladkost, například C^1, C^2, C^3 .

Definice 1.2. Je-li $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ difeomorfismus intervalu \tilde{I} na I , je $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako \mathbf{c} . Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* \mathbf{c} . Je-li navíc $\phi' > 0$ na \tilde{I} , nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací \mathbf{c} zachovávající orientaci*.

Definice (a lemma) 1.3. Býti reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

Důkaz: Difeomorfismus je zobrazení $\Phi : \tilde{I} \rightarrow I$ které je bijekce, hladké C^∞ a $\Phi' \neq 0$ všude. Z toho plyne, že Φ^{-1} je také difeomorfismus.

- Transitivita: složení difeomorfismů je difeomorfismus, tedy $(\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \Phi \text{ a } \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \psi) \Rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{c} \circ (\Phi \circ \psi)$
- Symetrie: inverze difeomorfismu je difeomorfismus, tedy když $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \Phi \Rightarrow \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \Phi^{-1}$
- Reflexivita: identita je difeomorfismus a tedy $\mathbf{c} = \mathbf{c} \circ id$
- Orientace: složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy $(id' > 0); (\Phi' > 0) \Rightarrow (\Phi^{-1})' > 0; (\Phi' > 0 \ \& \ \psi' > 0) \Rightarrow (\Phi \circ \psi)' > 0$.

□

Poznámka. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.

Poznámka. Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrizovanou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Dále budeme psát například $t(s)$ namísto $t = \phi(s)$ a v důsledku i $s(t)$ namísto $s = \phi^{-1}(t)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například \mathbf{c}' místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 1.4. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ téže křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{t} & 0 & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 & 0 \\ \ddot{\ddot{t}} & 3\dot{t}\ddot{t} & \dot{t}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'' \\ \mathbf{c}''' \end{pmatrix}.$$

Důkaz: Přímý výpočet derivace složené funkce,

1.

$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{d}{ds} \mathbf{c}(t(s)) = \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) \frac{dt}{ds} = \dot{t} \mathbf{c}'.$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{c}} &= \dot{t} \mathbf{c}' & | & \frac{d}{ds} \\ \ddot{\mathbf{c}} &= \ddot{t} \cdot \mathbf{c}' + \dot{t} \cdot \dot{t} \cdot \mathbf{c}'' = \ddot{t} \cdot \mathbf{c}' + (\dot{t})^2 \cdot \mathbf{c}'' \end{aligned}$$

3.

$$\ddot{\mathbf{c}} = \ddot{\ddot{t}} \cdot \mathbf{c}' + \ddot{t} \cdot \dot{t} \cdot \mathbf{c}'' + 2\dot{t} \cdot \ddot{t} \cdot \mathbf{c}'' + (\dot{t})^2 \cdot \dot{t} \cdot \mathbf{c}''' = \ddot{\ddot{t}} \cdot \mathbf{c}' + 3\dot{t} \cdot \ddot{t} \cdot \mathbf{c}'' + (\dot{t})^3 \cdot \mathbf{c}'''$$

□

Definice (a lemma) 1.5. Délku křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$, $t \in I = (\alpha, \beta)$ definujeme jako určitý integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

který nezávisí na parametrizaci.

Důkaz: Pro případ rostoucí reparametrizační funkce $t(s)$ zobrazující interval $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ na interval $[\alpha, \beta]$ platí, že $\dot{t} > 0$ a podle věty o substituci

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{t} \mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \dot{t} \|\mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pro případ klesající $t(s)$ dostaneme, že se interval $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ zobrazí na $[\beta, \alpha]$, a že $\dot{t} < 0$, tedy

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \|\dot{t} \mathbf{c}'(t)\| ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} -\dot{t} \|\mathbf{c}'(t)\| ds = - \int_{\beta}^{\alpha} \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

□

Definice (a lemma) 1.6. V každém bodě orientované křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t)$ definujeme její rychlosti budeme označovat $r(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$. jednotkový tečný vektor výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Dále definujeme normálový vektor $\mathbf{n}_*(t)$ tak, aby $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$ byla kladně orientovaná ortonormální báze \mathbb{R}^2 . Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

Důkaz: Derivováním dostáváme

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(s)}{\|\dot{\mathbf{c}}(s)\|} = \frac{\dot{t}\mathbf{c}'(t)}{\|\dot{t}\mathbf{c}'(t)\|} = \frac{\dot{t}}{|\dot{t}|} \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{t})\mathbf{t}(t).$$

Navíc platí

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t) \Rightarrow \mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \text{sign}(\dot{t}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{t})\mathbf{n}_*(t)$$

□

Definice (a lemma) 1.7. Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

Důkaz:

$$\frac{\det(\dot{\mathbf{c}}(s), \ddot{\mathbf{c}}(s))}{\|\dot{\mathbf{c}}(s)\|^3} = \frac{\det \begin{bmatrix} \dot{t} & 0 \\ \ddot{t} & \dot{t}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}'(t) \\ \mathbf{c}''(t) \end{pmatrix}}{\|\dot{t}\mathbf{c}'(t)\|^3} = \frac{\dot{t}^3}{|\dot{t}|^3} \cdot \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3} = \text{sign}(\dot{t}) \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

□

Definice (a lemma) 1.8. Označme souřadnice bodů v rovině $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Eukleidovské shodnosti (isometrie) jsou právě zobrazení $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{a}$, kde A je orthonormální matice. Takovou shodnost nazýváme *přímou*, právě když $\det(A) = 1$. Každá *přímá* shodnost je posunutí (tedy $A = I$) nebo otočení (okolo vhodného bodu).

Důkaz: Z LA víme, že *přímé* shodnosti mají tvar

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}.$$

Pro případ $\phi = 0$ dostáváme $A = I$ tedy posunutí. Pro $\phi \neq 0$ má zobrazení právě jeden pevný bod

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

který je středem otočení o úhel ϕ . Protože platí

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{pmatrix}}_M = (1 - \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi = 2 - 2 \cos \phi = 2(1 - \cos \phi) > 0,$$

matice M je regulární \Rightarrow soustava $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ má právě jedno řešení $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$. □

Věta 1.9. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou invariantní vůči *přímým* shodnostem \mathbb{R}^2 . Přesněji mějme *přímou* shodnost ve tvaru $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Máme-li křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném (neinflexním) bodě κ_z , \mathbf{t} , \mathbf{n}_* , pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = \kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = A\mathbf{n}_*$.

Důkaz: Platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t)$$

Tedy

•

$$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{A}\mathbf{c}', \mathbf{A}\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa_z$$

neboť $\|v\| = \sqrt{v^T v} \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{c}'\| = \sqrt{(\mathbf{A}\mathbf{c}')^T \mathbf{A}\mathbf{c}'} = \sqrt{\mathbf{c}'^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{c}'} = \sqrt{\mathbf{c}'^T \mathbf{c}'} = \|\mathbf{c}'\|$ a $\det(\mathbf{A}) = 1$.

• $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{c}'}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|} = \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right) = \mathbf{A}\mathbf{t}$

• $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{n}_*$.

□

Definice 1.10. Pro každou křivku \mathbf{c} definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Věta 1.11. Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou a ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

Důkaz:

Kontaktem myslíme nejvyšší možnou shodu derivace ve vhodné parametrizaci. Uvažujme tedy dvě křivky a nějakým způsobem sjednocené parametrizace (například obě obloukem) $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ a zajímá nás jejich kontakt v bodě t_0

- kontakt 0. řádu $\rightarrow \mathbf{c}_1(t_0) = \mathbf{c}_2(t_0)$
- kontakt 1. řádu $\rightarrow \mathbf{c}'_1(t_0) = \mathbf{c}'_2(t_0)$
- kontakt 2. řádu $\rightarrow \mathbf{c}''_1(t_0) = \mathbf{c}''_2(t_0)$

Díky lineární reparametrizaci postačí tuto vlastnost studovat v bodě $t = 0$ a díky přímé shodnosti můžeme navíc předpokládat, že $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ a $\mathbf{c}'(0) = (c'_x(0), 0)$, kde $c'_x(0) > 0$. Máme tedy $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$ a $\mathbf{n}_*(0) = (0, 1)$. V tomto bodě uvažujeme Taylorův rozvoj křivky

$$\mathbf{c}(t) = \left(c'_x(0)t + \frac{1}{2}c''_x(0)t^2 + o(t^2), \frac{1}{2}c''_y(0)t^2 + o(t^2) \right).$$

Dosazením do obecné rovnice přímky $Ax + By + C = 0$, pro $A \neq 0$ nebo $B \neq 0$ dostáváme:

$$C + Ac'_x(0)t + \left[\frac{1}{2}Ac''_x(0) + \frac{1}{2}Bc''_y(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Odtud vyvodíme, že pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit $C = 0$ a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí navíc platit $A = 0$, čímž dostáváme $By = 0$, tedy osu x a tím tečnou přímkou a B musí být nenulové. Kontakt vyššího řádu není možný, neboť pro kontakt řádu 2 by $c''_y(0) = 0 \Rightarrow \kappa_z(0) = 0$, což je spor s předpokladem neinflexního bodu.

Dosazením do obecné rovnice kružnice $(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$ dostáváme:

$$(S_x^2 + S_y^2 - R^2) - 2S_x c'_x(0)t + \left[c'_x(0)^2 - 2S_x \frac{1}{2}c''_x(0) - 2S_y \frac{1}{2}c''_y(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Tedy pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit $R^2 = S_x^2 + S_y^2$ a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí platit $S_x = 0$. Pro kontakt řádu 2 (trojnásobný průsečík) pak $S_y = c'_x(0)^2 / c''_y(0) = 1 / \kappa_z(0)$, neboť

$$\kappa_z(0) = \frac{\begin{vmatrix} c'_x(0) & c''_x(0) \\ 0 & c''_y(0) \end{vmatrix}}{|c'_x(0)|^3} = c''_y(0) / c'_x(0)^2,$$

čímž dostáváme oskulační kružnici. Kontakt vyššího řádu není obecně možný, neboť jsme vyčerpali všechny volné parametry. Může nastat pouze v případě, že $\kappa'_z(0) = 0$, tedy v kritickém bodě křivosti, například v jejím maximu. □

Věta 1.12. Označme funkci rychlosti $r(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$. Pro regulární parametrizovanou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = r(t)\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Existuje hladká funkce $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$, $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{r(t)}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $r(t) = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny křivky. Funkce $r(t)$ a $\kappa_z(t)$ určují křivku až na přímou shodnost.

Důkaz: Uvědomme si, že $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$. Derivováním a úpravami dostaneme

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right)' = \frac{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} \cdot \mathbf{c}'' - \frac{1}{2} \frac{2 \cdot \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''}{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}} \cdot \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} = \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3},$$

Dále platí $\|\mathbf{t}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}} = 1 \Rightarrow \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ derivováním získáme $2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$ a proto je \mathbf{t}' násobkem $\mathbf{n}_*(t)$, tedy $\mathbf{t}' = K\mathbf{n}_*(t)$. Z rovností

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K\mathbf{n}_*(t)) = K \underbrace{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*(t))}_{=1} = K$$

a

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') &= \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) = \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) - \underbrace{\det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right)}_0 = \\ &= \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \cdot \frac{1}{\|\mathbf{c}'\|^2} = \underbrace{\frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3}}_{\kappa_z} \cdot \underbrace{\|\mathbf{c}'\|}_{=r} \end{aligned}$$

dostaneme, že $K = r\kappa_z$. Funkce θ je spojitou verzí argumentu funkce $\mathbf{t}(t)$ a její existence a diferencovatelnost je známá z komplexní analýzy. $\mathbf{t}'(t) = \theta'(t) \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$ z předchozí části máme

$$\theta'(t) = r(t)\kappa_z(t). \quad \square$$

Věta 1.13. Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $k(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou podobnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = r(t), \quad \kappa_z(t) = f(t).$$

2 Beziérový křivky

Definice 2.1. i -tý Bernsteinův polynom stupně n definujeme jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}.$$

Věta 2.2. Následující vlastnosti platí pro každou volbu indexů. Jestliže je $i < 0$ nebo $i > n$, pak klademe $B_i^n(t) = 0$.

1. $B_i^n(t)$ je nezáporný na $[0, 1]$ a pro $n > 0$ má na tomto intervalu jediné maximum v bodě $t = i/n$.

2. Pro každé n je $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.

3. Symetrie $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$.

4. Rekurence

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

5. Derivace

$$B_i^n(t)' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

6. Vnoření prostorů $\mathcal{P}_n[t] \subset \mathcal{P}_{n+1}[t]$ je realizováno vztahem

$$B_i^n(t) = \frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t).$$

Důkaz:

1. $B_i^n(t) = \binom{n}{i}[it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \binom{n}{i}t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}[i(1-t) - (n-i)t] = \underbrace{\binom{n}{i}t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}}_{\geq 0}(i-nt)$. Pro $t \in [0, \frac{i}{n}]$ je $(i-nt) > 0$ a pro $t \in (\frac{i}{n}, 1]$ platí $(i-nt) < 0$ a tedy maximum je v bodě $t = i/n$.

2. $1^n = ((1-t) + t)^n = \underbrace{(1-t)^n}_{B_0^n} + \underbrace{\binom{n}{1}t(1-t)^{(n-1)}}_{B_1^n} + \dots + \underbrace{\binom{n}{i}t^i(1-t)^{(n-i)}}_{B_i^n} + \dots + \underbrace{t^n}_{B_n^n}$

3. $B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i}(1-t)^{n-i}(1 - (1-t))^{n-(n-i)} = \binom{n}{i}t^i(1-t)^{(n-i)} = B_i^n(t)$

4.

$$(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) = (1-t)\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{(n-1-i)} + t\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{(n-1-i)} = \underbrace{\left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right]}_{\binom{n}{i}}t^i(1-t)^{n-i} = B_i^n(t)$$

5.

$$\begin{aligned} B_i^n(t)' &= \binom{n}{i}[it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!}it^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)t^i(1-t)^{n-i-1} = \\ &= n \left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}t^i(1-t)^{n-i-1} \right] = \\ &= n \left[\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)} - \binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-1-i} \right] = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \frac{n-i+1}{n+1}B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(t) &= \frac{n-i+1}{n+1}\binom{n+1}{i}t^i(1-t)^{n+1-i} + \\ \frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}t^{i+1}(1-t)^{n+1-i-1} &= \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n+1-i} + \binom{n}{i}t^{i+1}(1-t)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}((1-t) + t) = B_i^n(t) \end{aligned}$$

□

Definice 2.3. Mějme posloupnost $n + 1$ bodů $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$. Tyto body nazýváme *řídící body* a lomenou čáru, která je postupně spojuje nazýváme *řídící polygon*. Pak definujeme *Bézierovu křivku*

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

Věta 2.4. *Bézierova křivka leží v konvexním obalu svých řídících bodů.*

Důkaz: Polynomy daného stupně tvoří rozklad jednotky. □

Věta 2.5. *Jestliže $\mathbf{c}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$, kde $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{n-i}$, pak $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(1 - t)$.*

Důkaz: $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{n-i} B_i^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(1-t) = \mathbf{c}(1-t)$. □

Věta 2.6. *Mějme Eukleidovskou shodnost ve tvaru $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Jestliže $\mathbf{c}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ a $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ je Bézierova křivka s řídícími body $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$, kde $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{A}\mathbf{P}_i + \mathbf{a}$, pak $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$.*

Důkaz: $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n (\mathbf{A}\mathbf{P}_i + \mathbf{a}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}\mathbf{P}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{a} B_i^n(t) = \mathbf{A} \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)}_{=\mathbf{c}(t)} + \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)}_{=1} = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$. □

Věta 2.7. *Pro derivaci (hodograph) křivky $\mathbf{c}(t)$ s řídícími body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$ platí*

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$.

Důkaz: Pro zjednodušení zápisu značme $B_i^n := B_i^n(t)$. Víme $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) \Rightarrow$

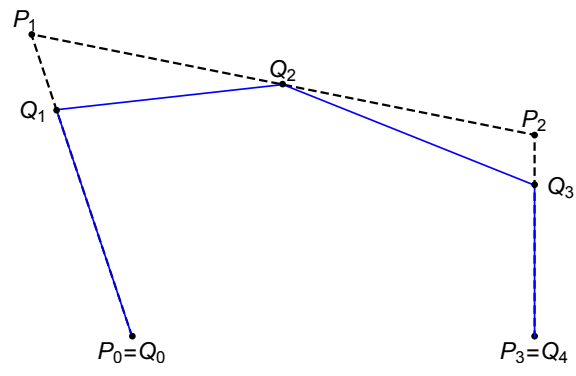
$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \mathbf{P}_0 (B_0^n(t))' + \mathbf{P}_1 (B_1^n(t))' + \dots + \mathbf{P}_{n-1} (B_{n-1}^n(t))' + \mathbf{P}_n (B_n^n(t))' = \\ &= \mathbf{P}_0 n(B_{-1}^{n-1} - B_0^{n-1}) + \mathbf{P}_1 n(B_0^{n-1} - B_1^{n-1}) + \dots + \mathbf{P}_{n-1} n(B_{n-2}^{n-1} - B_{n-1}^{n-1}) + \mathbf{P}_n n(B_{n-1}^{n-1} - B_n^{n-1}) = \\ &= n\mathbf{P}_0 \underbrace{B_{-1}^{n-1}}_{=0} - n\mathbf{P}_0 B_0^{n-1} + n\mathbf{P}_1 B_0^{n-1} - n\mathbf{P}_1 B_1^{n-1} + \dots + n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-2}^{n-1} - n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-1}^{n-1} + \\ &= n\mathbf{P}_n B_{n-1}^{n-1} - n\mathbf{P}_n \underbrace{B_n^{n-1}}_{=0} = B_0^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_1 - n\mathbf{P}_0)}_{\mathbf{Q}_0} + \dots + B_{n-1}^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_n - n\mathbf{P}_{n-1})}_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

□

Věta 2.8 (Degree elevation). *Křivku $\mathbf{c}(t)$ s řídícími body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$ lze také vyjádřit jako křivku s řídícími body $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n + 1$ a*

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{P}_i$$

(při využití konvence $\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{f}0$).



Důkaz:

- $i = 0$: $\mathbf{Q}_0 = \frac{0}{n+1}\mathbf{P}_1 + (1 - \frac{0}{n+1})\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0$
- $0 < i < n + 1$: $\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})\mathbf{P}_i$
- $i = n + 1$: $\mathbf{Q}_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\mathbf{P}_n + (1 - \frac{n+1}{n+1})\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$

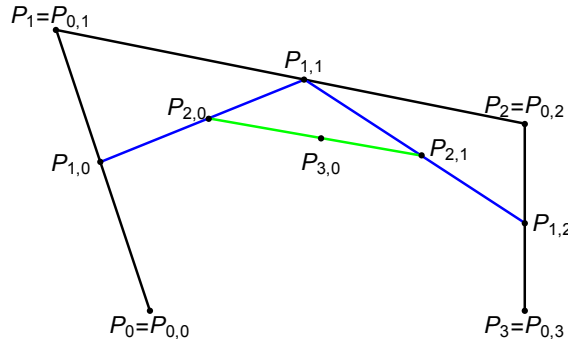
Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \left[\frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} B_j^{n+1}(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} B_j^{n+1}(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[\mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} + \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} \right] B_j^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \underbrace{\left[\frac{j}{n+1} \mathbf{P}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1}) \mathbf{P}_j \right]}_{\mathbf{Q}_j} B_j^{n+1}(t) \end{aligned}$$

□

Definice 2.9. Mějme řídicí body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, kde $i = 0, \dots, n$ a odpovídající Bézierovu křivku $\mathbf{c}(t)$. DeCasteljau algoritmus vypočítá pro každé pevné $t \in [0, 1]$ systém bodů $\mathbf{P}_{i,j}$ indexovaný dvěma indexy $i = 0, \dots, n$ a $j = 0, \dots, (n-i)$ takto:

- pro $i = 0$: $\mathbf{P}_{0,j} := \mathbf{P}_j$
- pro $i > 0$: $\mathbf{P}_{i,j} := (1-t)\mathbf{P}_{i-1,j} + t\mathbf{P}_{i-1,j+1}$



Lemma 2.10. V DeCasteljau algoritmu s pevným $t \in [0, 1]$ pro každou legální volbu indexů i, k, m platí

$$\mathbf{P}_{i+m,k} = \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t).$$

Důkaz: Indukcí podle m .

- $m = 0$: $\mathbf{P}_{i,k} = \sum_{j=0}^0 \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^0(t) = \mathbf{P}_{i,k}$.
- $m \rightarrow m + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^{m+1}(t) &= \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} [(1-t)B_j^m(t) + tB_{j-1}^m(t)] = \\ (1-t) \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_{j-1}^m(t) &= (1-t) \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k+1} B_j^m(t) = \\ &= (1-t)\mathbf{P}_{i+m,k} + t\mathbf{P}_{i+m,k+1} = \mathbf{P}_{i+m+1,k}. \end{aligned}$$

□

Věta 2.11. V algoritmu DeCasteljau $t \in [0, 1]$ je $\mathbf{P}_{n,0} = \mathbf{c}(t)$ a úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ je tečnou v tomto bodě.

Důkaz: Z předchozího lemmatu pro $m = n, k = 0, i = 0$, plyne $\mathbf{P}_{n,0} = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{0,j} B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t) = \mathbf{c}(t)$. Pro tečnu z předchozího lemmatu a Věty 2.7. máme $\mathbf{P}_{n-1,1} - \mathbf{P}_{n-1,0} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j+1} B_j^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j} B_j^{n-1}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j) B_j^{n-1}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{c}'(t)$. Tedy úsečka $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$ leží v lineárním obalu jednotkového tečného vektoru a tedy určuje tečnu. \square

3 Lagrangeova a Hermitova interpolace

Definice 3.1. Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \in \mathbb{R}$ a funkční hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je *Lagrangeovým interpolačním polynomem* těchto hodnot, jestliže platí

$$f(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

Věta 3.2. Pro každé vstupní hodnoty existuje právě jeden interpolant stupně nejvýše n .

Důkaz: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Podmínka: $f(x_i) = f_i$ dává $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = f_i$. Všechny podmínky dávají soustavu lineárních rovnic s Vandermondovou maticí $M_{n+1 \times n+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$\det M = \prod_{j,i=0, i \neq j}^n (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow M$ regulární, máme jediné řešení $\begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$ \square

Definice (a lemma) 3.3. Pro zadaná $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$ definujeme *Lagrangeovy polynomy*

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mějme funkční hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$, pak pro interpolační polynom z předchozí věty platí, že je roven

$$\sum_{i=0}^n f_i l_i(x).$$

Důkaz: Plyne z toho, že $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Neboť

- pro $i = j$

$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \Rightarrow \delta_{jj} = 1,$$

- pro $i \neq j$

$$l_i(x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 0.$$

Definujme $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$, tedy $f(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i \delta_{ij} = f_j$ \square

Věta 3.4. Mějme $g(x) \in C^2[a, b]$, tedy funkce se spojitou druhou derivací na intervalu $[a, b]$ a označme $K = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$. Necht $f(x)$ je lineární Lagrangeův interpolační polynom v bodech a, b , tedy polynom stupně nejvýše 1 splňující

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b).$$

Pak platí

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b-a)^2 \frac{K}{4 \cdot 2}.$$

Důkaz: Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x)$ $r(a) = r(b) = 0$
- $h(x) = (x-a)(b-x)$ $h(a) = h(b) = 0$ a $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$
- Zvolme libovolné $x_0 \in (a, b)$. Definujme $F(x) = r(x) - Lh(x)$, kde $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$ a také $F(x_0) = 0$. F je C^2 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$ takové, že $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(x_2) = 0$

Funkce F' je C^1 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje $x_3 \in (x_1, x_2)$ takové, že $F''(x_3) = 0$. Zároveň

$$F''(x_3) = r''(x_3) - Lh''(x_3) = g''(x_3) + 2L$$

neboť $h''(x) = -2$ a $f''(x) = 0$. Tedy

$$L = \frac{g''(x_3)}{-2} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

□

Definice 3.5. Mějme zadány hodnoty proměnné $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, násobnosti derivací $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a hodnoty $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že polynom $f(x)$ je *Hermitovým interpolačním polynomem* těchto dat, jestliže

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

Definice 3.6. *Fergusonovu bázi* polynomů stupně nejvýše 3 definujeme jako posloupnost

$$\mathcal{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x)),$$

kde

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ r_1(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ r_3(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Věta 3.7. *Fergusonova báze trivializuje Hermitovu interpolaci prvního řádu v bodech 0 a 1, přesněji*

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x)$$

je Hermitův interpolant pro hodnoty proměnné $(0, 0, 1, 1)$ a pro násobnosti derivací $(0, 1, 0, 1)$.

Důkaz: Přímým výpočtem: $f'(x) = f_0 r_0'(x) + f_1 r_1'(x) + f_2 r_2'(x) + f_3 r_3'(x)$, kde

$$\begin{aligned} r_0'(x) &= -6x + 6x^2 \\ r_1'(x) &= 1 - 4x + 3x^2 \\ r_2'(x) &= 6x - 6x^2 \\ r_3'(x) &= -2x + 3x^2. \end{aligned}$$

odtud již získáme

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0 r_0(0) + f_1 r_1(0) + f_2 r_2(0) + f_3 r_3(0) = f_0 \\ f'(0) &= f_0 r_0'(0) + f_1 r_1'(0) + f_2 r_2'(0) + f_3 r_3'(0) = f_1 \\ f(1) &= f_0 r_0(1) + f_1 r_1(1) + f_2 r_2(1) + f_3 r_3(1) = f_2 \\ f'(1) &= f_0 r_0'(1) + f_1 r_1'(1) + f_2 r_2'(1) + f_3 r_3'(1) = f_3. \end{aligned}$$

Další možností je důkaz provést pomocí matice přechodu k monomiální bázi. □

Věta 3.8. Mějme $g(x) \in C^4[a, b]$, tedy funkce se spojitou čtvrtou derivací na intervalu $[a, b]$ a označme $K = \max_{x \in [a, b]} |g''''(x)|$. Necht $f(x)$ je C^1 Hermitův interpolační polynom na intervalu $[a, b]$, tedy polynom stupně nejvýše 3 splňující

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad f(b) = g(b), \quad f'(b) = g'(b).$$

Pak platí

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b-a)^4 \frac{K}{16 \cdot 24}.$$

Důkaz: Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \quad r(a) = r(b) = r'(a) = r'(b) = 0$
- $h(x) = (x-a)^2(b-x)^2 \quad h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$ a $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$
- Zvolme libovolné $x_0 \in (a, b)$. Definujme $F(x) = r(x) - Lh(x)$, kde $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$.

Pak $F(a) = F(b) = 0$ a také $F(x_0) = 0$. F je C^4 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$ takové, že $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$ takové, že $F'(x_2) = 0$
- navíc však $F'(a) = F'(b) = 0$.

Funkce F' je C^3 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existují $x_3 \in (a, x_1)$, $x_4 \in (x_1, x_2)$, $x_5 \in (x_2, b)$ takové, že $F''(x_3) = F''(x_4) = F''(x_5) = 0$. Funkce F'' je C^2 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existují $x_6 \in (x_3, x_4)$, $x_7 \in (x_4, x_5)$ takové, že $F'''(x_6) = F'''(x_7) = 0$. Funkce F''' je C^1 na $[a, b]$ a podle Rolleovy věty existuje $x_8 \in (x_6, x_7)$ takové, že $F''''(x_8) = 0$.

Zároveň

$$F''''(x_8) = r''''(x_8) - Lh''''(x_8) = g''''(x_8) - 24L$$

neboť $h''''(x) = 24$ a $f''''(x) = 0$. Tedy

$$L = \frac{g''''(x_8)}{24} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{24} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

.

□

Věta 3.9. Mějme dána C^1 Hermitovská data v rovině, tedy body P_0, P_1 a jednotkové vektory U_0, U_1 . Označme K jedinou kružnici (případně degenerovanou do přímky), která prochází body P_0, P_1 a s vektory U_0, U_1 svírá stejně velký orientovaný úhel. Necht $J \in \mathbb{R}^2$ je libovolný bod různý od P_0, P_1 . Pak existuje právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_0 interpolující data P_0, U_0 a J a právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky) O_1 interpolující data J, P_1, U_1 . Tyto dva oblouky navazují v bodě J se spojitostí C^1 právě tehdy, když $J \in K$.

Důkaz: Kružnice K realizuje symetrii dat, oblouky O_0, O_1 s ní svírají stejné úhly. □

4 B-spline a NURBs křivky

Definice 4.1. Pro posloupnost reálných čísel (t_0, t_1, \dots, t_m) , $t_i \leq t_{i+1}$ (tzv. uzlů) definujeme rekurentně funkce $N_{i,p}(t)$, $i = 0, \dots, (m-p-1)$ stupně p takto

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

Pro pevné p označme $n = m - p - 1$ a pro řídicí body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 0, \dots, n$, je B-spline křivka stupně p dána vztahem

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t), \quad t \in [t_p, t_{m-p}].$$

Definice 4.2. Pro řídicí body $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 0, \dots, n$ a váhy těchto bodů $w_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, \dots, n$, definujeme racionální Bézierovu křivku

$$\tilde{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Zjevně pro libovolné kladné μ platí, že váhy $\tilde{w}_i = \mu w_i$ definují stejnou parametrickou křivku, protože μ se zkrátí.

Věta 4.3. Necht' $\tilde{c}(t)$, $t \in [0, 1]$ je racionální Bézierova křivka s řídicími body $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$ a váhami (w_0, \dots, w_n) . Zvolme $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a definujme $\tilde{c}(s)$, $s \in [0, 1]$ jako reparametrizaci $\tilde{c}(t)$ pomocí funkce

$$t = t(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}.$$

Pak $\tilde{c}(s)$ je racionální Bézierova křivka s týmiž řídicími body $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$ a s váhami $(\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n)$, kde $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$.

Důkaz: Přímým dosazením dostáváme

$$B_i^n(t(s)) = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1} \right)^i \left(1 - \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1} \right)^{(n-i)} =$$

$$\binom{n}{i} \frac{(\lambda s)^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^i} \frac{[(\lambda - 1)s + 1 - \lambda s]^{(n-i)}}{[(\lambda - 1)s + 1]^{(n-i)}} =$$

$$\binom{n}{i} \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n} s^i (1 - s)^{n-i} = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n}$$

a tedy i

$$\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i B_i^n(s)} = \tilde{c}(s).$$

□

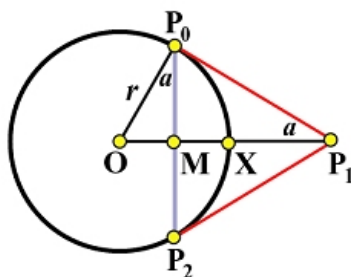
Důsledek 4.4. Každou racionální křivku je možno parametrizovat tak, že první a poslední váha je rovna 1.

Důkaz: Mějme křivku s váhami (w_0, w_1, \dots, w_n) a nějakými řídicími body. Řídicí body ponecháme a definujeme nové váhy $\tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_0}$, které nám zajistí $\tilde{w}_0 = 1$ a podle Definice 4.2 popisují stejnou parametrizaci.

Dále definujeme $\tilde{w}_i = \tilde{w}_n^{-\frac{i}{n}} \tilde{w}_i$, která zajistí $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_n = 1$ a podle Věty 4.3 je reparametrizací téže křivky.

□

Věta 4.5. Kvadratická racionální Bézierova křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in [0, 1]$ s řídicími body $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ a váhami $(w_0, w_1, w_2) = (1, w, 1)$ je parametrizací kruhového oblouku právě tehdy, když $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|$, body $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ nejsou kolineární a $w = \sin a$, kde $a = \frac{\sphericalangle \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{2}$.



5 Plochy a subdivize

Definice 5.1. Pro dvě prostorové křivky $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$ parametrizované na stejném intervalu I , definujeme jejich *lineární přechodovou plochu*

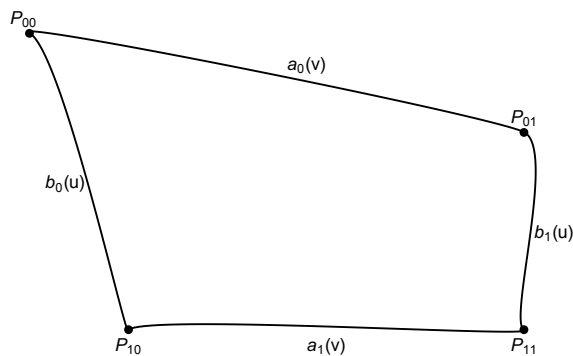
$$\mathbf{P}(u, v) = (1 - u)\mathbf{a}_0(v) + u\mathbf{a}_1(v), \quad u \in [0, 1], v \in I.$$

Definice 5.2. Pro prostorové křivky $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $v \in [0, 1]$ a $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$, $u \in [0, 1]$ takové, že

$$\mathbf{a}_0(0) = \mathbf{b}_0(0) =: \mathbf{P}_{00}, \quad \mathbf{a}_0(1) = \mathbf{b}_1(0) =: \mathbf{P}_{01}, \quad \mathbf{a}_1(0) = \mathbf{b}_0(1) =: \mathbf{P}_{10}, \quad \mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1(1) =: \mathbf{P}_{11}$$

definujeme plochu $\mathbf{P}(u, v)$ zvanou *Coonsův bilineární plát* jako řešení rovnice

$$(1 - u, -1, u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u, v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = 0,$$



Věta 5.3. Coonsův bilineární plát interpoluje zadané křivky, přesněji

$$\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v), \quad \mathbf{P}(1, v) = \mathbf{a}_1(v), \quad \mathbf{P}(u, 0) = \mathbf{b}_0(u), \quad \mathbf{P}(u, 1) = \mathbf{b}_1(u).$$

Důkaz: Ukážeme, že $\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v)$. Jelikož $u = 0$, máme:

$$(1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(0) & \mathbf{P}(0, v) & \mathbf{b}_1(0) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = 0,$$

tedy

$$(0, \mathbf{a}_0(v) - \mathbf{P}(0, v), 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\mathbf{a}_0(v) + \mathbf{P}(0, v) = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_0(v) = \mathbf{P}(0, v).$$

□

Definice 5.4. *Obdélníková (tensor-product) Bézierova plocha* je pro danou řídicí síť $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

kde $B_i^m(u)$, $B_j^n(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy.

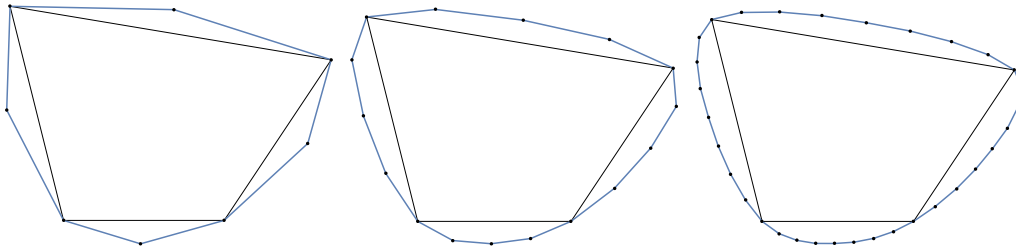
Definice 5.5. *NURBS plocha* je určena sítí řídicích bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich váhami $w_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$, dvěma uzlovými vektory $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ a stupni p, q . Parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}.$$

Definice 5.6. *Čtyřbodové schéma pro křivky* je interpolační schéma, které mezi každé dva body v_i, v_{i+1} vloží nový bod a původní zůstávají. Geometrická pravidla jsou následující:

$$v'_{2i} = v_i, \quad v'_{2i+1} = -\frac{1}{16}v_{i-1} + \frac{9}{16}v_i - \frac{9}{16}v_{i+1} - \frac{1}{16}v_{i+2}.$$

Čtyřbodové schéma zachovává výchozí řídicí polygon ve všech krocích. Výchozí body jsou tedy obsažené také v limitní křivce.



Definice 5.7. *Doo-Sabin pro plochy* je aproximační metoda založená na ořezávání vrcholů dané sítě. Každému vrcholu je přiřazeno tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje. Metoda vypočte pro každou stěnu její těžiště c jako průměr všech vrcholů. Poté každému vrcholu v_i stěny přiřadí nový vrchol jako střed úsečky c, v_i . Nově vzniklá síť obsahuje stěny tří typů (v závorce je uvedena, barva odpovídající stěně v obrázku):

- F-stěny: (Modrá) Pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna a to spojením nových vrcholů dané stěny.
- E-stěny: (Zelená) Jsou sestrojeny pro každou hranu původní sítě propojením čtyř nově vzniklých vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů hrany.
- V-stěny: (Červená) Vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě. Pokud měl vrchol valenci n (počet hran vedoucích do vrcholu), je V-stěna n -úhelník.

