

# Geometrické modelování, ZS 2023-24

Toto je seznam vět a definic, které budou u zkoušky vyžadovány formálně přesně. Týká se to i důkazů, pokud jsou zde uvedeny. Ostatní látka z prezentací bude zkoušena orientačně. Zkouška bude individuální a bude založena především na diskusi nad implementacemi. Přitom se ale ověřuje studentovo pochopení látky. Student rovněž vyřeší několik úloh na papír, mohou vypadat například takto:

1. Formulujte a dokažte větu chybě Lagrangeovy interpolace polynomem stupně 1.
2. Pomocí DeCastelja algoritmu vypočítejte bod  $c(1/2)$  pro Bézierovu křivku s řídicími body  $P_0 = [1, 2]$ ,  $P_1 = [0, -1]$ ,  $P_2 = [-1, 1]$ . V tomto bodě určete tečnou přímku, znaménkovou křivost a oskulační kružnici.
3. Dokažte vzorec pro derivaci Bézierovy křivky.

## 1 Křivky v rovině a jejich transformace

**Definice 1.1** Bud'  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy  $C^\infty$ )  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se nazývá *parametrizovaná křivka* v  $\mathbb{R}^2$ . Množina  $\langle c \rangle := c(I) \subseteq \mathbb{R}^2$  se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže  $c'(t) \neq (0, 0)^T$  pro každé  $t \in I$ .

**Poznámka 1.2** Je-li  $I$  uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na  $I$  restrikcí na  $I$  diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na  $I$ , tedy  $c(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$ . Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby  $c$  a  $\phi$  bylo třídy  $C^\infty$ , ale podle situace postačí nižší hladkost, například  $C^1$ ,  $C^2$ ,  $C^3$ .

**Definice 1.3** Je-li  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka a  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  difeomorfismus intervalu  $\tilde{I}$  na  $I$ , je  $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako  $c$ . Difeomorfismus  $\phi$  pak nazýváme *změnou parametru* a  $\tilde{c}$  *reparametrizací*  $c$ . Je-li navíc  $\phi' > 0$  na  $\tilde{I}$ , nazveme  $\tilde{c}$  reparametrizací  $c$  *zachovávající orientaci*.

**Definice (a lemma) 1.4** Délku křivky dané parametrizací  $c(t)$ ,  $t \in I = (\alpha, \beta)$  definujeme jako určitý integrál

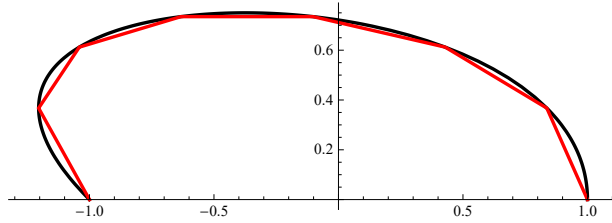
$$\int_{\alpha}^{\beta} \|c'(t)\| dt,$$

který nezávisí na parametrizaci.

**Definice 1.5** *Vepsaná lomená čára* je definována jako spojnice uspořádaných bodů

$$c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_m),$$

kde  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ .



**Věta 1.6** Délka křivky je suprémem délek všech vepsaných lomených čar, tedy

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \right\}.$$

Při rozdělení rovnoměrné v parametru

$$t_i = \alpha + \frac{i}{m}(\beta - \alpha) = \left(1 - \frac{i}{m}\right) \alpha + \frac{i}{m} \beta$$

délka lomené čáry  $L_m$  k délce křivky  $L$  konvergue pro  $m \rightarrow \infty$  jako  $\mathcal{O}(\frac{1}{m^2})$ , tedy existuje konstanta  $K > 0$  taková, že pro každé  $m$  platí

$$(L - L_m) < \frac{K}{m^2}.$$

**Definice (a lemma) 1.7** V každém bodě orientované křivky dané parametrizací  $c(t)$  definujeme její rychlosti budeme označovat  $r(t) = \|c'(t)\|$ . jednotkový tečný vektor výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Dále definujeme normálový vektor  $\mathbf{n}_*(t)$  tak, aby  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$  byla kladně orientovaná ortonormální báze  $\mathbb{R}^2$ . Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

**Definice (a lemma) 1.8** Pro regulární parametrizovanou křivku  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t) | \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

**Definice 1.9** Pro každou křivku  $c$  definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu  $c(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$  a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako  $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$ , její *střed křivosti* jako bod  $S(t) = c(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$  a kružnici se středem  $S(t)$  a poloměrem  $R(t)$  nazýváme *oskulační kružnice* v bodě  $c(t)$ .

**Věta 1.10** Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou a ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí.

**Věta 1.11** Pro regulární parametrizovanou křivku  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  platí

$$\mathbf{t}'(t) = r(t)\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Existuje hladká funkce  $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  splňující  $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ ,  $t \in I$  a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{r(t)}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí  $r(t) = 1$ , pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny křivky. Funkce  $r(t)$  a  $\kappa_z(t)$  určují křivku až na přímou shodnost.

**Věta 1.12** Znaménkovou křivost lze přibližně vypočítat z vepsané lomené čáry. Definujme  $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})$  a pak lze například přibližně počítat

$$\kappa_z(t_i) \approx \arcsin \left( \frac{\det\{\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_{i+1}\}}{\|\vec{\mathbf{v}}_i\|\|\vec{\mathbf{v}}_{i+1}\|} \right) \frac{2}{\|\vec{\mathbf{v}}_i\| + \|\vec{\mathbf{v}}_{i+1}\|}.$$

## 2 Beziérovky

**Definice 2.1**  $i$ -tý Bernsteinův polynom stupně  $n$  definujeme jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}.$$

**Věta 2.2** Následující vlastnosti platí pro každou volbu indexů. Jestliže je  $i < 0$  nebo  $i > n$ , pak klademe  $B_i^n(t) = 0$ .

1.  $B_i^n(t)$  je nezáporný na  $[0, 1]$  a pro  $n > 0$  má na tomto intervalu jediné maximum v bodě  $t = i/n$ .
2. Pro každé  $n$  je  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ .
3. Symetrie  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ .

4. Rekurence

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

5. Derivace

$$B_i^n(t)' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

6. Vnoření prostorů  $\mathcal{P}_n[t] < \mathcal{P}_{n+1}[t]$  je realizováno vztahem

$$B_i^n(t) = \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t).$$

**Důkaz:**

$$1. B_i^n(t)' = \binom{n}{i} [it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i-1} [i(1-t) - (n-i)t] = \underbrace{\binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i-1} (i-nt)}_{\geq 0}.$$

Pro  $t \in [0, \frac{i}{n}]$  je  $(i-nt) > 0$  a pro  $t \in (\frac{i}{n}, 1]$  platí  $(i-nt) < 0$  a tedy maximum je v bodě  $t = i/n$ .

$$2. 1^n = ((1-t)+t)^n = \underbrace{(1-t)^n}_{B_0^n} + \underbrace{\binom{n}{1} t(1-t)^{(n-1)}}_{B_1^n} + \dots + \underbrace{\binom{n}{i} t^i(1-t)^{(n-i)}}_{B_i^n} + \dots + \underbrace{t^n}_{B_n^n}$$

$$3. B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^{(n-(n-i))} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)} = B_i^n(t)$$

4.

$$(1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) = (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{(n-1-i)} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1-i)} = \underbrace{\left[ \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right]}_{\binom{n}{i}} t^i (1-t)^{n-i} = B_i^n(t)$$

5.

$$\begin{aligned} B_i^n(t)' &= \binom{n}{i} [it^{i-1}(1-t)^{(n-i)} - (n-i)t^i(1-t)^{(n-i-1)}] = \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} it^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-i)t^i(1-t)^{n-i-1} = \\ &= n \left[ \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i(1-t)^{n-i-1} \right] = \\ &= n \left[ \binom{n-1}{i-1} t^{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)} - \binom{n-1}{i} t^i(1-t)^{n-1-i} \right] = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \end{aligned}$$

6.

$$\frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \frac{n-i+1}{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} +$$

$$\begin{aligned} \frac{i+1}{n+1} \binom{n+1}{i+1} t^{i+1} (1-t)^{n+1-i-1} &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} + \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} ((1-t) + t) = B_i^n(t) \end{aligned}$$

□

**Definice 2.3** Mějme posloupnost  $n+1$  bodů  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$ . Tyto body nazýváme *řídící body* a lomenou čáru, která je postupně spojuje nazýváme *řídící polygon*. Pak definujeme *Bézierovu křivku*

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1].$$

**Věta 2.4** *Bézierova křivka leží v konvexním obalu svých řídících bodů.*

**Důkaz:** Polynomy daného stupně tvoří rozklad jednotky. □

**Věta 2.5** *Jestliže  $\mathbf{c}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  a  $\tilde{\mathbf{c}}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$ , kde  $\tilde{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_{n-i}$ , pak  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(1-t)$ .*

**Důkaz:**  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{n-i} B_i^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(1-t) = \mathbf{c}(1-t)$ . □

**Věta 2.6** *Mějme Eukleidovskou shodnost ve tvaru  $Ax + \mathbf{a}$ . Jestliže  $\mathbf{c}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  a  $\tilde{\mathbf{c}}(t)$  je Bézierova křivka s řídícími body  $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$ , kde  $\tilde{\mathbf{P}}_i = A\mathbf{P}_i + \mathbf{a}$ , pak  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ .*

**Důkaz:**  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{P}}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n (A\mathbf{P}_i + \mathbf{a}) B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n A\mathbf{P}_i B_i^n(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{a} B_i^n(t) = A \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t)}_{=\mathbf{c}(t)} + \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i^n(t)}_{=1} = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{a}$ . □

**Věta 2.7** *Pro derivaci (hodograph) křivky  $\mathbf{c}(t)$  s řídícími body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$  platí*

$$\mathbf{c}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde  $\mathbf{Q}_i = n(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$ .

**Důkaz:** Pro zjednodušení zápisu značme  $B_i^n := B_i^n(t)$ . Víme  $\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) \Rightarrow$

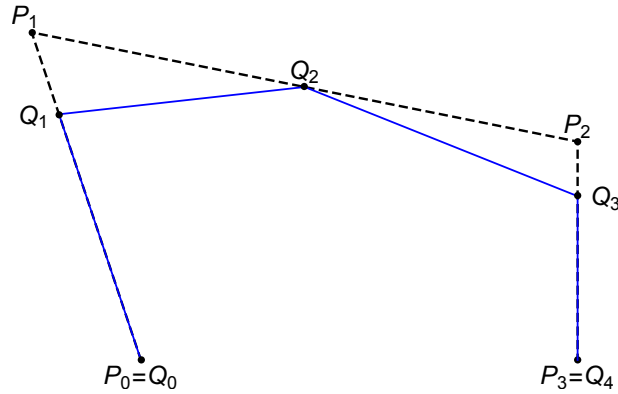
$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(t) &= \mathbf{P}_0(B_0^n(t))' + \mathbf{P}_1(B_1^n(t))' + \cdots + \mathbf{P}_{n-1}(B_{n-1}^n(t))' + \mathbf{P}_n(B_n^n(t))' = \\ &= \mathbf{P}_0 n(B_{-1}^{n-1} - B_0^{n-1}) + \mathbf{P}_1 n(B_0^{n-1} - B_1^{n-1}) + \cdots + \mathbf{P}_{n-1} n(B_{n-2}^{n-1} - B_{n-1}^{n-1}) + \mathbf{P}_n n(B_{n-1}^{n-1} - B_n^{n-1}) = \\ &= n\mathbf{P}_0 \underbrace{B_{-1}^{n-1}}_{=0} - n\mathbf{P}_0 B_0^{n-1} + n\mathbf{P}_1 B_0^{n-1} - n\mathbf{P}_1 B_1^{n-1} + \cdots + n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-2}^{n-1} - n\mathbf{P}_{n-1} B_{n-1}^{n-1} + \\ &= n\mathbf{P}_n B_{n-1}^{n-1} - n\mathbf{P}_n \underbrace{B_n^{n-1}}_{=0} = B_0^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_1 - n\mathbf{P}_0)}_{\mathbf{Q}_0} + \cdots + B_{n-1}^{n-1} \underbrace{(n\mathbf{P}_n - n\mathbf{P}_{n-1})}_{\mathbf{Q}_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{Q}_i B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

□

**Věta 2.8 (Degree elevation)** Křivku  $\mathbf{c}(t)$  s řídicími body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$  lze také vyjádřit jako křivku s řídicími body  $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n+1$  a

$$\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{P}_i$$

(při využití konvence  $\mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{f}0$ ).



**Důkaz:**

- $i = 0$  :  $\mathbf{Q}_0 = \frac{0}{n+1}\mathbf{P}_1 + (1 - \frac{0}{n+1})\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0$
- $0 < i < n + 1$  :  $\mathbf{Q}_i = \frac{i}{n+1}\mathbf{P}_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})\mathbf{P}_i$
- $i = n + 1$  :  $\mathbf{Q}_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\mathbf{P}_n + (1 - \frac{n+1}{n+1})\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n$

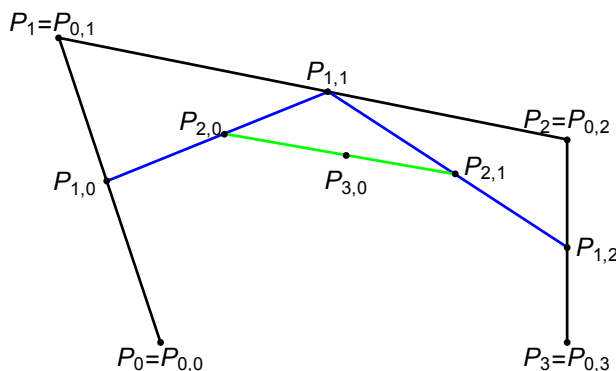
Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \left[ \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{n-i+1}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} B_j^{n+1}(t) + \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} B_j^{n+1}(t) = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \left[ \mathbf{P}_j \frac{n-j+1}{n+1} + \mathbf{P}_{j-1} \frac{j}{n+1} \right] B_j^{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n+1} \underbrace{\left[ \frac{j}{n+1} \mathbf{P}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1}) \mathbf{P}_j \right]}_{\mathbf{Q}_j} B_j^{n+1}(t) \end{aligned}$$

□

**Definice 2.9** Mějme řídící body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ , kde  $i = 0, \dots, n$  a odpovídající Bézierovu křivku  $\mathbf{c}(t)$ . *DeCasteljau algoritmus* vypočítá pro každé pevné  $t \in [0, 1]$  systém bodů  $\mathbf{P}_{i,j}$  indexovaný dvěma indexy  $i = 0, \dots, n$  a  $j = 0, \dots, (n-i)$  takto:

- pro  $i = 0$  :  $\mathbf{P}_{0,j} := \mathbf{P}_j$
- pro  $i > 0$  :  $\mathbf{P}_{i,j} := (1-t)\mathbf{P}_{i-1,j} + t\mathbf{P}_{i-1,j+1}$



**Lemma 2.10** V *DeCasteljau algoritmu* s pevným  $t \in [0, 1]$  pro každou legální volbu indexů  $i, k, m$  platí

$$\mathbf{P}_{i+m,k} = \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t).$$

**Důkaz:** Indukcí podle  $m$ .

- $m = 0$ :  $\mathbf{P}_{i,k} = \sum_{j=0}^0 \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^0(t) = \mathbf{P}_{i,k}$ .
- $m \rightarrow m + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^{m+1}(t) &= \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} [(1-t)B_j^m(t) + tB_{j-1}^m(t)] = \\ (1-t) \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{P}_{i,j+k} B_{j-1}^m(t) &= (1-t) \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k} B_j^m(t) + t \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j+k+1} B_j^m(t) = \\ (1-t)\mathbf{P}_{i+m,k} + t\mathbf{P}_{i+m,k+1} &= \mathbf{P}_{i+m+1,k}. \end{aligned}$$

□

**Věta 2.11** V algoritmu DeCasteljau  $t \in [0, 1]$  je  $\mathbf{P}_{n,0} = \mathbf{c}(t)$  a úsečka  $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$  je tečnou v tomto bodě.

**Důkaz:** Z předchozího lemmatu pro  $m = n$ ,  $k = 0$ ,  $i = 0$ , plyne  $\mathbf{P}_{n,0} = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{0,j} B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t) = \mathbf{c}(t)$ . Pro tečnu z předchozího lemmatu a Věty 2.7. máme  $\mathbf{P}_{n-1,1} - \mathbf{P}_{n-1,0} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j+1} B_j^{n-1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{P}_{0,j} B_j^{n-1}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j) B_j^{n-1}(t) = \frac{1}{n} \mathbf{c}'(t)$ . Tedy úsečka  $\mathbf{P}_{n-1,0}\mathbf{P}_{n-1,1}$  leží v lineárním obalu jednotkového tečného vektoru a tedy určuje tečnu. □

**Věta 2.12** Křivka  $\tilde{c}(s) := \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{j,0} B_j^n(s)$  je reparametrizací první části křivky  $c(t)$  na interval  $[0, 1]$ . Přesněji platí

$$\tilde{c}(s) = c(ts).$$

### 3 Lagrangeova a Hermitova interpolace

**Definice 3.1** Mějme zadány hodnoty proměnné  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \in \mathbb{R}$  a funkční hodnoty  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že polynom  $f(x)$  je *Lagrangeovým interpolačním polynomem* těchto hodnot, jestliže platí

$$f(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

**Věta 3.2** Pro každé vstupní hodnoty existuje právě jeden interpolant stupně nejvýše  $n$ .

**Důkaz:**  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Podmínka:  $f(x_i) = f_i$  dává  $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = f_i$ . Všechny podmínky dávají soustavu lineárních rovnic s Vandermondovou maticí  $M_{n+1 \times n+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$



$\det M = \prod_{j,i=0,i \neq j}^n (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow M$  regulární, máme jediné řešení  $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \square$

**Definice (a lemma) 3.3** Pro zadaná  $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$  definujeme *Lagrangeovy polynomy*

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mějme funkční hodnoty  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ , pak pro interpolační polynom z předchozí věty platí, že je roven

$$\sum_{i=0}^n f_i l_i(x).$$

**Důkaz:** Plyne z toho, že  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ . Neboť

- pro  $i = j$

$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1 \Rightarrow \delta_{jj} = 1,$$

- pro  $i \neq j$

$$l_i(x_j) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0 \Rightarrow \delta_{ij} = 0.$$

Definujme  $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$ , tedy  $f(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x_j) = \sum_{i=0}^n f_i \delta_{ij} = f_j \square$

**Věta 3.4** Mějme  $g(x) \in C^2[a, b]$ , tedy funkce se spojitou druhou derivací na intervalu  $[a, b]$  a označme  $K = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$ . Necht'  $f(x)$  je lineární Lagrangeův interpolační polynom v bodech  $a, b$ , tedy polynom stupně nejvýše 1 splňující

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b).$$

*Pak platí*

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b - a)^2 \frac{K}{4 \cdot 2}.$$

**Důkaz:** Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \quad r(a) = r(b) = 0$
- $h(x) = (x - a)(b - x) \quad h(a) = h(b) = 0$  a  $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$
- Zvolme libovolné  $x_0 \in (a, b)$ . Definujme  $F(x) = r(x) - Lh(x)$ , kde  $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$ .

Pak  $F(a) = F(b) = 0$  a také  $F(x_0) = 0$ .  $F$  je  $C^2$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$  takové, že  $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$  takové, že  $F'(x_2) = 0$

Funkce  $F'$  je  $C^1$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje  $x_3 \in (x_1, x_2)$  takové, že  $F''(x_3) = 0$ . Zároveň

$$F''(x_3) = r''(x_3) - Lh''(x_3) = g''(x_3) + 2L$$

neboť  $h''(x) = -2$  a  $f''(x) = 0$ . Tedy

$$L = \frac{g''(x_3)}{-2} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{2} \left( \frac{b-a}{2} \right)^2$$

□

**Definice 3.5** Mějme zadány hodnoty proměnné  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , násobnosti derivací  $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  a hodnoty  $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že polynom  $f(x)$  je *Hermitovým interpolačním polynomem* těchto dat, jestliže

$$f^{(k_i)}(x_i) = f_i, \quad \text{pro } i = 0, \dots, n.$$

**Definice 3.6** Fergusonovu bázi polynomů stupně nejvýše 3 definujeme jako posloupnost

$$\mathcal{R} = (r_0(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x)),$$

kde

$$\begin{aligned} r_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ r_1(x) &= x - 2x^2 + x^3 \\ r_2(x) &= 3x^2 - 2x^3 \\ r_3(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}$$

**Věta 3.7** Fergusonova báze trivializuje Hermitovu interpolaci prvního řádu v bodech 0 a 1, přesněji

$$f(x) = f_0 r_0(x) + f_1 r_1(x) + f_2 r_2(x) + f_3 r_3(x)$$

je Hermitův interpolant pro hodnoty proměnné  $(0, 0, 1, 1)$  a pro násobnosti derivací  $(0, 1, 0, 1)$ .

**Důkaz:** Přímým výpočtem:  $f'(x) = f_0 r_0'(x) + f_1 r_1'(x) + f_2 r_2'(x) + f_3 r_3'(x)$ , kde

$$\begin{aligned} r_0'(x) &= -6x + 6x^2 \\ r_1'(x) &= 1 - 4x + 3x^2 \\ r_2'(x) &= 6x - 6x^2 \\ r_3'(x) &= -2x + 3x^2. \end{aligned}$$

odtud již získáme

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0 r_0(0) + f_1 r_1(0) + f_2 r_2(0) + f_3 r_3(0) = f_0 \\ f'(0) &= f_0 r'_0(0) + f_1 r'_1(0) + f_2 r'_2(0) + f_3 r'_3(0) = f_1 \\ f(1) &= f_0 r_0(1) + f_1 r_1(1) + f_2 r_2(1) + f_3 r_3(1) = f_2 \\ f'(1) &= f_0 r'_0(1) + f_1 r'_1(1) + f_2 r'_2(1) + f_3 r'_3(1) = f_3. \end{aligned}$$

Další možností je důkaz provést pomocí matice přechodu k monomiální bázi.  $\square$

**Věta 3.8** *Mějme  $g(x) \in C^4[a, b]$ , tedy funkce se spojitou čtvrtou derivací na intervalu  $[a, b]$  a označme  $K = \max_{x \in [a, b]} |g^{(4)}(x)|$ . Necht'  $f(x)$  je  $C^1$  Hermitův interpolační polynom na intervalu  $[a, b]$ , tedy polynom stupně nejvýše 3 splňující*

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad f(b) = g(b), \quad f'(b) = g'(b).$$

*Pak platí*

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| \leq (b - a)^4 \frac{K}{16 \cdot 24}.$$

**Důkaz:** Definuji

- $r(x) = g(x) - f(x) \quad r(a) = r(b) = r'(a) = r'(b) = 0$
- $h(x) = (x - a)^2(b - x)^2 \quad h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$  a  $\max h(x) = h\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$
- Zvolme libovolné  $x_0 \in (a, b)$ . Definujme  $F(x) = r(x) - Lh(x)$ , kde  $L = \frac{r(x_0)}{h(x_0)}$ .

Pak  $F(a) = F(b) = 0$  a také  $F(x_0) = 0$ .  $F$  je  $C^4$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje

- $x_1 \in (a, x_0)$  takové, že  $F'(x_1) = 0$
- $x_2 \in (x_0, b)$  takové, že  $F'(x_2) = 0$
- navíc však  $F'(a) = F'(b) = 0$ .

Funkce  $F'$  je  $C^3$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existují  $x_3 \in (a, x_1)$ ,  $x_4 \in (x_1, x_2)$ ,  $x_5 \in (x_2, b)$  takové, že  $F''(x_3) = F''(x_4) = F''(x_5) = 0$ . Funkce  $F''$  je  $C^2$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existují  $x_6 \in (x_3, x_4)$ ,  $x_7 \in (x_4, x_5)$  takové, že  $F'''(x_6) = F'''(x_7) = 0$ . Funkce  $F'''$  je  $C^1$  na  $[a, b]$  a podle Rolleovy věty existuje  $x_8 \in (x_6, x_7)$  takové, že  $F^{(4)}(x_8) = 0$ .

Zároveň

$$F^{(4)}(x_8) = r^{(4)}(x_8) - Lh^{(4)}(x_8) = g^{(4)}(x_8) - 24L$$

neboť  $h^{(4)}(x) = 24$  a  $f^{(4)}(x) = 0$ . Tedy

$$L = \frac{g^{(4)}(x_8)}{24} \quad \Rightarrow \quad |L| \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{|r(x_0)|}{|h(x_0)|} \leq \frac{K}{24} \quad \Rightarrow \quad |r(x_0)| \leq \frac{K}{24} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4$$

$\square$

**Věta 3.9** Mějme dána  $C^1$  Hermitovská data v rovině, tedy body  $P_0, P_1$  a jednotkové vektory  $U_0, U_1$ . Označme  $K$  jedinou kružnici (případně degenerovanou do přímky), která prochází body  $P_0, P_1$  a s vektory  $U_0, U_1$  svírá stejně velký orientovaný úhel. Necht'  $J \in \mathbb{R}^2$  je libovolný bod různý od  $P_0, P_1$ . Pak existuje právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky)  $O_0$  interpolující data  $P_0, U_0$  a  $J$  a právě jeden orientovaný kruhový oblouk (případně degenerovaný do úsečky)  $O_1$  interpolující data  $J, P_1, U_1$ . Tyto dva oblouky navazují v bodě  $J$  se spojitostí  $C^1$  právě tehdy, když  $J \in K$ .

**Důkaz:** Kružnice  $K$  realizuje symetrii dat, oblouky  $O_0, O_1$  s ní svírají stejné úhly. □

## 4 B-spline a NURBs křivky

**Definice 4.1** Pro posloupnost reálných čísel  $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ ,  $t_i \leq t_{i+1}$  (tzv. uzlů) definujeme rekurentně funkce  $N_{i,p}(t)$ ,  $i = 0, \dots, (m - p - 1)$  stupně  $p$  takto

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

Pro pevné  $p$  označme  $n = m - p - 1$  a pro řídicí body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ ,  $i = 0, \dots, n$ , je  $B$ -spline křivka stupně  $p$  dána vztahem

$$c(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t), \quad t \in [t_p, t_{m-p}].$$

**Definice 4.2** Pro řídicí body  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ ,  $i = 0, \dots, n$  a váhy těchto bodů  $w_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 0, \dots, n$ , definujeme racionální Bézierovu křivku

$$\vec{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.$$

Zjevně pro libovolné kladné  $\mu$  platí, že váhy  $\tilde{w}_i = \mu w_i$  definují stejnou parametrickou křivku, protože  $\mu$  se zkrátí.

**Věta 4.3** Necht'  $\vec{c}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  je racionální Bézierova křivka s řídicími body  $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$  a váhami  $(w_0, \dots, w_n)$ . Zvolme  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  a definujme  $\vec{c}(s)$ ,  $s \in [0, 1]$  jako reparametrizaci  $\vec{c}(t)$  pomocí funkce

$$t = t(s) = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}.$$

Pak  $\vec{c}(s)$  je racionální Bézierova křivka s týmiž řídicími body  $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$  a s váhami  $(\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n)$ , kde  $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$ .

**Důkaz:** Přímým dosazením dostáváme

$$\begin{aligned}
 B_i^n(t(s)) &= \binom{n}{i} \left( \frac{\lambda s}{(\lambda-1)s+1} \right)^i \left( 1 - \frac{\lambda s}{(\lambda-1)s+1} \right)^{(n-i)} = \\
 &= \binom{n}{i} \frac{(\lambda s)^i}{[(\lambda-1)s+1]^i} \frac{[(\lambda-1)s+1-\lambda s]^{(n-i)}}{[(\lambda-1)s+1]^{(n-i)}} = \\
 &= \binom{n}{i} \frac{\lambda^i}{[(\lambda-1)s+1]^n} s^i (1-s)^{n-i} = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda-1)s+1]^n}
 \end{aligned}$$

a tedy i

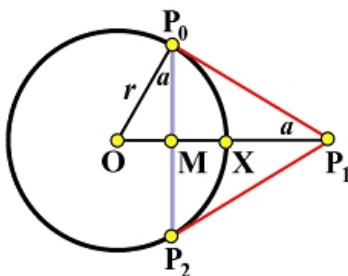
$$\vec{c}(t) = \vec{c}(t(s)) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i B_i^n(s)} = \vec{c}(s).$$

□

**Důsledek 4.4** Každou racionální křivku je možno parametrizovat tak, že první a poslední váha je rovna 1.

**Důkaz:** Mějme křivku s váhami  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  a nějakými řídicími body. Řídicí body ponecháme a definujeme nové váhy  $\tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_0}$ , které nám zajistí  $\tilde{w}_0 = 1$  a podle Definice 4.2 popisují stejnou parametrizaci. Dále definujeme  $\tilde{\tilde{w}}_i = \tilde{w}_n^{-\frac{i}{n}} \tilde{w}_i$ , která zajistí  $\tilde{\tilde{w}}_0 = \tilde{\tilde{w}}_n = 1$  a podle Věty 4.3 je reparametrizací téže křivky. □

**Věta 4.5** Kvadratická racionální Bézierova křivka  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  s řídicími body  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  a váhami  $(w_0, w_1, w_2) = (1, w, 1)$  je parametrizací kruhového oblouku právě tehdy, když  $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|$ , body  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  nejsou kolinéární a  $w = \sin a$ , kde  $a = \frac{\angle \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}{2}$ .



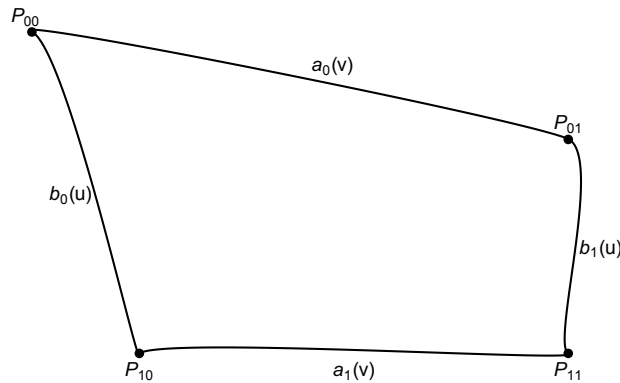
## 5 Plochy a subdivize

**Definice 5.1** Pro dvě prostorové křivky  $\mathbf{a}_0(v)$ ,  $\mathbf{a}_1(v)$  parametrizované na stejném intervalu  $I$ , definujeme jejich lineární přechodovou plochu

$$\mathbf{P}(u, v) = (1-u)\mathbf{a}_0(v) + u\mathbf{a}_1(v), \quad u \in [0, 1], v \in I.$$

**Definice 5.2** Pro prostorové křivky  $\mathbf{a}_0(v)$ ,  $\mathbf{a}_1(v)$ ,  $v \in [0, 1]$  a  $\mathbf{b}_0(u)$ ,  $\mathbf{b}_1(u)$ ,  $u \in [0, 1]$  takové, že  $\mathbf{a}_0(0) = \mathbf{b}_0(0) =: \mathbf{P}_{00}$ ,  $\mathbf{a}_0(1) = \mathbf{b}_1(0) =: \mathbf{P}_{01}$ ,  $\mathbf{a}_1(0) = \mathbf{b}_0(1) =: \mathbf{P}_{10}$ ,  $\mathbf{a}_1(1) = \mathbf{b}_1(1) =: \mathbf{P}_{11}$  definujeme plochu  $\mathbf{P}(u, v)$  zvanou *Coonsův bilineární plát* jako řešení rovnice

$$(1 - u, -1, u) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u, v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$



**Věta 5.3** *Coonsův bilineární plát interpoluje zadané křivky, přesněji*

$$\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v), \quad \mathbf{P}(1, v) = \mathbf{a}_1(v), \quad \mathbf{P}(u, 0) = \mathbf{b}_0(u), \quad \mathbf{P}(u, 1) = \mathbf{b}_1(u).$$

**Důkaz:** Ukážeme, že  $\mathbf{P}(0, v) = \mathbf{a}_0(v)$ . Jelikož  $u = 0$ , máme:

$$(1, -1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(0) & \mathbf{P}(0, v) & \mathbf{b}_1(0) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

tedy

$$(0, \mathbf{a}_0(v) - \mathbf{P}(0, v), 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{a}_0(v) + \mathbf{P}(0, v) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}_0(v) = \mathbf{P}(0, v).$$

□

**Definice 5.4** *Obdélníková (tensor-product) Bézierova plocha* je pro danou řídicí síť  $\mathbf{P}_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$  dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{P}_{i,j},$$

kde  $B_i^m(u)$ ,  $B_j^n(v)$  jsou Bernsteinovy polynomy.

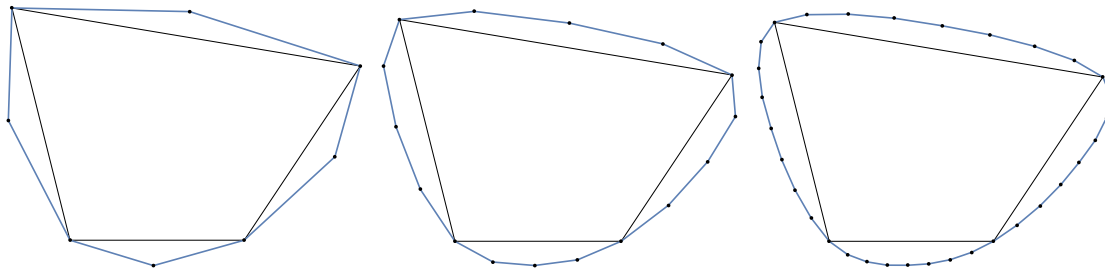
**Definice 5.5** NURBS plocha je určena sítí řídicích bodů  $\mathbf{P}_{i,j}$ , jejich váhami  $w_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$ , dvěma uzlovými vektory  $U = (u_0, \dots, u_k)$  a  $V = (v_0, \dots, v_l)$  a stupni  $p, q$ . Parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}.$$

**Definice 5.6** Čtyřbodové schéma pro křivky je interpolační schéma, které mezi každé dva body  $v_i, v_{i+1}$  vloží nový bod a původní zůstávají. Geometrická pravidla jsou následující:

$$v'_{2i} = v_i, \quad v'_{2i+1} = -\frac{1}{16}v_{i-1} + \frac{9}{16}v_i + \frac{9}{16}v_{i+1} - \frac{1}{16}v_{i+2}.$$

Čtyřbodové schéma zachovává výchozí řídicí polygon ve všech krocích. Výchozí body jsou tedy obsaženy také v limitní křivce.



**Definice 5.7** Doo-Sabin pro plochy je aproximační metoda založená na ořezávání vrcholů dané sítě. Každému vrcholu je přiřazeno tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje. Metoda vypočte pro každou stěnu její těžiště  $c$  jako průměr všech vrcholů. Poté každému vrcholu  $v_i$  stěny přiřadí nový vrchol jako střed úsečky  $c, v_i$ . Nově vzniklá síť obsahuje stěny tří typů (v závorce je uvedena, barva odpovídající stěně v obrázku):

- F-stěny: (Modrá) Pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna a to spojením nových vrcholů dané stěny.
- E-stěny: (Zelená) Jsou sestrojeny pro každou hranu původní sítě propojením čtyř nově vzniklých vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů hrany.
- V-stěny: (Červená) Vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě. Pokud měl vrchol valenci  $n$  (počet hran vedoucích do vrcholu), je V-stěna  $n$ -úhelník.

