

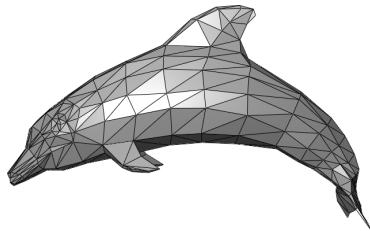
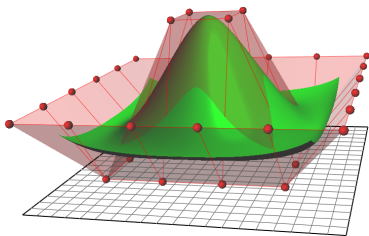
Subdivision krivky a plochy

Michal Molnár

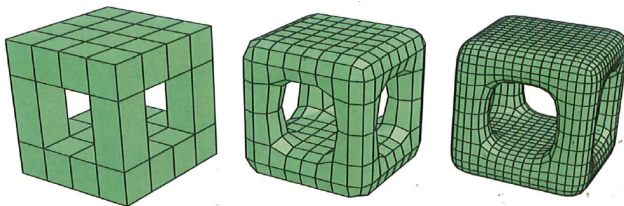


Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

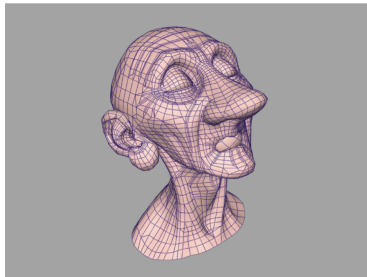
- NURBS dokážu reprezentovať hladké plochy, ale len s obmedzenými topologickými vlastnosťami.
- Mnohouholníkové siete dokážu reprezentovať ľubovoľný tvar, ale len ako diskrétnu aproximáciu.



- NURBS dokážu reprezentovať hladké plochy, ale len s obmedzenými topologickými vlastnosťami.
- Mnohouholníkové siete dokážu reprezentovať ľubovoľný tvar, ale len ako diskretnú aproximáciu.
- Subdivision kombinuje oba prístupy: hladkú plochu definuje ako limitu postupnosti diskretných sietí.

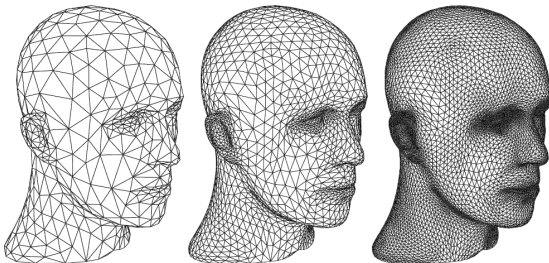


- 3D počítačová grafika – obrazovka zobrazuje diskkrétne tvary, subdivision umožňuje ovládať úroveň detailov.
- 3D animácie – podobne ako pri grafike, navyše ovládanie a zmena kontrolného tvaru u kontrolného polygónu je jednoduchšia ako napr. u NURBS plôch.
- Modelovanie / design produktov – rôzne subdivision metódy dokážu simulovať vzhľad rôznych materiálov.



Krátky film Geriho hra (Pixar, 1997) bol ako prvý animovaný pomocou subdivision metód.

- **Subdivision je proces**, ktorý zo zadaného riadiaceho polygónu/siete vytvorí nový polygón/sieť pomocou vopred daných pravidiel.
- Subdivision krivka/plocha je definovaná ako limita tohto procesu.
- Požadované vlastnosti:
 - **kompaktný support** – oblasť vplyvu počiatočného bodu na výslednú krivku/plochu je obmedzená,
 - **lokálna definícia** – výpočet nového bodu nezáleží na vzdialených bodoch siete,
 - **jednoduchosť pravidiel**,
 - **spojitosť** – mala by závisieť na pravidlách, nie na vstupných hodnotách.



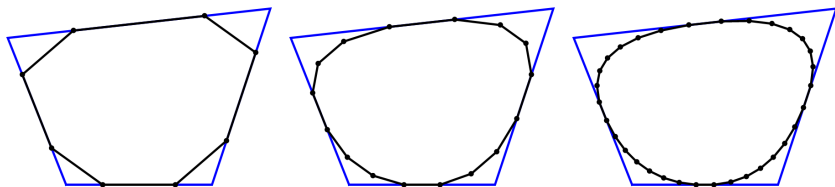
príklad: Chaikinov algoritmus

- Historicky prvý subdivision proces (1974), autor George Chaikin.
- Z pôvodnej sady bodov $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ vyrobí $\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_{2n}$ ako

$$\mathbf{P}'_{2i-1} = \frac{3}{4}\mathbf{P}_i + \frac{1}{4}\mathbf{P}_{i+1},$$

$$\mathbf{P}'_{2i} = \frac{1}{4}\mathbf{P}_i + \frac{3}{4}\mathbf{P}_{i+1}.$$

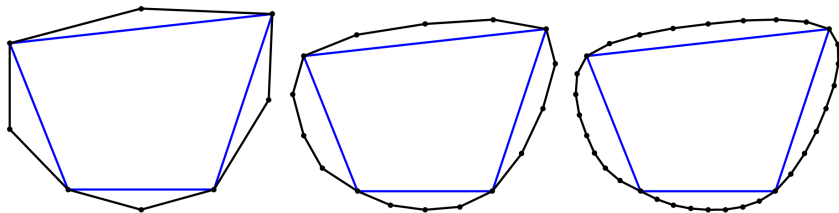
- Výsledná krivka je uniformný B-Spline stupňa 2.



príklad: 4-bodová schéma

- Používaná na uzavreté krivky. Limitná krivka je triedy $\mathcal{C}^2$.
- Zdvojnásobuje počet bodov:

$$\mathbf{P}'_{2i} = \mathbf{P}_i,$$
$$\mathbf{P}'_{2i+1} = -\frac{1}{16}\mathbf{P}_{i-1} + \frac{9}{16}\mathbf{P}_i + \frac{9}{16}\mathbf{P}_{i+1} - \frac{1}{16}\mathbf{P}_{i+2}.$$



Rozlišujeme schémy:

- **Aproximačné / interpolačné** – pri aproximačných metódach limitný objekt neprechádza vrcholmi počiatočného polygónu; pri interpolačných obsahuje polygón pôvodné body v každom kroku.
- **Stacionárne** – pravidlá, ktoré používame, sú v každom kroku rovnaké.
- **Uniformné** – pravidlá, ktoré používame, sú rovnaké v každom mieste nášeho polygónu.
- **Globálne / lokálne** – pri globálnych pravidlá aplikujeme na celý polygón; pri lokálnych delíme len nejakú časť.
- **Binárne / ternárne / n -árne** – počet vrcholov sa v každom kroku zdvojnásobí / ztrojnásobí / zvýši n -krát.

Matica subdivision

- Označme $p = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)^T$.
- Výpočet nových bodov v jednom kroku vieme napísať ako

$$p' = S \cdot p,$$

kde S je matica subdivision.

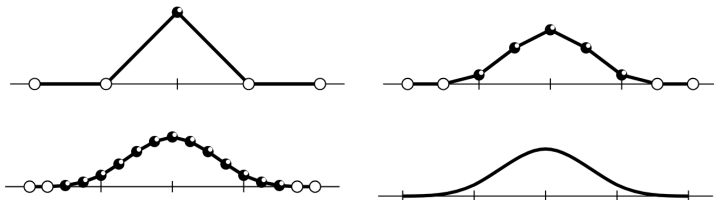
- Aby sme sa vyhli problému s rozmermi, maticu S považujeme za nekonečnú. Vektory p, p' typicky dopĺňame 0.
- Matica subdivision pre Chaikinovu schému:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 3/4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Pri skúmaní vlastností subdivision schémy je užitočné vedieť, kde sa prejaví zmena jedného bodu.
- Zo stĺpca matice vieme vyčítať **masku subdivision**, napr. pre Chaikinovu schému: $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

- Zo stĺpca matice vieme vyčítať **masku subdivision**, napr. pre Chaikinovu schému: $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.
- Aplikovaním jedného kroku subdivision na vektor $(\dots, 0, 1, 0, \dots)^T$ dostaneme práve masku.
- Opakovaním tohto procesu dostaneme postupnosť po častiach lineárnych funkcií, ktorých limitou je funkcia $b(t)$, tzv. **báza subdivision**. Pre subdivision krivku $c(t)$ potom platí

$$c(t) = \sum_i \mathbf{P}_i b(t - i).$$



príklad: subdivision pre B-Spline krivky

- Predpokladajme B-Spline bázu stupňa d s uzlami v celých číslach. Jednotlivé báзовé funkcie sú tak len posunutím funkcie $N_d(t)$, ktorá je nenulová na intervale $(0, d + 1)$.
- Pre takúto bázu platí

$$N_d(t) = \frac{1}{2^d} \sum_{i=0}^{d+1} \binom{d+1}{i} N_d(2t - i).$$

- Pre vektory

$$\begin{aligned} n &= (\dots, N_d(t+1), N_d(t), N_d(t-1), \dots)^T, \\ n' &= (\dots, N_d(2t+1), N_d(2t), N_d(2t-1), \dots)^T \end{aligned}$$

tak platí $n = An'$, kde matica A obsahuje v každom riadku postupne hodnoty $\frac{1}{2^d} \binom{d+1}{i}$.

- Pre B-Spline krivku $c(t)$ s riadiacim polygónom $p = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_d)$ tak dostávame

$$\begin{aligned}c(t) &= \sum_{i=0}^d N_d(t-i) \mathbf{P}_i = \mathbf{n}^T \mathbf{p} \\&= (\mathbf{A} \mathbf{n}')^T \mathbf{p} \\&= \mathbf{n}'^T \mathbf{A}^T \mathbf{p} = \mathbf{n}'^T \mathbf{p}'.\end{aligned}$$

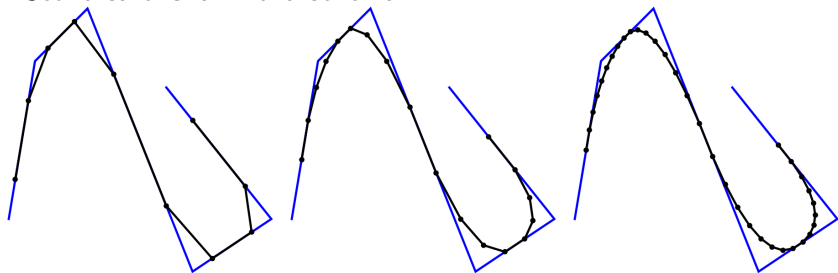
- Dostali sme rovnakú krivku s novou bázou a novým riadiacim polygónom $\mathbf{p}' = \mathbf{A}^T \mathbf{p}$.
- Subdivision proces daný maticou $\mathbf{A}^T$ konverguje práve k B-Spline krivke $c(t)$ stupňa d .

príklad: subdivision pre B-Spline krivky

- Pre $d = 2$ platí

$$A^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 3 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 3 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 3/4 & 1/4 & 0 & \dots \\ \dots & 1/4 & 3/4 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 3/4 & 1/4 & \dots \\ \dots & 0 & 1/4 & 3/4 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Jedná sa o Chaikinovu schému.

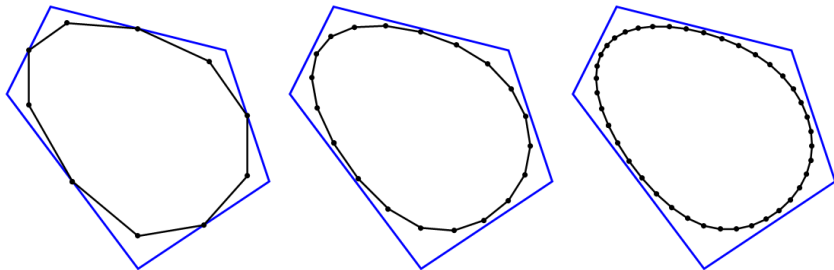


príklad: Lane-Riesenfeld

- Na začiatok každý bod zadaného polygónu zdvojnásobíme, čím dostaneme postupnosť bodov $\mathbf{P}_i^0$.
- Následne zopakujeme d -krát *vyhladzovací krok*:

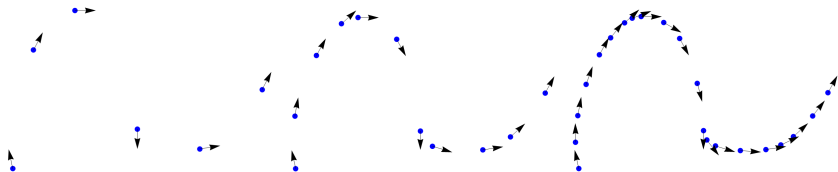
$$\mathbf{P}_i^{j+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i^j + \mathbf{P}_{i+1}^j).$$

- Keď nový bod vyjadríme pomocou bodov pôvodného polygónu, dostaneme práve váhy tvaru $\binom{d+1}{i}$.
- Výsledkom je B-Spline krivka stupňa d .



Hermitovské dáta

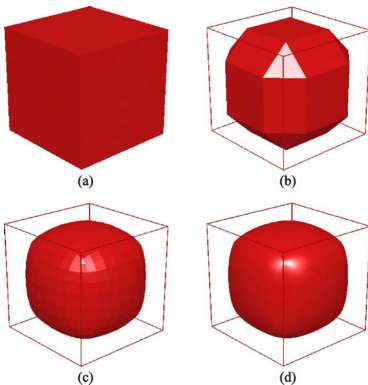
- Na vstupe algoritmu nemusíme mať len body, ale napr. aj dotykové vektory v daných bodoch. Generované dáta sú rovnakého typu.
- Príklad schémy:
 - Zostrojíme trojuholník daný bodmi $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}$ a ich dotykovými vektormi.
 - Stred vpísanej kružnice vložíme medzi $\mathbf{P}_i$ a $\mathbf{P}_{i+1}$. Dotykový vektor definujeme znormovaním $\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i$.
 - Výsledná krivka je triedy $\mathcal{G}^1$.



- Siete delíme na **štvoruholníkové** a **trojuholníkové**. (Iné sa v subdivision typicky nepoužívajú.)
- V **pravidelných** sieťach vychádza z každého vrcholu rovnaký počet hrán:
 - v štvoruholníkových sieťach 4 vnútri siete, 3 na okraji,
 - v trojuholníkových sieťach 6 vnútri siete, 4 na okraji.
- Pravidelné siete dokážu generovať len plochy topologicky zhodné s rovinou, valcovou plochou alebo povrchom torusu. (Např. sféra nemá pravidelnú sieť.)
- Klasifikácia rovnaká ako u kriviek.
- Analýza vlastností je komplikovanejšia.

príklad: Doo-Sabin

- Aproximačná metóda založená na orezávaní vrcholov, rozšírenie Chaikinovho algoritmu.
- Výpočet vrcholov:
 - 1 Pre každú stenu urči ťažisko c ako priemer vrcholov v_i .
 - 2 Nové vrcholy v'_i ležia v strede úsečky spájajúcej c a v_i .



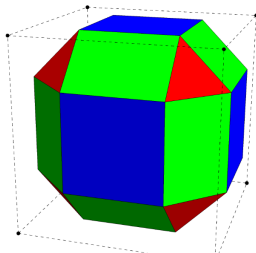
príklad: Doo-Sabin

- Výpočet vrcholov:

- ① Pre každú stenu urči ťažisko c ako priemer vrcholov v_i .
- ② Nové vrcholy v'_i ležia v strede úsečky spájajúcej c a v_i .

- Určenie stien:

- F-steny (modré): Pre každú stenu pôvodnej siete vznikne nová stena spojením vrcholov v'_i .
- E-steny (zelené): Pre každú hranu pôvodnej siete vznikne stena spojením štyroch vrcholov, ktoré nahradili koncové body hrán.
- V-steny (červené): Pre každý vrchol pôvodnej siete vznikne stena spojením vrcholov, ktoré ho nahradili. Ak z vrcholu viedlo n hrán, nová stena bude n -uholník.



príklad: „Motýlia“ metóda

- Interpoláčná schéma pre trojuholníkové siete s parametrom. Rozšírenie 4-bodovej schémy.
- Nový vrchol siete v' prislúchajúci hrane $v_1 v_2$ vypočítame ako

$$v' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{\gamma}{8}(v_3 + v_4) - \frac{\gamma}{16}(v_5 + v_6 + v_7 + v_8).$$

- Nové hrany vzniknú spojením v' s v_1 , v_2 a s novými vrcholmi prislúchajúcimi hranám $v_1 v_3$, $v_2 v_3$, $v_1 v_4$, $v_2 v_4$.
- Každý trojuholník je tak nahradený 4 novými.
- Limitná plocha je triedy $\mathcal{C}^1$.

