

# Geometrie pro počítačovou grafiku - PGR020

Aplikace shodností v rovině, teorie křivek

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK



- Sestrojte pětiúhelník, jsou-li dány středy jeho stran.
- Sestrojte čtverec, jsou-li dány čtyři body ležící na jeho čtyřech stranách (případně prodloužených).
- Analyzujte a vykreslete kuželosečku s rovnicí

$$x^2 + 16y + 4y^2 + 13 - 2x = 0$$

- Analyzujte a vykreslete kuželosečku s rovnicí

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 - 280x + 290y + 325 = 0$$

Viz soubor "kuzelosecky.nb" na stránkách předmětu.

- Někdy je výhodné využít podobnost (namísto shodnosti) s maticí

$$\begin{pmatrix} a & -b & p_x \\ b & a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Při zobrazování objektů popsaných implicitní rovnicí se do této rovnice dosazuje inverzní zobrazení. Přesněji řečeno, je-li

$$M = \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = 0\},$$

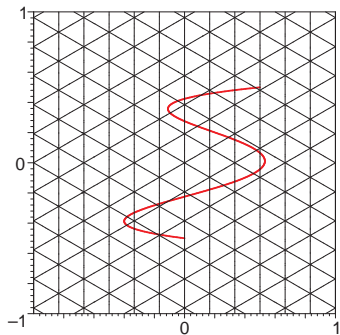
pak

$$f(M) = \{\mathbf{x} : F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0\},$$

kde  $M$  je množina popsaná implicitně pomocí funkce  $F$  a  $f$  je zobrazení.

# Cauchy - Croftonova formule

- jak se vypočítá délka křivky
- jakým způsobem popíšeme systém přímek ve 2d
- chceme určité hezké chování vůči eukleidovským transformacím



Libovolnou přímku v rovině vyjádříme jednoznačně (kromě těch které prochází počátkem) obecnou rovnicí

$$(\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y = c,$$

kde  $\alpha \in (-\pi, \pi)$  a  $c > 0$ .

Mírou  $\mu$  množiny přímek rozumíme obsah příslušné množiny v prostoru parametrů  $(\alpha, c)$ .

**Věta:** Tato míra je invariantní vůči grupě shodností  $E(2)$ .

Až na násobek se jedná o jedinou invariantní míru.

**Věta:** Pro libovolnou rovinnou křivku  $\mathbf{p}$  platí

$$d(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{P}_{\mathbf{p}}),$$

kde  $d(\mathbf{p})$  je délka křivky a  $\mu(\mathcal{P}_{\mathbf{p}})$  míra množiny přímek, které křivku protínají, bráno s násobností (počtem průsečíků).

# Odhad míry v Cauchy - Croftonově formuli

Předpokládejme, že máme síť s kroky  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{c}$  pro parametry  $\alpha$  a  $c$  ve vyjádření přímky, a že tato síť má  $k$  průsečíků s danou křivkou. Potom míru množiny všech přímek protínajících křivku odhadneme jako

$$\mu(\mathcal{P}_p) \approx k\bar{\alpha}\bar{c}.$$

**Příklad:** Mějme křivku  
 $\left[\frac{81}{2}t^4 - 80t^3 + 48t^2 - 8t, t - \frac{1}{2}\right]$  pro  
 $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Výpočtem pomocí integrálu dostáváme její délku jako 2.861.

Uvažujme dále síť s kroky  $\bar{\alpha} = \frac{\pi}{3}$  a  $\bar{c} = \frac{1}{6}$ . Ta má s křivkou 34 průsečíků a tedy dostáváme pro délku křivky odhad  $\frac{34 \cdot \pi}{2 \cdot 3 \cdot 6} \approx 2.967$ .

Viz soubor "cauchy-crofton.mws" na stránkách předmětu.

