

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace

Plzeň, 2009

Jitka Prošková

Děkuji především vedoucímu diplomové práce panu RNDr. M. Lávičkovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce a poskytování cenných rad při jejím zpracování. Děkuji též ostatním, kteří mi přispěli pomocí k jejímu dokončení.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne _____

_____ podpis

Název práce: *Kvaterniony, duální kvaterniony a jejich aplikace*

Autor: *Jitka Prošková*

Katedra: *Katedra matematiky*

Vedoucí diplomové práce: *RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.*

e-mail vedoucího práce: *lavicka@kma.zcu.cz*

Abstrakt: *Práce popisuje historii kvaternionů a následný vznik duálních kvaternionů. Je zde zpracována základní charakteristika tělesa kvaternionů. Zavedený jednotkový kvaternion je dále využíván k popisu rotace ve speciální ortogonální grupě. Dále jsou popsána duální čísla, která vznikla rozšířením reálných čísel duální jednotkou. Kvaterniony a duální čísla jsou využívány k zavedení duálních kvaternionů. Analogicky zavedený jednotkový duální kvaternion se používá k popisu přímé shodnosti ve speciální euklidovské grupě. Další část práce je věnovaná použití duálních kvaternionů v praxi. Jsou popsány vybrané metody z oblasti robotiky (hand-eye kalibrace), počítačové grafiky (dual quaternion blending) a strojírenství (racionální Bézierova a NURBS duální kvaternionová křivka). Práce je zakončena aplikací algoritmu duálních kvaternionů v kybernetice v oblasti segmentace, kdy je nahrazen stávající maticový výpočet.*

Klíčová slova: *Kvaternion, algebra kvaternionů, historie kvaternionů, duální čísla, duální kvaternion, grupa $SO(n)$, $SE(n)$, přímá shodnost, hand-eye kalibrace, racionální Bézierova duální kvaternionová křivka, skinning, segmentace.*

Title: *Quaternions, dual quaternions and their application*

Author: *Jitka Prošková*

Department: *Department of Mathematics*

Supervisor: *RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.*

Supervisor's e-mail address: *lavicka@kma.zcu.cz*

Abstrakt: *The thesis is focused on the formulation of rotation and translation using dual quaternions. In Section 2, we describe the history of quaternions and the dual quaternions. The fundamental characteristic of the field of quaternions is processed here. The introduced unit quaternion is used consequently for describing the rotation in a special orthogonal group. Next section deals with the dual numbers which were introduced from real numbers using the dual unit. Quaternions and dual numbers are used for introduction of dual quaternions. The analogously introduced unit dual quaternion serves for describing rigid transformation in the special Euclidean group. The following part is devoted to practical application of dual quaternions. Several selected methods from the fields of robotics (hand-eye calibration), computer graphics (dual quaternion blending) and engineering (rational Bezier and NURBS dual quaternion curve) are described here. The thesis is concluded by the description of some applications of the dual quaternions' algorithm in cybernetics in the field of segmentation, when the standard matrix calculation is replaced.*

Key words: *Quaternion, algebra of quaternions, dual numbers, dual quaternion, group $SO(n)$, $SE(n)$, rigid transformation, screw motion, hand-eye calibration, rational Bézier dual quaternion curve, skinning, segmentation.*

Přehled použitého značení

$q, \hat{q}, p, \hat{p}, q_1, q_2, q_3, \dots$	kvaternion
$1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	kvaternionové jednotky
s	skalární část kvaternionu (skalár)
v, v_1, v_2, \hat{v}	ryzí kvaternion
\mathbb{H}	množina všech kvaternionů
\mathbb{H}_1	množina všech jednotkových kvaternionů
\mathbb{H}_p	množina všech ryzích kvaternionů
\bar{q}	kvaternion konjugovaný s kvaternionem q
q^{-1}	inverzní kvaternion ke kvaternionu q
$\ q\ $	norma kvaternionu q
$GL(n, F)$	obecná lineární grupa
$O(n)$	ortogonální grupa
$SO(n)$	speciální ortogonální grupa
$SE(n)$	speciální euklidovská grupa
$(E)_n$	euklidovský prostor
\mathbb{C}	obor komplexních čísel
\mathbb{R}	obor reálných čísel
\Re	reálná část
\Im	imaginární část
g, h	komplexní číslo
\bar{d}	číslo komplexně sdružené s číslem d
\mathbb{F}	těleso
A, B, I, X, \dots	matice
A^T	transponovaná matice k matice A
$t, r, a, p, \hat{p}, l, m, a_1, a_2, l, \dots$	vektor
R, R_A, R_X, R_B	rotace
$\theta, \varphi, \hat{\varphi}, \beta, \gamma$	úhel otočení
$z, \hat{z}, z_1, z_2, z_3, a_d, b_d, c_d, d_d, \dots$	duální číslo
ε	duální jednotka
\mathbb{D}	množina všech duálních čísel
\mathbb{D}_p	množina všech ryzích duálních čísel
\bar{z}	duální číslo konjugované s duálním číslem z
z^{-1}	inverzní duální číslo k duálnímu číslu z
$*_\varepsilon$	duální část
i	komplexní jednotka
z, z_1, z_2	duální vektor
$q_d, \hat{q}_d, q_{d_1}, \hat{p}_d, p_{d_1}, \dots$	duální kvaternion
\mathbb{H}_d	množina všech duálních kvaternionů
\mathbb{H}_{d_1}	množina všech jednotkových duálních kvaternionů

$\overline{\mathbf{q}_d}$	duální kvaternion konjugovaný s duálním kvaternionem \mathbf{q}_d
\mathbf{q}_d^*	duální kvaternion duálně konjugovaný s duálním kvaternionem \mathbf{q}_d
\mathbf{q}_d^{-1}	inverzní duální kvaternion k duálnímu kvaternionu \mathbf{q}_d
$\ \mathbf{q}_d\ $	norma duálního kvaternionu \mathbf{q}_d
α, θ_d, \dots	duální úhel
m, n, k, \dots	přímka
$R\mathbf{p}_d$	rotace duálního kvaternionu \mathbf{p}_d
$T\mathbf{p}_d$	translace duálního kvaternionu \mathbf{p}_d
$P, \hat{P}, P'F, \hat{F}, F', \dots$	bod
$\Re(q)$	skalární část kvaternionu q
$\Im(q)$	vektorová část kvaternionu q
\mathbf{H}	magnetické pole
\mathbf{E}	elektrické pole
\mathbf{D}	posuvný (Maxwellův) proud
\mathbf{B}	magnetická indukce
\mathbf{J}	vodivý proud
\mathbf{A}	vektorový potenciál
ρ	hustota volného náboje
φ	skalární potenciál
w_i	i -tá váha popisující míru vlivu kloubu j_i
j_i	i -tý kloub

Obsah

1	Úvod	1
2	Historie kvaternionů a duálních kvaternionů	3
2.1	Historie komplexních čísel	3
2.2	Rozšiřování oboru komplexních čísel	3
2.3	Duální kvaterniony	5
3	Algebra kvaternionů	7
3.1	Úvodní pojmy	7
3.2	Základní vlastnosti	8
3.3	Kvaterniony a rotace v $\mathbf{SO}(3)$	12
4	Algebra duálních čísel	16
4.1	Úvodní pojmy	16
4.2	Základní vlastnosti	16
5	Algebra duálních kvaternionů	22
5.1	Úvodní pojmy	22
5.2	Základní vlastnosti	22
5.3	Duální kvaterniony a přímé shodnosti v $\mathbf{SE}(3)$	27
6	Aplikace duálních kvaternionů v praxi	36
6.1	Maxwellovy rovnice	36
6.2	Hand-eye kalibrace	37
6.3	Skeletální animace (Skinning)	41
6.4	Racionální Bézierova a NURBS křivka duální kvaterniony	46
6.5	Segmentace objektů z ultrazvukového obrazu	48
6.6	Výpočet otočení a posunutí ploch, křivek a bodů v trojrozměrném prostoru .	49
7	Závěr	54
	Literatura	56

A	Algoritmy pro výpočet otočení a posunutí ploch, křivek a bodů duálními kvaterniony	i
B	Obsah přiloženého CD	xiii

1 Úvod

Kvaterniony jsou zobecněním komplexních čísel v trojrozměrném prostoru. U zrodu kvaternionů stál Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Nalezl vztah pro násobení čtyř základních jednotek, pro něž platí $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Přišel na to, že je zapotřebí zavést jednu reálnou a tři imaginární složky, aby byla správně vytvořena algebra kvaternionů. Kvaternion $s + ix + jy + kz$ lze zapsat jako uspořádanou čtveřici $[s, (x, y, z)]$. Častěji však bývá zapisován ve zkráceném tvaru $[s, \mathbf{v}]$, kde s je skalár a \mathbf{v} je chápán jako vektor v trojrozměrném prostoru (viz [44]).

Jednotkové kvaterniony $\|q\|=1$ jsou významné pro počítačovou grafiku. Tento kvaternion se dá zapsat jako $q = [\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta]$, kde $\|\hat{\mathbf{v}}\|=1$. Kvaternion popisuje rotaci v trojrozměrném prostoru, a to rotaci kolem jednotkového vektoru $\hat{\mathbf{v}}$ o úhel 2θ (viz [6]).

Reprezentace rotace pomocí kvaternionů je výhodnější než pomocí matic, protože kvaterniony obsahují pouze čtyři složky, zatímco matice typu 3×3 mají složek devět. Pro rotaci dostáváme vztah $\hat{p} = qpq^{-1}$, kde q je jednotkový kvaternion. Tento vztah je důležitý, protože jej budeme aplikovat i na rotace spojené s duálními kvaterniony, více např. v [33].

Duální kvaterniony vznikly složením kvaternionů a duálních čísel. Nejprve se zmíníme o duálních číslech. Poprvé je v pravém významu uvedl v matematických kruzích William Kingdon Clifford (1845–1879). Tento anglický matematik se také podílel i na objevu duálních kvaternionů¹.

Duální čísla se podobají komplexním číslům – v podstatě si je můžeme i podobně představit. Základní odlišností je duální jednotka ε , pro kterou platí vztah $\varepsilon^2 = 0$. Algebra duálních čísel tvoří komutativní, asociativní okruh s jednotkovým prvkem. Pomocí duálních čísel můžeme zavést duální vektor případně duální úhel, který je používán v souvislosti s duálními kvaterniony, více v kapitole 4. Nyní již můžeme říci, že duální kvaternion je kombinace duálního čísla a duálního vektoru, tedy $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$, duální kvaternion má osm složek. Můžeme si jej také představit jako součet dvou kvaternionů, kdy jeden z nich je násoben duální jednotkou. Tato algebra má podobné vlastnosti jako algebra kvaternionů, netvoří těleso, ale asociativní okruh s jednotkovým prvkem. Podrobněji se budeme zabývat duálními čísly v kapitole 5.

Hlavní výhodou duálních kvaternionů je fakt, že dokáží jednoduše reprezentovat rotaci a translaci v jedné prostorové operaci (viz [24]). Právě duální kvaterniony a jejich schopnost reprezentovat rotaci a translaci se využívá v grafice, kde nepomáhají maticové reprezentace. Takovými technikami, kde je lze využít je například skinnig (viz [23]), o kterých se ještě zmíníme. Duální kvaterniony bývají také často aplikovány v robotice (viz [10]) nebo ve fyzice (viz [41]).

Nyní máme základní představu o tom, co jsou duální kvaterniony a k čemu nám mohou posloužit. V následujícím textu uvedeme historické souvislosti s objevem kvaternionů a duálních kvaternionů. Zavedeme kvaterniony, duální čísla, duální kvaterniony a jejich základní vlastnosti, které budeme dále využívat. Pokusíme se ukázat, že kvaternion popisuje rotaci

¹V literatuře bývají duální kvaterniony rovněž označovány jako bi-kvaterniony nebo komplexní kvaterniony.

v trojrozměrném prostoru a duální kvaternion reprezentuje přímou shodnost. Dále zmíníme některé oblasti, které s duálními kvaterniony pracují a nastíníme některé algoritmy. Nakonec se pokusíme implementovat duální kvaterniony do jedné z oblastí kybernetiky a to segmentace.

2 Historie kvaternionů a duálních kvaternionů

2.1 Historie komplexních čísel

Počátky teorie komplexních čísel lze najít v 16. století, a to v pracích *Ars magna* (1545) Gerolama Cardana (1501–1576) a *Algebra* (1572) Rafaela Bombelliho (1526–1573), které se věnovaly řešení algebraických rovnic. V 17. a 18. století se začalo užívat termínu „imaginární číslo“ a komplexními čísly se začali zabývat matematikové jako například Abraham de Moivre (1667–1754), Leonhard Euler (1707–1783), který zavedl symbol i pro $\sqrt{-1}$, Johann Bernoulli (1667–1748) a další. Koncem 18. století se komplexní čísla již hojně užívala v matematické analýze, hydrodynamice nebo kartografii. Přesto však nebylo stále jasné jak chápat prvek $\sqrt{-1}$ a jak si představit komplexní číslo. Euler chápal komplexní číslo $x + iy$ jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi (x, y) . Pomocí polárních souřadnic vyjadřoval komplexní číslo v goniometrickém tvaru $x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Na přelomu 18. a 19. století dospěl Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny. Rovina komplexních čísel byla proto v 19. století nazvána Gaussovou rovinou.

Sčítání a násobení komplexních čísel je dáno těmito vztahy:

$$x + iy + \hat{x} + i\hat{y} = (x + \hat{x}) + i(y + \hat{y}),$$

$$(x + iy)(\hat{x} + i\hat{y}) = (x\hat{x} - y\hat{y}) + i(x\hat{y} + y\hat{x}),$$

případně v goniometrickém tvaru, tj.:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)][\hat{r}(\cos \hat{\varphi} + i \sin \hat{\varphi})] = r\hat{r}[\cos(\varphi + \hat{\varphi}) + i \sin(\varphi + \hat{\varphi})].$$

Komplexní číslo $x + iy$ je v rovině kartézských souřadnic znázorněno bodem $M = [x, y]$, nebo vektorem \overrightarrow{OM} s počátečním bodem O a koncovým bodem M . Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů a násobení komplexních čísel představuje složení rotace (kolem počátku) a stejnohlosti (se středem v počátku).

2.2 Rozšiřování oboru komplexních čísel

Způsob, jakým byla komplexní čísla vytvořena a také jejich geometrické interpretace, vedl k dalším pokusům o rozšiřování oboru komplexních čísel na „větší“ číselný obor. Těmto více-složkovým číslům ze později začalo říkat hyperkomplexní čísla.

Začaly se studovat formální výrazy typu

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n, \tag{1}$$

kde n bylo zvolené přirozené číslo, a_0, a_1, \dots, a_n byla reálná čísla a $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ nové základní jednotky. Dnes ovšem víme, že systém hyperkomplexních čísel lze vytvořit pouze pro

$n = 1, 2, 4, 8$, což dokázal německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919) roku 1898-viz [20]. Tedy reálné alternativní algebry s dělením konečné dimenze existují právě čtyři. Tomuto tvrzení se také říká zobecněná Frobeniova věta. Přičemž pokud $n = 1$ jde o reálná čísla a tedy i o komutativní asociativní algebru, a pokud $n = 2$ jde o komplexní čísla a komutativní asociativní algebru. Jestliže $n = 4$ jedná se o nekomutativní asociativní algebru (kvaterniony) a pro $n = 8$ mluvíme o oktonionech, které tvoří nekomutativní, neasociativní a alternativní algebru². Dále existuje ještě nekonečně mnoho algeber, které nejsou ani alternativní (jejich popis není ještě zcela znám).

Sčítání výrazů (1) bylo definováno po složkách a mělo vlastnosti jako je asociativita, komutativita, existence nulového prvku a existence opačného prvku. Na násobení se kladly požadavky jako je asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku a existence inverzního prvku pro nenulový prvek, které nalezení vhodných vzorců pro násobení samozřejmě komplikovalo.

Právě těmito problémy se začali zabývat William Rowan Hamilton, Arthur Cayley (1821–1895), Augustus de Morgan (1806–1871), bratři Charles Graves (1810–1860) a John Thomas Graves (1806–1870) a další. Snažili se najít nový číselný obor (alespoň trojsložkových čísel), který by rozšiřoval obor komplexních čísel. Násobení mělo být asociativní a komutativní a měla být zaručena existence jednotkového prvku a ke každému nenulovému prvku prvek inverzní. Výsledná struktura pak měla být komutativním tělesem.

Hamilton se několik let pokoušel nalézt obor čísel, která by rozšiřovala již známý obor komplexních čísel. Zaměřil se na trojsložková čísla, ale jeho snažení bylo marné. Při hledání vzorce pro násobení trojsložkových čísel mu vycházely struktury, které obsahovaly netriviální dělitele nuly (tj. nenulové prvky, jejichž součin je roven nule). Jak později napsal svému synovi: „Každé ráno u snídaně jste se mě ty a tvůj malý bratr William Edwin ptali, jestli už umím násobit trojice. A já vám vždy říkal se smutnou tváří, že je umím pouze sčítat.“ Nakonec se rozhodl řešit tento problém pro čtyřsložková čísla, která nazval kvaterniony. Historika praví, že když šel 16. října 1843 po Broughamském mostu přes Royal Canal v Dublinu na zasedání Královské akademie věd, napadl ho vzorec pro násobení základních jednotek. Hamilton pak tento vzorec vyryl kapesním nožem do Broughamského mostu (viz [9]). Toto místo dodnes připomíná deska s nápisem:

Here as walked by
on the 16th October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge.

Kvaterniony jsou tedy oborem hyperkomplexních čísel, která jsou nejbližší číslům komplexním.

²Algebra A je alternativní, jestliže platí následující vztahy $(xx)y = x(xy)$ a $y(xx) = (yx)x$ pro všechna $x, y \in A$.

Hamilton věnoval kvaternionům zbytek života a napsal o nich dvě monografie. Ovšem význam kvaternionů se významu komplexních čísel nikdy nevyrovnal (viz [18] nebo [3]).

2.3 Duální kvaterniony

Nejprve se zmíníme o *bikvaternionech*, což byly předchůdci dnešních jednotkových duálních kvaternionů. Jako první tento termín zavedl William Rowan Hamilton v roce 1844, když jej použil pro kvaternion $q = a + ib + jc + kd$, kde a, b, c, d jsou komplexní čísla. Pojem bikvaternion začal používat i William Kingdon Clifford, anglický matematik a filozof. Clifford se zabýval euklidovskou a neeuklidovskou geometrií a to ho přivedlo až k myšlence bikvaternionů a duální algebry. Do této doby bylo známo, že se každá přímá shodnost v trojrozměrném prostoru dá vyjádřit jako složení rotace kolem osy a posunutí podél té samé osy. Právě Clifford předvedl elegantní a efektivní způsob, jak reprezentovat tento pohyb pomocí bikvaternionů.

Clifford začal používat termín bikvaternion, protože měl pocit, že zavedení v Hamiltonově smyslu³ je zbytečné. Označení bikvaternion začíná používat pro označení kombinace dvou kvaternionů, které jsou algebraicky spojené pomocí jednotky ω (nyní je označována jako duální jednotka ε), pro niž platí $\omega^2 = 1$.

Bikvaternion si můžeme představit jako součet dvou kvaternionů, kdy jeden z nich je násoben duální jednotkou ω (má tedy osm složek):

$$q_d = q + \omega q \omega. \quad (2)$$

Na jednotku ω mělo být nahlíženo jako na jistou abstraktní algebraickou entitu a ne jako na reálné číslo.

Bikvaternionům se Clifford věnoval ve svých třech člancích. Nejprve se o nich zmínil ve své práci *Preliminary Sketch of Biquaternions* (1873), kde bikvaterniony představuje. Dalším dílem je *Notes on Biquaternions* (1873), který byl nalezen jako rukopis a byl pravděpodobně zamýšlený jako dodatek k prvnímu článku. Je krátký a rozvíjí některé aspekty bikvaternionů. Posledním článkem byl *Further Note on Biquaternions* (1876), který je rozsáhlejší a kde se diskutuje o tom, proč mohou být bikvaterniony zavedené jednak jako zobecněná komplexní čísla nebo jako operátor, více viz [35]. V současné době se jednotka ω uvádí ve spojitosti s duálními čísly a zapisuje se ε , kde $\varepsilon^2 = 0$.

Z Cliffordových článků zaměřených na bikvaterniony čerpal i německý matematik Eduard Study (1862-1930) a v roce 1901 vydal článek *Geometrie der Dynamen*, kde poprvé uvádí pojem duální číslo a zdůrazňuje aplikační potenciál algebry bikvaternionů (viz [32]). Začíná se používat spojení Studyho bikvaterniony a Cliffordovy bikvaterniony. Jedná se o stejnou matematickou strukturu a tak je potřeba zavést nový termín *duální kvaterniony*, viz [4], který označuje jak Studyho tak Cliffordovy bikvaterniony.

Algebra duálních čísel tvoří komutativní, asociativní okruh s jednotkovým prvkem. Násobení duálních kvaternionů je oboustranně distributivní vzhledem ke sčítání. Ke každému

³Hamilton zavedl termín bikvaternion pro kvaternion $q = s + ix + jy + kz$, kde $x, y, z \in \mathbb{C}$.

nenulovému duálnímu kvaternionu existuje konjugovaný duální kvaternion a duálně konjugovaný duální kvaternion. Pomocí duálních čísel můžeme zavést duální vektor případně duální úhel, který je používán v souvislosti s duálními kvaterniony. Více o vlastnostech duálních čísel a duálních kvaternionů v kapitolách 4 a 5.

Poznámka 2.1 Dalším zobecněním komplexních čísel jsou tzv. *oktoniony*. V prosinci roku 1843 našel tento systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami J. T. Graves. Nezávisle na Gravesovi našel stejný obor i Cayley. Tento nový obor se nazývá oktoniony nebo se užívá termínů Cayleyova čísla či Gravesova–Cayleyova čísla (viz [3]). V této práci se však oktoniony zabývat nebudeme.

3 Algebra kvaternionů

Uvedeme základy algebry kvaternionů, které jsou nezbytné pro zavedení a snadnější pochopení duálních kvaternionů. Problematika kvaternionů a rotací je podrobněji popisována např. v [33].

3.1 Úvodní pojmy

Definice 3.1 *Nechť $i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1$, $ij = k$ a $ji = -k$. Kvaternion q definujeme vztahem*

$$\begin{aligned} q &= [s, \mathbf{v}], \quad s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\ &= [s, (x, y, z)], \quad s, x, y, z \in \mathbb{R} \\ &= s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad s, x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poznámka 3.1 *Z výše uvedených vztahů a za předpokladu asociativity násobení se určí tabulka pro násobení čtyř základních jednotek $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – viz Tabulka 1.*

\cdot	1	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
1	1	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	\mathbf{i}	-1	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	-1	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	-1

Tabulka 1: Vztahy mezi $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Definice 3.2 *Množinu všech kvaternionů budeme značit \mathbb{H} .*

Definice 3.3 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, kde $q = [s, \mathbf{v}]$ a $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}]$, pak platí*

$$q = \hat{q} \Leftrightarrow s = \hat{s} \wedge \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}. \quad (3)$$

V různých zdrojích existuje několik dalších způsobů, jak zavést kvaterniony (viz [15]). Například můžeme kvaternion definovat jako určitou komplexní matici typu 2×2 . Komplexní číslo d napíšeme jako $d = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a vytvoříme k němu číslo komplexně sdružené $\bar{d} = a - ib$.

Potom prvky $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ chápeme jako matice

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{i} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{k} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Kombinací těchto matic vytvoříme množinu \mathbb{H} , $1s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, kde $(s, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Každou matici v množině \mathbb{H} (tj. každý kvaternion) můžeme pak zapsat takto

$$A = \begin{pmatrix} g & h \\ -\bar{h} & \bar{g} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

kde $g = s + \mathbf{i}x$ a $h = y + \mathbf{i}z$. Taková komplexní matice A reprezentuje kvaternion $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$.

Kvaternion může být reprezentován také reálnou maticí typu 4×4 viz [15].

Pro $s, x, y, z \in \mathbb{R}$ je následující maticí

$$B = \begin{pmatrix} s & -x & z & -y \\ x & s & -y & -z \\ -z & y & s & -x \\ y & z & x & s \end{pmatrix} \quad (6)$$

reprezentován kvaternion $s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$.

Množina kvaternionů \mathbb{H} je velmi často definována jako reálná algebra, která je tvořena čtyřmi prvky $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, např. [42], [15] nebo [6].

3.2 Základní vlastnosti

Definice 3.4 *Nechť $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$, $s = 0$, pak q se nazývá **ryzí kvaternion**. Množinu všech ryzích kvaternionů budeme značit \mathbb{H}_p .*

Definice 3.5 *Nechť $q \in \mathbb{H}$. Pak kvaternion $\bar{q} = \overline{[s, \mathbf{v}]} = [s, -\mathbf{v}]$ nazýváme **konjugovaným kvaternionem** s kvaternionem q .*

Pokud je dán kvaternion $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, pak konjugovaný kvaternion \bar{q} má tvar

$$\bar{q} = s - \mathbf{i}x - \mathbf{j}y - \mathbf{k}z. \quad (7)$$

Definice 3.6 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, kde $q = [s, (x, y, z)]$ a $\hat{q} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$. Operaci **sčítání** definujeme následovně:*

$$\begin{aligned} q + \hat{q} &= [s, \mathbf{v}] + [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= [s, (x, y, z)] + [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})] \\ &= (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) + (\hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}) \\ &= (s + \hat{s}) + (x + \hat{x})\mathbf{i} + (y + \hat{y})\mathbf{j} + (z + \hat{z})\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Věta 3.1 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, kde $q = [s, \mathbf{v}]$ a $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}]$. Potom platí $q + \hat{q} = [s + \hat{s}, \mathbf{v} + \hat{\mathbf{v}}]$.*

Důkaz: Zřejmé. □

Definice 3.7 *Nechť jsou dány kvaterniony $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$. Odečítání je definováno vztahem*

$$q - \hat{q} = q + (-1)\hat{q}. \quad (9)$$

Definice 3.8 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, kde $q = s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ a $\hat{q} = \hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}$. Násobení je definováno:*

$$\begin{aligned} q\hat{q} &= [s, \mathbf{v}][\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= [s, (x, y, z)][\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})] \\ &= (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(\hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}) \\ &= s(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) + x\mathbf{i}(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) + y\mathbf{j}(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) + \\ &\quad z\mathbf{k}(\hat{s} + \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} + \hat{z}\mathbf{k}) \\ &= s\hat{s} - x\hat{x} - y\hat{y} - z\hat{z} + (s\hat{x} + \hat{s}x + y\hat{z} - \hat{y}z)\mathbf{i} + (s\hat{y} - x\hat{z} + \hat{s}y + \hat{x}z)\mathbf{j} \\ &\quad + (s\hat{z} + x\hat{y} - \hat{x}y + \hat{s}z)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Tento vztah byl před lety nezávisle na sobě popsán Hamiltonem a Rodriguesem. Také Olinde Rodrigues (1794–1851) pracoval s různými formulacemi, ale kvaterniony neobjevil. Nekomutativní násobení mezi dvěma kvaterniony se nazývá *Grassmannovo násobení* [12].

Věta 3.2 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, kde $q = [s, \mathbf{v}]$ a $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}]$. Pak můžeme napsat*

$$q\hat{q} = [s\hat{s} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{v}} + \hat{s}\mathbf{v}], \quad (11)$$

kde \cdot znamená skalární násobení a \times vyjadřuje vektorové násobení vektorů v \mathbb{R}^3 .

Důkaz:

$$\begin{aligned} q\hat{q} &= [s, \mathbf{v}][\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= (s + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)(\hat{s} + \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}) \\ &= s\hat{s} - (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) + \mathbf{i}(s\hat{x} + \hat{s}x + y\hat{z} - z\hat{y}) + \\ &\quad \mathbf{j}(s\hat{y} + \hat{s}y + z\hat{x} - x\hat{z}) + \mathbf{k}(s\hat{z} + \hat{s}z + x\hat{y} - y\hat{x}) \\ &= [s\hat{s} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{v}} + s\hat{\mathbf{v}} + \hat{s}\mathbf{v}]. \end{aligned} \quad \square$$

Z důkazu Věty 3.2 vidíme, že $\Re(q\hat{q}) = \Re(\hat{q}q)$ a $\Im(q\hat{q}) \neq \Im(\hat{q}q)$, kde \Re je skalární část kvaternionu. Obdobně \Im značí vektorovou část kvaternionu.

Násobení kvaternionů se dá vyjádřit rovněž pomocí násobení matic, více viz [33].

Poznámka 3.2

1. Násobení kvaternionů není komutativní. Již z definice kvaternionů plyne $\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}$ ale $\mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Násobení kvaternionů není ani antikomutativní, tedy neplatí vztah $ab = -(ba)$. Všimněme si, že $1\mathbf{i} = \mathbf{i}$, ale $-(\mathbf{i}1) = -\mathbf{i}$.

2. Násobení kvaternionů je asociativní

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3),$$

pro všechna $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$.

3. Pokud $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$, pak platí distributivita (levá i pravá) násobení vůči sčítání

$$\begin{aligned} q_1 (q_2 + q_3) &= q_1 q_2 + q_1 q_3, \\ (q_2 + q_3) q_1 &= q_2 q_1 + q_3 q_1. \end{aligned}$$

Množina \mathbb{H} s operací sčítání a násobení je nekomutativní těleso, které se liší od komutativního tělesa tím, že nemá vlastnost komutativního násobení (viz Poznámka 3.2).

Věta 3.3 $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ je nekomutativní těleso, kde platí

1. $\forall a, b \in \mathbb{H} : a + b = b + a$ (komutativita sčítání)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{H} : a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociativita sčítání)
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{H} : a(bc) = (ab)c$ (asociativita násobení)
4. $\forall a, b, c \in \mathbb{H} : a(b + c) = ab + ac$ (distributivita)
5. $\exists e \in \mathbb{H} \forall a \in \mathbb{H} : a + e = a$ (existence nulového prvku)
6. $\forall a \in \mathbb{H} \exists -a \in \mathbb{H} : (-a) + a = e$ (existence opačného prvku)
7. $\exists 1 \in \mathbb{H} :$
 - a) $\forall a \in \mathbb{H} : a1 = 1a = a$ (existence jednotkového prvku)
 - b) $\forall a \in \mathbb{H}, a \neq e \exists a^{-1} \in \mathbb{H} : a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$ (existence inverzního prvku)

Důkaz: Viz Poznámka 3.2 a viz [33]. □

Definice 3.9 Necht' $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$ a $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}} = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]]$. **Skalární součin** dvou kvaternionů vypočítáme jako:

$$q \cdot \hat{q} = s\hat{s} + x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}. \quad (12)$$

Definice 3.10 Necht' $q \in \mathbb{H}$, $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$. **Norma** $\|q\|$ kvaternionu q je dána vztahem

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{q\bar{q}}, \quad (13)$$

tedy

$$\|q\|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = s^2 + \|\mathbf{v}\|^2, \quad \|q\| \geq 0.$$

Norma $\|q\| = 0$ jen tehdy, pokud $s = x = y = z = 0$, tedy

$$\|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0.$$

Poznámka 3.3 V jiné literatuře (viz [15]) je výraz $s^2 + x^2 + y^2 + z^2$ označován $N(q)$ a nazývá se *redukovaná norma kvaternionu* q .

Věta 3.4 *Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Pak platí*

$$q_1 \bar{q}_1 = \|q_1\|^2, \quad (14)$$

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1, \quad (15)$$

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|. \quad (16)$$

Důkaz: Viz [33]. □

Definice 3.11 *Nechť $q \in \mathbb{H}$. Pokud*

$$\|q\| = 1, \quad (17)$$

pak q se nazývá jednotkový kvaternion. Množinu všech jednotkových kvaternionů budeme označovat \mathbb{H}_1 .

Věta 3.5 *Nechť $q \in \mathbb{H}$, $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)] \neq 0$. Pak existuje jediný inverzní kvaternion takový, že $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ a platí:*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}. \quad (18)$$

Důkaz: Podrobněji v [33]. □

Věta 3.6 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}_1$. Potom platí tyto vztahy*

$$\|q\hat{q}\| = 1, \quad (19)$$

$$q^{-1} = \bar{q}. \quad (20)$$

Důkaz: Využijeme vztahu (16), detailněji viz [33]. □

Definice 3.12 *Nechť $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$, $q = [s, \mathbf{v}] = [s, (x, y, z)]$ a $\hat{q} = [\hat{s}, \hat{\mathbf{v}}] = [\hat{s}, (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})]$. Pak vektorový součin dvou kvaternionů vypočítáme jako*

$$\begin{aligned} q \times \hat{q} &= \frac{q\hat{q} - \hat{q}q}{2} \\ &= (y\hat{z} - z\hat{x})\mathbf{i} + (z\hat{x} - x\hat{z})\mathbf{j} + (x\hat{y} - y\hat{x})\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (21)$$

Poznámka 3.4 Vektorový součin dvou ryzích kvaternionů $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_p$ můžeme zapsat jako $q_1 \times q_2 = \frac{q_2 \bar{q}_1 + q_1 q_2}{2}$.

Definice 3.13 Kvaterniony $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ nazýváme **ortogonální**, jestliže platí

$$q \cdot \hat{q} = 0. \quad (22)$$

Poznámka 3.5

1. Dva jednotkové ortogonální kvaterniony nazýváme ortonormální.
2. Násobení dvou na sebe kolmých kvaternionů $q, \hat{q} \in \mathbb{H}_p$ vypadá takto: $q\hat{q} = q \times \hat{q}$.

Definice 3.14 Kvaterniony $q, \hat{q} \in \mathbb{H}$ nazýváme **rovnoběžné**, jestliže platí

$$q \times \hat{q} = 0. \quad (23)$$

Věta 3.7 Nechť $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}_1$. Pak existují jednotkový vektor $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ a úhel θ z intervalu $-\pi \leq \theta \leq \pi$ takové, že

$$q = [\cos \theta, \hat{\mathbf{v}} \sin \theta]. \quad (24)$$

Důkaz: Viz [33]. □

Poznámka 3.6

1. Pokud kvaterniony q a \hat{q} jsou jednotkové kvaterniony, pak i $q\hat{q}$ a $\hat{q}q$ jsou jednotkové kvaterniony.
2. Inverzní kvaternion q^{-1} jednotkového kvaternionu q je opět jednotkový kvaternion.

V této kapitole jsme shrnuli základní vlastnosti kvaternionů, které jsou nutné k popisu v další části textu. Kvaterniony mají i jiné důležité vlastnosti, kterými se v tomto textu nebudeme zabývat (např. kvaterniony a exponenciální funkce nebo diferenciální počet atd.). Více o zmíněných vlastnostech naleznete např. v [11], [36], [17] nebo [30].

3.3 Kvaterniony a rotace v $SO(3)$

Rotace kolem osy v trojrozměrném prostoru může být vyjádřena několika způsoby. Například použitím Eulerova teorému, který říká, že libovolnou rotaci kolem osy v trojrozměrném prostoru lze popsat třemi proměnnými. Tyto proměnné jsou známé jako Eulerovy úhly (viz [43]). My se budeme zabývat popisem pomocí kvaternionů. Každá rotace je zadána osou a orientovaným úhlem (ten má velikost a smysl), které můžeme vzít právě z kvaternionové reprezentace (viz Věta 3.12). Problematika rotací je popisována např. v [29] nebo [2]. Kvaterniony našly také uplatnění např. při řešení animačních úloh v počítačové grafice.

Grupy $O(n)$ a $SO(n)$

Budeme vycházet z obecné lineární grupy, kterou označíme $GL(n, \mathbb{F})$, kde \mathbb{F} je těleso \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Jde o grupu regulárních matic $n \times n$ nad tělesem \mathbb{F} s operací běžného maticového násobení. V této kapitole budou uvedeny jen základní definice potřebné k popsání rotací v $SO(n)$, více viz [7] nebo [33].

Definice 3.15 *Reálná matice typu $n \times n$ se nazývá **ortogonální**, pokud $A^{-1} = A^T$. Tyto matice tvoří podgrupu grupy $GL(n, \mathbb{R})$, značíme ji $O(n)$ a nazýváme **ortogonální grupa**. Tedy*

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I\}.$$

Definice 3.16 *Ortogonální matice, které mají determinant roven 1 tvoří podgrupu, kterou nazýváme **speciální ortogonální grupa** a značíme ji $SO(n)$. Tedy*

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I \wedge \det A = 1\}.$$

$SO(3)$ je podgrupou ortogonální grupy $O(3)$ a $SO(4)$ je podgrupou ortogonální grupy $O(4)$ (viz [40]).

Věta 3.8 *Matice A popisuje rotaci v \mathbb{R}^2 kolem počátku, resp. v \mathbb{R}^3 kolem osy procházející počátkem, právě když $A \in SO(2)$, resp. $A \in SO(3)$.*

Důkaz: Viz [29]. □

Geometrická interpretace rotace v $SO(3)$ pomocí kvaternionů

Pro jakýkoliv nenulový kvaternion p a r jsou obě zobrazení $r \mapsto pr$ a $r \mapsto rp$ lineární. Podíváme se na zobrazení $R_{qr}(p) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, které má tvar $p \mapsto qpr$, kde $r, q \in \mathbb{H}$ jsou jisté dva nenulové kvaterniony takové, že $\|r\|\|q\| = 1$.

Poznámka 3.7 Pokud položíme $r = q^{-1}$, pak zobrazení $R_{q,q^{-1}}(p)$ označíme jednoduše jako $R_q(p)$. □

Věta 3.9 *Každý element v $SO(3)$ se dá vyjádřit jako*

$$p \mapsto qp\bar{q}, \tag{25}$$

kde p je ryzí kvaternion a q je jednotkový kvaternion.

Důkaz: Viz [33]. □

Poznámka 3.8 Pokud je kvaternion q jednotkový, můžeme zapsat vztah (25) takto : $p \mapsto qpq^{-1}$. Z Věty 3.5 plyne, že pokud je q jednotkový kvaternion, tedy platí vztah (17), pak $\bar{q} = q^{-1}$.

Věta 3.10 Necht $q \in \mathbb{H}_1$, $q = [\cos \theta, \sin \theta \hat{v}]$. Necht $\mathbf{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a $p = [0, \mathbf{p}] \in \mathbb{H}$. Pak

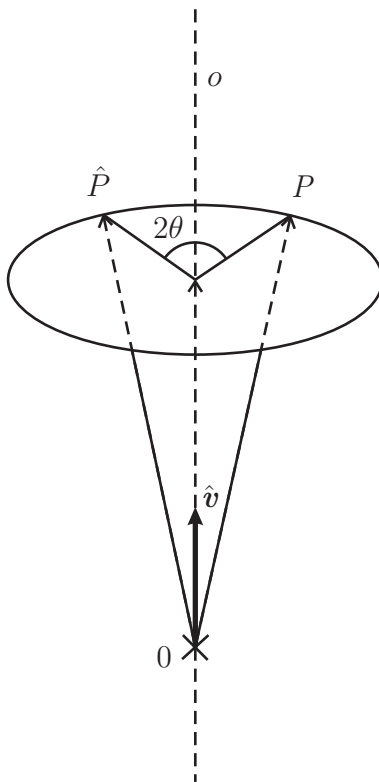
$$\hat{p} = qpq^{-1} \quad (26)$$

je obrazem p v rotaci o úhel 2θ kolem osy, která je daná směrovým vektorem \hat{v} , viz Obr. 1.

Důkaz: Viz [33]. □

Věta 3.11 Necht $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$. Rotace daná q_1 následovaná rotací danou q_2 je ekvivalentní rotaci q_2q_1 , tedy skládání rotací je dosaženo násobením odpovídajících kvaternionů.

Důkaz: Viz [33]. □



Obr. 1: Otočení bodu P do bodu \hat{P} o úhel 2θ kolem osy o , která je daná směrovým vektorem \hat{v} .

Osu a úhel rotace můžeme snadno určit z kvaternionové reprezentace rotace.

Věta 3.12 *Nechť $q = [s, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}$, kde \mathbf{v} je nenulový vektor, osa rotace $R_q(p)$ je určena počátkem a vektorem $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, který odpovídá ryzímu kvaternionu v . Pro $s = 0$ je úhel $\theta = \pi$, pro $s \neq 0$ je úhel rotace dán vztahem*

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{|s|}, \quad (27)$$

kde $0 \leq \theta < \pi$.

Důkaz: Viz [15].

□

4 Algebra duálních čísel

Duální čísla zavedl jako první William Kingdon Clifford (1845–1879) již v 19. století (viz [5]). Jejich využitím v kinematice se zabýval např. Alexandr Petrovič Kotelnikov (1865–1944), (viz [26]) a dále pak např. An Tzu Yang (1923–2003), (viz [47]).

Duální čísla vznikla rozšířením reálných čísel. Přidáním nového prvku ε , tzv. *duální jednotky*, k reálným číslům vzniknou čísla duální. Duální jednotka splňuje vlastnost $\varepsilon^2 = 0$ a říkáme tedy, že je nilpotentní. Algebra duálních čísel je komutativní, asociativní okruh s jednotkovým prvkem, viz Věta 4.3. Duální čísla jsou velmi podobná komplexním číslům jak zápisem, tak některými vlastnostmi. Každé duální číslo můžeme napsat ve tvaru $z = a + \varepsilon a_\varepsilon$, kde a a a_ε jsou reálná čísla – a je takzvaná neduální část z a a_ε je duální část z . V této algebře neexistují inverzní prvky k ryzím duálním číslům (viz Věta 4.3), čímž se odlišují od komplexních čísel.

4.1 Úvodní pojmy

Definice 4.1 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, $\varepsilon^2 = 0$. Duální číslo z definujeme vztahem*

$$z = a + \varepsilon a_\varepsilon. \quad (28)$$

Definice 4.2 *Množinu všech duálních čísel budeme značit \mathbb{D} .*

Poznámka 4.1

1. Duální číslo zapisujeme zkráceně jako $z = [a, a_\varepsilon]$.
2. Duální čísla můžeme vyjádřit také pomocí matic. Duální jednotku zapíšeme ve tvaru

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tzn., že duální číslo z zapíšeme ve tvaru

$$z = a + \varepsilon a_\varepsilon = \begin{pmatrix} a & a_\varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

3. Množina všech duálních čísel je komutativní, asociativní okruh s jednotkovým prvkem viz Věta 4.3.

4.2 Základní vlastnosti

Definice 4.3 *Nechť $z = [a, a_\varepsilon] \in \mathbb{D}$, $a = 0$, pak se z nazývá **ryzí duální číslo**. Množinu všech ryzích duálních čísel budeme značit \mathbb{D}_p . Pokud $a \neq 0$ a $a_\varepsilon \neq 0$, pak se z nazývá **vlastní duální číslo**.*

Definice 4.4 Necht $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, kde $z = [a, a_\varepsilon]$ a $\hat{z} = [\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon]$, pak platí

$$z = \hat{z} \Leftrightarrow a = \hat{a} \wedge a_\varepsilon = \hat{a}_\varepsilon. \quad (29)$$

Definice 4.5 Necht $z \in \mathbb{D}$. Pak duální číslo $\bar{z} = \overline{[a, a_\varepsilon]} = [a, -a_\varepsilon] = a - \varepsilon a_\varepsilon$ nazýváme *konjugovaným duálním číslem* s duálním číslem z .

Definice 4.6 Necht $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, kde $z = [a, a_\varepsilon]$ a $\hat{z} = [\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon]$. Operaci **sčítání** definujeme následovně

$$\begin{aligned} z + \hat{z} &= [a, a_\varepsilon] + [\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon] \\ &= (a + \varepsilon a_\varepsilon) + (\hat{a} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon) \\ &= (a + \hat{a}) + \varepsilon(a_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

Definice 4.7 Necht $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, kde $z = [a, a_\varepsilon]$ a $\hat{z} = [\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon]$. **Násobení** je definováno takto

$$\begin{aligned} z\hat{z} &= [a, a_\varepsilon][\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon] \\ &= (a + \varepsilon a_\varepsilon)(\hat{a} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon) \\ &= a\hat{a} + \varepsilon(a\hat{a}_\varepsilon + a_\varepsilon\hat{a}). \end{aligned} \quad (31)$$

Definice 4.8 Necht $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, kde $z = [a, a_\varepsilon]$ a $\hat{z} = [\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon]$. **Odečítání** je definováno vztahem

$$z - \hat{z} = z + (-1)\hat{z}. \quad (32)$$

Definice 4.9 Necht $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, kde $z = [a, a_\varepsilon]$, $\hat{z} = [\hat{a}, \hat{a}_\varepsilon]$ a $\hat{a} \neq 0$. **Dělení** je definováno takto

$$\begin{aligned} \frac{z}{\hat{z}} &= \frac{a + \varepsilon a_\varepsilon}{\hat{a} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon} \\ &= \frac{(a + \varepsilon a_\varepsilon)(\hat{a} - \varepsilon \hat{a}_\varepsilon)}{(\hat{a} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon)(\hat{a} - \varepsilon \hat{a}_\varepsilon)} \\ &= \frac{a\hat{a} - \varepsilon a\hat{a}_\varepsilon + \varepsilon \hat{a}a_\varepsilon - \varepsilon^2 a_\varepsilon \hat{a}_\varepsilon}{\hat{a}^2 + \varepsilon \hat{a}\hat{a}_\varepsilon - \varepsilon \hat{a}\hat{a}_\varepsilon - \varepsilon^2 \hat{a}_\varepsilon^2} \\ &= \frac{a\hat{a} + \varepsilon(\hat{a}a_\varepsilon - a\hat{a}_\varepsilon)}{\hat{a}^2} \\ &= \frac{a}{\hat{a}} - \varepsilon \left(\frac{a\hat{a}_\varepsilon - a_\varepsilon\hat{a}}{\hat{a}^2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Poznámka 4.2

1. Dělení duálních čísel je velmi podobné dělení komplexních čísel. Zlomek rozšíříme duálním číslem konjugovaným s číslem ve jmenovateli.

2. Z předcházející definice je jasné, že dělení ryzím duálním číslem není definováno. Duální čísla tedy netvoří těleso, ale tvoří okruh – viz Věta 4.2.

Věta 4.1 *Nechť $z = [a, a_\varepsilon] \in \mathbb{D}$, $a \neq 0$. Pak existuje jediné inverzní duální číslo z^{-1} takové, že platí*

$$z^{-1} = (a + \varepsilon a_\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{a + \varepsilon a_\varepsilon} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{a_\varepsilon}{a^2}. \quad (34)$$

Důkaz: Zřejmé, viz Definice 4.9. □

Důsledek 4.1 *Nechť $z = [0, a_\varepsilon] \in \mathbb{D}_p$ je ryzí duální číslo. Potom neexistuje inverzní prvek z^{-1} .*

Jak jsme již uvedli, algebra duálních čísel je velmi podobná algebře komplexních čísel. Základní odlišnost duálních a komplexních čísel je právě v neexistenci opačných prvků pro ryzí duální čísla.

Věta 4.2 *$(\mathbb{D}, +, \cdot)$ je okruh, kde platí*

1. $\forall a, b \in \mathbb{D} : a + b = b + a$ (komutativita sčítání)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{D} : c \in \mathbb{D}$ pak $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociativita sčítání)
3. $\exists e \in \mathbb{D} \quad \forall a \in \mathbb{D} : a + e = a$ (existence nulového prvku)
4. $\forall a \in \mathbb{D} \quad \exists (-a) \in \mathbb{D} : a + (-a) = e$ (existence opačného prvku)
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{D} :$
 - a) $a(b + c) = ab + ac$ (levá distributivita)
 - b) $(b + c)a = ba + ca$. (pravá distributivita)

Důkaz:

1. až 4. bod: zřejmé.

5. a) Mějme $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$, kde $z_1 = [a_1, a_{1\varepsilon}]$, $z_2 = [a_2, a_{2\varepsilon}]$ a $z_3 = [a_3, a_{3\varepsilon}]$.

$z_1(z_2 + z_3) = (a_1 + \varepsilon a_{1\varepsilon}) [(a_2 + a_3) + \varepsilon(a_{2\varepsilon} + a_{3\varepsilon})]$. Dostaneme $z_1(z_2 + z_3) = (a_1 a_2) + (a_1 a_3) + \varepsilon(a_1 a_{2\varepsilon} + a_1 a_{3\varepsilon} + a_{1\varepsilon} a_2 + a_{1\varepsilon} a_3)$.

$z_1 z_2 + z_1 z_3 = (a_1 + \varepsilon a_{1\varepsilon})(a_2 + \varepsilon a_{2\varepsilon}) + (a_1 + \varepsilon a_{1\varepsilon})(a_3 + \varepsilon a_{3\varepsilon}) = [a_1 a_2 + \varepsilon(a_1 a_{2\varepsilon}) + a_{1\varepsilon} a_2] + [a_1 a_3 + \varepsilon(a_1 a_{3\varepsilon} + a_{1\varepsilon} a_3)] = (a_1 a_2 + a_1 a_3) + \varepsilon(a_1 a_{2\varepsilon} + a_{1\varepsilon} a_2 + a_1 a_{3\varepsilon} + a_{1\varepsilon} a_3)$.

Využijeme asociativity sčítání a dostaneme rovnost.

b) Důkaz provedeme obdobně jako 5. a). □

Věta 4.3 $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ je komutativní asociativní okruh s jednotkovým prvkem, kde platí

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{D} : a(bc) = (ab)c$ (asociativita násobení)
2. $\forall a, b \in \mathbb{D} : ab = ba$ (komutativita násobení)
3. $\exists e \in \mathbb{D} \quad \forall a \in \mathbb{D} : ae = ea.$ (existence jednotkového prvku)

Důkaz:

1. Mějme $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$, kde $z_1 = [a_1, a_{1\varepsilon}]$, $z_2 = [a_2, a_{2\varepsilon}]$ a $z_3 = [a_3, a_{3\varepsilon}]$.

$$z_1(z_2 z_3) = (a_1 + \varepsilon a_{1\varepsilon})[a_2 a_3 + \varepsilon(a_2 a_{3\varepsilon} + a_{2\varepsilon} a_3)] = a_1 a_2 a_3 + \varepsilon[a_1(a_2 a_{3\varepsilon} + a_{2\varepsilon} a_3) + a_{1\varepsilon} a_2 a_3] = a_1 a_2 a_3 + \varepsilon(a_1 a_2 a_{3\varepsilon} + a_1 a_{2\varepsilon} a_3 + a_{1\varepsilon} a_2 a_3).$$

$$(z_1 z_2) z_3 = [a_1 a_2 + \varepsilon(a_1 a_{2\varepsilon} + a_{1\varepsilon} a_2)](a_3 + \varepsilon a_{3\varepsilon}) = a_1 a_2 a_3 + \varepsilon[a_1 a_2 a_{3\varepsilon} + (a_1 a_{2\varepsilon} + a_{1\varepsilon} a_2) a_3] = a_1 a_2 a_3 + \varepsilon(a_1 a_2 a_{3\varepsilon} + a_1 a_{2\varepsilon} a_3 + a_{1\varepsilon} a_2 a_3).$$

2. Vezmeme $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, $z = a + \varepsilon a_\varepsilon$ a $\hat{z} = \hat{a} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon$. $z\hat{z} = (a + \varepsilon a_\varepsilon)(\hat{a} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon) = a\hat{a} + \varepsilon(a\hat{a}_\varepsilon + a_\varepsilon \hat{a})$ a $\hat{z}z = \hat{a}a + \varepsilon(\hat{a}a_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon a)$. Díky asociativitě sčítání duálních čísel a existence komutativity v reálných číslech je tvrzení dokázáno.

3. Mějme $z, \hat{z} \in \mathbb{D}$, kde $z = a + \varepsilon a_\varepsilon$ a $\hat{z} = 1 + \varepsilon 0$ pak dostaneme $z\hat{z} = (a + \varepsilon a_\varepsilon)(1 + \varepsilon 0) = a + \varepsilon a_\varepsilon$. \square

Definice 4.10 Necht' $z = [a, a_\varepsilon] \in \mathbb{D}$, kde $a > 0$. **Odmocnina** \sqrt{z} duálního čísla z je definovaná vztahem

$$\sqrt{z} = \sqrt{a + \varepsilon a_\varepsilon} = \sqrt{a} + \varepsilon \frac{a_\varepsilon}{2\sqrt{a}}. \quad (35)$$

Definice 4.11 Necht' jsou dány dvě přímky m, n v \mathbb{E}_3 . Označme jejich odchylku β a jejich vzdálenost s . Potom **duální úhel** α těchto přímek je definován vztahem:

$$\alpha = \beta + \varepsilon s. \quad (36)$$

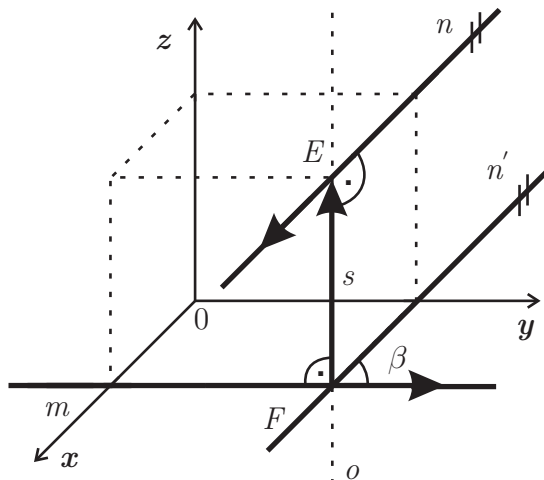
Speciálně tedy platí:

1. pokud se přímky m, n protínají, pak $\alpha = \beta$;
2. pokud jsou přímky m, n rovnoběžné, pak $\alpha = \varepsilon s$;
3. pokud přímky m, n splývají, pak $\alpha = 0$.

S využitím duálního úhlu můžeme popsat pozici libovolné mimoběžky m v prostoru vzhledem k jiné mimoběžce n , viz Obr. 2. Vezmeme osu mimoběžek⁴ o , která protíná přímky m a n v bodech E a F . Bodem B vedeme přímku n' , která je rovnoběžná s přímkou n . Pak úhel mezi

⁴Příčka mimoběžek, která je kolmá k oběma daným mimoběžkám.

přímkami m a n je úhel β vzdálenost s je rovna délce úsečky dané body E a F . Duální úhel budeme využívat v souvislosti se šroubovým pohybem a duálními kvaterniony v kapitole 5.



Obr. 2: Duální úhel $\alpha = \beta + \varepsilon s$ přímek m a n .

Duální úhel splňuje další vlastností – např.

$$\sin \alpha = \sin \beta + \varepsilon s \cos \beta, \quad (37)$$

$$\cos \alpha = \cos \beta - \varepsilon s \sin \beta, \quad (38)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (39)$$

Vztahy (37) a (38) plynou z Taylorova rozvoje pro duální čísla. Pokud použijeme Taylorův rozvoj na funkci $f(a + \varepsilon a_\varepsilon)$, která má alespoň jednu derivaci a $\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \dots = 0$, dostaneme

$$f(a + \varepsilon a_\varepsilon) = f(a) + \varepsilon a_\varepsilon f'(a). \quad (40)$$

Vztah (39) odvodíme následovně:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + \varepsilon(2s \sin \beta \cos \beta - 2s \sin \beta \cos \beta) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Více o využití duálního úhlu např. v [14].

Definice 4.12 Necht' \mathbf{a} a \mathbf{a}_ε jsou vektory a ε je duální jednotka, pak **duální vektor** \mathbf{z} definujeme vztahem

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}_\varepsilon. \quad (41)$$

Poznámka 4.3 Duální vektor $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}_\varepsilon$, kde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{a}_\varepsilon = (a_{1\varepsilon}, a_{2\varepsilon}, a_{3\varepsilon})$ můžeme rovněž zapsat v podobě

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_1 + \varepsilon a_{1\varepsilon} \\ a_2 + \varepsilon a_{2\varepsilon} \\ a_3 + \varepsilon a_{3\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Pro duální vektory $\mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1 + \varepsilon \mathbf{a}_{1\varepsilon}$ a $\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 + \varepsilon \mathbf{a}_{2\varepsilon}$ platí následující vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 &\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_{1\varepsilon} = \mathbf{a}_{2\varepsilon}, \\ \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \varepsilon(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_{2\varepsilon} + \mathbf{a}_{1\varepsilon} \cdot \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 &= \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \varepsilon(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2\varepsilon} + \mathbf{a}_{1\varepsilon} \times \mathbf{a}_2).\end{aligned}$$

Tyto vztahy zde nebudeme dokazovat, více informací viz [39], kde lze dále nalézt informace i o duálním jednotkovém vektoru.

5 Algebra duálních kvaternionů

Duální kvaterniony si můžeme představit jako kvaterniony, jejichž prvky jsou duální čísla. V praxi se využívají k popisu rotací v trojrozměrném prostoru. Poskytují několik výhod oproti jiným popisům. Výhodou např. je, že lze současně zachytit složení rotace a translace (tzv. přímá shodnost v \mathbb{R}^3).

Na duálních kvaternionech jsou založeny některé algoritmy, které se využívají např. v počítačové grafice (při tzv. skinningu) nebo v robotice – podrobněji v kapitole 6.

5.1 Úvodní pojmy

Definice 5.1 *Nechť $a_d, b_d, c_d, d_d \in \mathbb{D}$. Duální kvaternion \mathbf{q}_d definujeme vztahem*

$$\mathbf{q}_d = a_d + b_d \mathbf{i} + c_d \mathbf{j} + d_d \mathbf{k}, \quad (42)$$

kde a_d je skalár (duální číslo), (b_d, c_d, d_d) je vektor (duální vektor) a $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou čtyři základní kvaternionové jednotky z Definice 3.1.

Poznámka 5.1

1. Duální jednotka ε je komutativní s kvaternionovými jednotkami, např. $\mathbf{i}\varepsilon = \varepsilon\mathbf{i}$.
2. Duální kvaternion můžeme zapsat následujícím způsobem $\mathbf{q}_d = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon \mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon \mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon \mathbf{k}$ nebo jako součet dvou kvaternionů $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$, kde $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ a $q_\varepsilon = a_\varepsilon + b_\varepsilon \mathbf{i} + c_\varepsilon \mathbf{j} + d_\varepsilon \mathbf{k}$.

Definice 5.2 *Množinu všech duálních kvaternionů budeme značit \mathbb{H}_d .*

5.2 Základní vlastnosti

Definice 5.3 *Nechť $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$. Duální kvaternion $\overline{\mathbf{q}}_d$ nazýváme **konjugovaným duálním kvaternionem** s duálním kvaternionem \mathbf{q}_d , jestliže platí*

$$\overline{\mathbf{q}}_d = \bar{q} + \varepsilon \bar{q}_\varepsilon. \quad (43)$$

Definice 5.4 *Nechť $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$, pak duální kvaternion $\overline{\mathbf{q}}_d^*$ nazýváme **duálně konjugovaným duálním kvaternionem** s duálním kvaternionem \mathbf{q}_d , jestliže platí*

$$\overline{\mathbf{q}}_d^* = \bar{q} - \varepsilon \bar{q}_\varepsilon. \quad (44)$$

Pokud je dán duální kvaternion $\mathbf{q}_d = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon \mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon \mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon \mathbf{k}$, pak konjugovaný duální kvaternion $\overline{\mathbf{q}}_d$ má tvar:

$$\overline{\mathbf{q}}_d = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon - \varepsilon b_\varepsilon \mathbf{i} - \varepsilon c_\varepsilon \mathbf{j} - \varepsilon d_\varepsilon \mathbf{k} \quad (45)$$

a duálně konjugovaný duální kvaternion $\overline{\mathbf{q}_d^*}$ má tvar

$$\overline{\mathbf{q}_d^*} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} - \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon \mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon \mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon \mathbf{k}. \quad (46)$$

Definice 5.5 Necht $\mathbf{q}_d, \hat{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $\hat{\mathbf{q}}_d = \hat{q} + \varepsilon \hat{q}_\varepsilon$. Operaci **sčítání** definujeme následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d + \hat{\mathbf{q}}_d &= q + \varepsilon q_\varepsilon + \hat{q} + \varepsilon \hat{q}_\varepsilon \\ &= (q + \hat{q}) + \varepsilon(q_\varepsilon + \hat{q}_\varepsilon) \\ &= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon \mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon \mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon \mathbf{k} + \\ &\quad \hat{a} + \hat{b}\mathbf{i} + \hat{c}\mathbf{j} + \hat{d}\mathbf{k} + \varepsilon \hat{a}_\varepsilon + \varepsilon \hat{b}_\varepsilon \mathbf{i} + \varepsilon \hat{c}_\varepsilon \mathbf{j} + \varepsilon \hat{d}_\varepsilon \mathbf{k} \\ &= [(a + \hat{a}) + (b + \hat{b})\mathbf{i} + (c + \hat{c})\mathbf{j} + (d + \hat{d})\mathbf{k}] + \\ &\quad \varepsilon[(a_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon) + (b_\varepsilon + \hat{b}_\varepsilon)\mathbf{i} + (c_\varepsilon + \hat{c}_\varepsilon)\mathbf{j} + (d_\varepsilon + \hat{d}_\varepsilon)\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (47)$$

Definice 5.6 Necht $\mathbf{q}_d, \hat{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $\hat{\mathbf{q}}_d = \hat{q} + \varepsilon \hat{q}_\varepsilon$. **Násobení** je definováno takto

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d \hat{\mathbf{q}}_d &= (q + \varepsilon q_\varepsilon)(\hat{q} + \varepsilon \hat{q}_\varepsilon) \\ &= q\hat{q} + \varepsilon(q\hat{q}_\varepsilon + q_\varepsilon\hat{q}) \\ &= a\hat{a} - b\hat{b} - c\hat{c} - d\hat{d} + (a\hat{b} + \hat{a}b + c\hat{d} - \hat{c}d)\mathbf{i} + (a\hat{c} - b\hat{d} + \hat{a}c + \hat{b}d)\mathbf{j} \\ &\quad + (a\hat{d} + b\hat{c} - \hat{b}c + \hat{a}d)\mathbf{k} + \varepsilon[a\hat{a}_\varepsilon - b\hat{b}_\varepsilon - c\hat{c}_\varepsilon - d\hat{d}_\varepsilon + (a\hat{b}_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon b + c\hat{d}_\varepsilon - \hat{c}_\varepsilon d)\mathbf{i} + \\ &\quad (a\hat{c}_\varepsilon - b\hat{d}_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon c + \hat{b}_\varepsilon d)\mathbf{j} + (a\hat{d}_\varepsilon + b\hat{c}_\varepsilon - \hat{b}_\varepsilon c + \hat{a}_\varepsilon d)\mathbf{k} + a_\varepsilon \hat{a} - b_\varepsilon \hat{b} - c_\varepsilon \hat{c} - d_\varepsilon \hat{d} + \\ &\quad (a_\varepsilon \hat{b} + \hat{a} b_\varepsilon + c_\varepsilon \hat{d} - \hat{c} d_\varepsilon)\mathbf{i} + (a_\varepsilon \hat{c} - b_\varepsilon \hat{d} + \hat{a} c_\varepsilon + \hat{b} d_\varepsilon)\mathbf{j} + (a_\varepsilon \hat{d} + b_\varepsilon \hat{c} - \hat{b} c_\varepsilon + \hat{a} d_\varepsilon)\mathbf{k}] \\ &= a\hat{a} - b\hat{b} - c\hat{c} - d\hat{d} + (a\hat{b} + \hat{a}b + c\hat{d} - \hat{c}d)\mathbf{i} + (a\hat{c} - b\hat{d} + \hat{a}c + \hat{b}d)\mathbf{j} \\ &\quad + (a\hat{d} + b\hat{c} - \hat{b}c + \hat{a}d)\mathbf{k} + \varepsilon[a\hat{a}_\varepsilon - b\hat{b}_\varepsilon - c\hat{c}_\varepsilon - d\hat{d}_\varepsilon + a_\varepsilon \hat{a} - b_\varepsilon \hat{b} - c_\varepsilon \hat{c} - d_\varepsilon \hat{d} + \\ &\quad (a\hat{b}_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon b + c\hat{d}_\varepsilon - \hat{c}_\varepsilon d + a_\varepsilon \hat{b} + \hat{a} b_\varepsilon + c_\varepsilon \hat{d} - \hat{c} d_\varepsilon)\mathbf{i} + (a\hat{c}_\varepsilon - b\hat{d}_\varepsilon + \hat{a}_\varepsilon c + \hat{b}_\varepsilon d + \\ &\quad a_\varepsilon \hat{c} - b_\varepsilon \hat{d} + \hat{a} c_\varepsilon + \hat{b} d_\varepsilon)\mathbf{j} + (a\hat{d}_\varepsilon + b\hat{c}_\varepsilon - \hat{b}_\varepsilon c + \hat{a} d_\varepsilon + a_\varepsilon \hat{d} + b_\varepsilon \hat{c} - \hat{b} c_\varepsilon + \hat{a} d_\varepsilon)\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (48)$$

Definice 5.7 Necht jsou dány duální kvaterniony $\mathbf{q}_d, \hat{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{H}_d$. **Odečítání** je definováno vztahem

$$\mathbf{q}_d - \hat{\mathbf{q}}_d = \mathbf{q}_d + (-1)\hat{\mathbf{q}}_d. \quad (49)$$

Duální kvaterniony splňují některé vlastnosti stejně jako kvaterniony, viz následující poznámka.

Poznámka 5.2

1. Násobení duálních kvaternionů není komutativní.
2. Násobení duálních kvaternionů je asociativní

$$(\mathbf{q}_{d_1} \mathbf{q}_{d_2}) \mathbf{q}_{d_3} = \mathbf{q}_{d_1} (\mathbf{q}_{d_2} \mathbf{q}_{d_3}),$$

pro všechna $\mathbf{q}_{d_1}, \mathbf{q}_{d_2}, \mathbf{q}_{d_3} \in \mathbb{H}_d$.

3. Pokud $\mathbf{q}_{d_1}, \mathbf{q}_{d_2}, \mathbf{q}_{d_3} \in \mathbb{H}_d$. Pak platí distributivita (levá i pravá) násobení vůči sčítání

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{d_1}(\mathbf{q}_{d_2} + \mathbf{q}_{d_3}) &= \mathbf{q}_{d_1}\mathbf{q}_{d_2} + \mathbf{q}_{d_1}\mathbf{q}_{d_3}, \\ (\mathbf{q}_{d_2} + \mathbf{q}_{d_3})\mathbf{q}_{d_1} &= \mathbf{q}_{d_2}\mathbf{q}_{d_1} + \mathbf{q}_{d_3}\mathbf{q}_{d_1}.\end{aligned}$$

Množina \mathbb{H}_d s operací sčítání a násobení má podobné vlastnosti jako nekomutativní těleso \mathbb{H} .

Věta 5.1 $(\mathbb{H}_d, +, \cdot)$ je okruh, kde platí

1. $\forall a, b \in \mathbb{H}_d : a + b = b + a$ (komutativita sčítání)
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{H}_d : a + (b + c) = (a + b) + c$ (asociativita sčítání)
3. $\exists e \in \mathbb{H}_d \quad \forall a \in \mathbb{H}_d : a + e = a$ (existence nulového prvku)
4. $\forall a \in \mathbb{H}_d \quad \exists (-a) \in \mathbb{H}_d : a + (-a) = e$ (existence opačného prvku)
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{H}_d :$

- a) $a(b + c) = ab + ac$ (levá distributivita)
- b) $(b + c)a = ba + ca$ (pravá distributivita)

Důkaz:

1. Zřejmé, viz vztah (47).

2. Zřejmé.

3. Pokud vezmeme $\mathbf{q}_d, \hat{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$, $\mathbf{q}_d \neq 0$ a $\hat{\mathbf{q}}_d = \hat{q} + \varepsilon \hat{q}_\varepsilon$, $\hat{q} = \hat{q}_\varepsilon = 0$ pak podle vzorce (30) dostaneme $[(q + 0) + \varepsilon(q_\varepsilon + 0)] = q + \varepsilon q_\varepsilon$.

4. Vezmeme $\mathbf{q}_d, \hat{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $\hat{\mathbf{q}}_d = \hat{q} + \varepsilon \hat{q}_\varepsilon$, $\hat{q} = -q$, $\hat{q}_\varepsilon = -q_\varepsilon$ tedy $\hat{\mathbf{q}}_d = -\mathbf{q}_d$, pak podle vztahu (30) dostaneme $\mathbf{q}_d + \hat{\mathbf{q}}_d = [(q - q) + \varepsilon(q_\varepsilon - q_\varepsilon)] = 0$.

5. a) Mějme $\mathbf{q}_{d_1}, \mathbf{q}_{d_2}, \mathbf{q}_{d_3} \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_{d_1} = q_1 + \varepsilon q_{1\varepsilon}$, $\mathbf{q}_{d_2} = q_2 + \varepsilon q_{2\varepsilon}$ a $\mathbf{q}_{d_3} = q_3 + \varepsilon q_{3\varepsilon}$.

$$\mathbf{q}_{d_1}(\mathbf{q}_{d_2} + \mathbf{q}_{d_3}) = (q_1 + \varepsilon q_{1\varepsilon}) [(q_2 + q_3) + \varepsilon(q_{2\varepsilon} + q_{3\varepsilon})] = (q_1 q_2 + q_1 q_3) + \varepsilon(q_1 q_{2\varepsilon} + q_1 q_{3\varepsilon} + q_{1\varepsilon} q_2 + q_{1\varepsilon} q_3).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{d_1}\mathbf{q}_{d_2} + \mathbf{q}_{d_1}\mathbf{q}_{d_3} &= (q_1 + \varepsilon q_{1\varepsilon})(q_2 + \varepsilon q_{2\varepsilon}) + (q_1 + \varepsilon q_{1\varepsilon})(q_3 + \varepsilon q_{3\varepsilon}) = [q_1 q_2 + \varepsilon(q_1 q_{2\varepsilon}) + q_{1\varepsilon} q_2] + \\ &+ [q_1 q_3 + \varepsilon(q_1 q_{3\varepsilon}) + q_{1\varepsilon} q_3] = (q_1 q_2 + q_1 q_3) + \varepsilon(q_1 q_{2\varepsilon} + q_{1\varepsilon} q_2 + q_1 q_{3\varepsilon} + q_{1\varepsilon} q_3).\end{aligned}$$

Využijeme asociativity sčítání (viz Věta 5.1 1.a)) a dostaneme rovnost.

b) Důkaz provedeme obdobně jako v předchozím případě. □

Věta 5.2 $(\mathbb{H}_d, +, \cdot)$ je asociativní okruh s jednotkovým prvkem, kde platí

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{H}_d : a(bc) = (ab)c$ (asociativita násobení)
2. $\exists e \in \mathbb{H}_d \quad \forall a \in \mathbb{H}_d : ae = ea.$ (existence jednotkového prvku)

Důkaz:

1. Mějme $\mathbf{q}_{d_1}, \mathbf{q}_{d_2}, \mathbf{q}_{d_3} \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_{d_1} = q_1 + \varepsilon q_{1\varepsilon}$, $\mathbf{q}_{d_2} = q_2 + \varepsilon q_{2\varepsilon}$ a $\mathbf{q}_{d_3} = q_3 + \varepsilon q_{3\varepsilon}$.

$$\mathbf{q}_{d_1}(\mathbf{q}_{d_2}\mathbf{q}_{d_3}) = (q_1 + \varepsilon q_{1\varepsilon})[q_2q_3 + \varepsilon(q_2q_{3\varepsilon} + q_{2\varepsilon}q_3)] = q_1q_2q_3 + \varepsilon[q_1(q_2q_{3\varepsilon} + q_{2\varepsilon}q_3) + q_{1\varepsilon}q_2q_3] = q_1q_2q_3 + \varepsilon(q_1q_2q_{3\varepsilon} + q_1q_{2\varepsilon}q_3 + q_{1\varepsilon}q_2q_3).$$

$$(\mathbf{q}_{d_1}\mathbf{q}_{d_2})\mathbf{q}_{d_3} = [q_1q_2 + \varepsilon(q_1q_{2\varepsilon} + q_{1\varepsilon}q_2)](q_3 + \varepsilon q_{3\varepsilon}) = q_1q_2q_3 + \varepsilon[q_1q_2q_{3\varepsilon} + (q_1q_{2\varepsilon} + q_{1\varepsilon}q_2)q_3] = q_1q_2q_3 + \varepsilon(q_1q_2q_{3\varepsilon} + q_1q_{2\varepsilon}q_3 + q_{1\varepsilon}q_2q_3).$$

Víme, že násobení kvaternionů je asociativní (viz Poznámka (3.2) č. 2).

2. Mějme $\mathbf{q}_d, \hat{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $\hat{\mathbf{q}}_d = 1 + \varepsilon 0$ pak dostaneme $\mathbf{q}_d\hat{\mathbf{q}}_d = (q + \varepsilon q_\varepsilon)(1 + \varepsilon 0) = q + \varepsilon q_\varepsilon$. \square

Dělení je definováno jako inverzní operace k násobení. Pro duální kvaterniony definujeme dělení pomocí konjugovaného duálního kvaternionu a normy duálního kvaternionu (obdobně jako u kvaternionů).

Definice 5.8 *Nechť $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$, $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon a_\varepsilon + \varepsilon b_\varepsilon\mathbf{i} + \varepsilon c_\varepsilon\mathbf{j} + \varepsilon d_\varepsilon\mathbf{k}$. Norma $\|\mathbf{q}_d\|$ duálního kvaternionu \mathbf{q}_d je dána vztahem*

$$\|\mathbf{q}_d\| = \sqrt{(a + \varepsilon a_\varepsilon)^2 + (b + \varepsilon b_\varepsilon)^2 + (c + \varepsilon c_\varepsilon)^2 + (d + \varepsilon d_\varepsilon)^2} = \sqrt{\overline{\mathbf{q}_d}\mathbf{q}_d}. \quad (50)$$

Poznámka 5.3 Výraz $\|\mathbf{q}_d\|^2$ můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_d\|^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\varepsilon(aa_\varepsilon + bb_\varepsilon + cc_\varepsilon + dd_\varepsilon). \\ \|\mathbf{q}_d\|^2 &= \mathbf{q}_d\overline{\mathbf{q}_d} = q\bar{q} + \varepsilon(q\bar{q}_\varepsilon + q_\varepsilon\bar{q}). \end{aligned}$$

Věta 5.3 *Normu duálního kvaternionu $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$, kde $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $q \neq 0$, můžeme zapsat také ve tvaru*

$$\|\mathbf{q}_d\| = \|q\| + \varepsilon \frac{q \cdot q_\varepsilon}{\|q\|}, \quad (51)$$

kde $q \cdot q_\varepsilon$ je skalární součin kvaternionů q a q_ε , viz Věta 3.9.

Důkaz:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_d\| &= \sqrt{\overline{\mathbf{q}_d}\mathbf{q}_d} = \sqrt{q\bar{q} + \varepsilon(q\bar{q}_\varepsilon + q_\varepsilon\bar{q})} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\varepsilon(aa_\varepsilon + bb_\varepsilon + cc_\varepsilon + dd_\varepsilon)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \varepsilon \frac{aa_\varepsilon + bb_\varepsilon + cc_\varepsilon + dd_\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \quad (\text{viz Definice 4.10}) \\ &= \sqrt{q\bar{q}} + \varepsilon \frac{aa_\varepsilon + bb_\varepsilon + cc_\varepsilon + dd_\varepsilon}{\sqrt{q\bar{q}}} \\ &= \|q\| + \varepsilon \frac{q \cdot q_\varepsilon}{\|q\|}. \end{aligned}$$

\square

Definice 5.9 *Nechť $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$. Duální kvaternion splňující*

$$\|\mathbf{q}_d\| = 1, \quad (52)$$

se nazývá jednotkový duální kvaternion. Množinu všech jednotkových duálních kvaternionů budeme označovat \mathbb{H}_{d_1} .

Věta 5.4 *Nechť $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$, $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$, $q \neq 0$. Pak existuje jediný inverzní duální kvaternion takový, že $\mathbf{q}_d \mathbf{q}_d^{-1} = \mathbf{q}_d^{-1} \mathbf{q}_d = 1$ a platí:*

$$\mathbf{q}_d^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{q}_d}}{\|\mathbf{q}_d\|^2}. \quad (53)$$

Důkaz: Důkaz provedeme sporem. Nechť existují dva různé duální kvaterniony $\mathbf{p}_{d_1}, \mathbf{p}_{d_2} \in \mathbb{H}_d$ inverzní k \mathbf{q}_d . To znamená, že platí

$$\mathbf{p}_{d_1} = \mathbf{p}_{d_1} 1 = \mathbf{p}_{d_1} (\mathbf{q}_d \mathbf{p}_{d_2}) = (\mathbf{p}_{d_1} \mathbf{q}_d) \mathbf{p}_{d_2} = 1 \mathbf{p}_{d_2} = \mathbf{p}_{d_2},$$

což je spor. Existuje tedy jediný inverzní duální kvaternion ke kvaternionu \mathbf{q}_d . Vycházíme z předpokladu, že $\mathbf{p}_d = \frac{\overline{\mathbf{p}_d}}{\|\mathbf{p}_d\|^2}$. Pak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d \mathbf{p}_d &= \mathbf{q}_d \frac{\overline{\mathbf{q}_d}}{\|\mathbf{q}_d\|^2} = \frac{\mathbf{q}_d \overline{\mathbf{q}_d}}{\|\mathbf{q}_d\|^2} = \frac{\|\mathbf{q}_d\|^2}{\|\mathbf{q}_d\|^2} = 1, \\ \mathbf{p}_d \mathbf{q}_d &= \frac{\overline{\mathbf{q}_d}}{\|\mathbf{q}_d\|^2} \mathbf{q}_d = \frac{\overline{\mathbf{q}_d} \mathbf{q}_d}{\|\mathbf{q}_d\|^2} = \frac{\|\mathbf{q}_d\|^2}{\|\mathbf{q}_d\|^2} = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Věta 5.5 *Duální kvaternion $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$ je jednotkový, právě když $\|q\| = 1$ a $q \cdot q_\varepsilon = 0$.*

Důkaz: Využijeme vztahu (51) a dostaneme rovnost $\|\mathbf{q}_d\| = \sqrt{\overline{\mathbf{q}_d} \mathbf{q}_d} = \|q\| + \varepsilon \frac{q \cdot q_\varepsilon}{\|q\|} = 1$.

Všimněme si, že duální kvaternion je jednotkový, pokud je duální složka nulová a $\|q\| = 1$. Pokud chceme, aby byla duální složka nulová, musí být skalární součin $q \cdot q_\varepsilon = 0$. Naopak pokud je $\|q\| = 1$ a $q \cdot q_\varepsilon = 0$, pak z rovnosti (51) plyne, že duální kvaternion je jednotkový. \square

Věta 5.6 *Nechť $\mathbf{q}_d, \mathbf{p}_d \in \mathbb{H}_d$, $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $\mathbf{p}_d = p + \varepsilon p_\varepsilon$. Pak platí*

$$\overline{\mathbf{p}_d \mathbf{q}_d} = \overline{\mathbf{q}_d} \overline{\mathbf{p}_d}. \quad (54)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{p}_d \mathbf{q}_d} &= \overline{pq + \varepsilon(p_\varepsilon q + pq_\varepsilon)} \\ &= \overline{pq} + \varepsilon(\overline{p_\varepsilon q} + \overline{pq_\varepsilon}) \\ &= \overline{q} \overline{p} + \varepsilon(\overline{q} \overline{p_\varepsilon} + \overline{q_\varepsilon} \overline{p}) \\ &= \overline{\mathbf{q}_d} \overline{\mathbf{p}_d}. \end{aligned} \quad \square$$

Věta 5.7 *Nechť jsou dány duální kvaterniony $\mathbf{p}_d, \mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_d$, $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$ a $\mathbf{p}_d = p + \varepsilon p_\varepsilon$. Potom platí*

$$\|\mathbf{p}_d \mathbf{q}_d\| = \|\mathbf{p}_d\| \|\mathbf{q}_d\|. \quad (55)$$

Důkaz: Využijeme Věty 5.6.

$$\|\mathbf{p}_d \mathbf{q}_d\|^2 = \overline{\mathbf{p}_d \mathbf{q}_d} (\mathbf{p}_d \mathbf{q}_d) = \overline{\mathbf{q}_d} \overline{\mathbf{p}_d} \mathbf{p}_d \mathbf{q}_d = \|\mathbf{p}_d\|^2 \overline{\mathbf{q}_d} \mathbf{q}_d = \|\mathbf{p}_d\|^2 \|\mathbf{q}_d\|^2. \quad \square$$

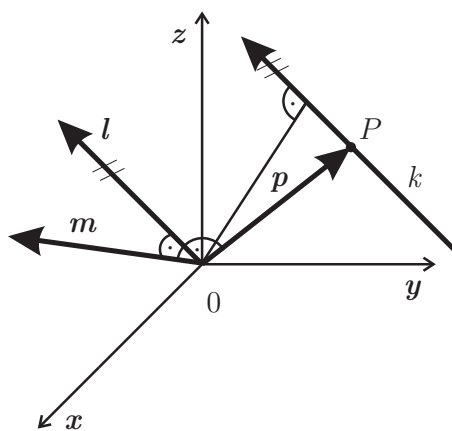
5.3 Duální kvaterniony a přímé shodnosti v SE(3)

Jak víme, jednotkový kvaternion dokáže reprezentovat v \mathbb{R}^3 rotaci kolem osy, viz Věta 3.7. Bohužel už pomocí něj nedokážeme vyjádřit rotaci a posunutí zároveň (tj. složení obou zobrazení). Jednotkový duální kvaternion \mathbf{q}_d má obdobné vlastnosti, viz [8]. Nejprve zavedeme speciální euklidovskou grupu, která je grupou přímých shodností.

Definice 5.10 *Grupou, kterou tvoří matice s následujícími vlastnostmi*

$$\mathbf{SE}(n) = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, R^T R = R R^T = I \wedge \det R = 1 \right\}$$

nazýváme grupa přímých shodností a značíme ji $\mathbf{SE}(n)$.



Obr. 3: Plückerovy souřadnice přímky v prostoru.

Nyní se budeme ve stručnosti zabývat Plückerovými souřadnicemi (viz Definice 5.11). Jak uvidíme lze tyto souřadnice ztotožnit s duálním vektorem, což dále využijeme ve Větě 5.8.

Vezmeme přímku k v trojrozměrném prostoru se směrovým vektorem \mathbf{l} . Přímka k prochází bodem P , který je reprezentován vektorem \mathbf{p} . Tento vektor můžeme zapsat pomocí šestice

čísel (\mathbf{l}, \mathbf{m}) , kde \mathbf{m} nazýváme *moment* a platí pro něj $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{l}$, viz Obr. 3. Moment je kolmý k rovině, jež je dána přímkou k a počátkem 0. Velikost momentu je rovna vzdálenosti přímky k od počátku. Vektor \mathbf{l} i jakýkoliv libovolný nenulový násobek představují směrový vektor přímky. Předpokládejme tedy, že $|\mathbf{l}| = 1$, a $\mathbf{lm} = \mathbf{l}(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = 0$. Dostáváme tzv. *Plückerovy souřadnice* [31]. Tyto souřadnice jsou duálními vektory v \mathbb{R}^3 a můžeme je definovat i následujícím způsobem.

Definice 5.11 *Mějme dány dva různé body P_1, P_2 s polohovými vektory $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ určující přímkou k . Pak **Plückerovy souřadnice** $[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6]$ přímky k jsou*

$$\begin{aligned} k_1 &= x_2 - x_1 & k_4 &= y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ k_2 &= y_2 - y_1 & k_5 &= z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ k_3 &= z_2 - z_1 & k_6 &= x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{aligned} \quad (56)$$

Směrový vektor přímky k dostaneme jako $\mathbf{l} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ a moment jako $\mathbf{m} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$.

Plückerovy souřadnice přímky k můžeme také zapsat ve tvaru duálního vektoru, tj.

$$\mathbf{k} = \mathbf{l} + \varepsilon \mathbf{m}_\varepsilon = \begin{pmatrix} k_1 + \varepsilon k_{4\varepsilon} \\ k_2 + \varepsilon k_{5\varepsilon} \\ k_3 + \varepsilon k_{6\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 5.4 Pokud duální kvaternion \mathbf{q}_d zapíšeme ve tvaru $\mathbf{q}_d = a_d + b_d \mathbf{i} + c_d \mathbf{j} + d_d \mathbf{k}$ (viz Definice 5.1), kde $a_d = 0$, dostáváme duální vektor \mathbf{q} , který můžeme zapsat jako

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} b + \varepsilon b_\varepsilon \\ c + \varepsilon c_\varepsilon \\ d + \varepsilon d_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Věta 5.8 *Nechť se přímka k daná duálním vektorem $\mathbf{k} = \mathbf{l} + \varepsilon \mathbf{m}_\varepsilon$ zobrazí pomocí rotace $R \in \mathbf{SO}(3)$ a posunutí $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$ do přímky \hat{k} , kde $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{l}} + \varepsilon \hat{\mathbf{m}}_\varepsilon$, pak existuje jednotkový duální kvaternion \mathbf{q}_d takový, že platí*

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{q}_d \mathbf{k} \overline{\mathbf{q}_d}. \quad (57)$$

Důkaz: Použijeme rotaci R a translaci \mathbf{t} na přímkou k tak, abychom dostali \hat{k} .

Předpokládejme, že přímka \hat{k} prochází bodem \hat{P} a platí

$$\hat{\mathbf{m}}_\varepsilon = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{l}}, \quad (58)$$

kde $\hat{\mathbf{m}}_\varepsilon$ je moment, $\hat{\mathbf{p}}$ je polohový vektor bodu \hat{P} a $\hat{\mathbf{l}}$ je směrový vektor přímky \hat{k} . Obdobně pro přímkou k a bod P , kterým prochází platí $\mathbf{m}_\varepsilon = \mathbf{p} \times \mathbf{l}$. Směrový vektor přímky k otočíme tak, aby se zobrazil do směrového vektoru přímky \hat{k} , tedy

$$\hat{\mathbf{l}} = R\mathbf{l}. \quad (59)$$

Vektor posunutí zde nemusíme uvažovat⁵. Dále otočíme a posuneme vektor \mathbf{p} :

$$\hat{\mathbf{p}} = R\mathbf{p} + \mathbf{t} \quad (60)$$

Do rovnosti (58) dosadíme vztahy (59) a (60). Protože pracujeme s rotací v $\mathbf{SO}(3)$, můžeme provést následující úpravy:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}_\varepsilon &= (R\mathbf{p} + \mathbf{t}) \times R\mathbf{l} \\ &= R\mathbf{p} \times R\mathbf{l} + \mathbf{t} \times R\mathbf{l} \\ &= R(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) + \mathbf{t} \times R\mathbf{l} \\ &= R\mathbf{m}_\varepsilon + \mathbf{t} \times R\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (61)$$

Nyní zaměníme vektory za duální kvaterniony, což znamená, že vektor \mathbf{l} bude reprezentován kvaternionem s nulovou skalární částí $l = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$ a vektor \mathbf{m}_ε bude reprezentován kvaternionem s nulovou skalární částí $m_\varepsilon = m_{1\varepsilon}\mathbf{i} + m_{2\varepsilon}\mathbf{j} + m_{3\varepsilon}\mathbf{k}$. Vektor posunutí \mathbf{t} zapíšeme také jako kvaternion s nulovou skalární částí $t = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$ a rotační kvaternion obdobně jako $q = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ (rotaci dokážeme popsat pomocí kvaternionů, viz Věta 25). Otočíme vektor \mathbf{l} pomocí kvaternionu q , tj.

$$R\mathbf{l} = q\mathbf{l}\bar{q}. \quad (62)$$

Obdobně otočíme i vektor \mathbf{m}_ε :

$$R\mathbf{m}_\varepsilon = q\mathbf{m}_\varepsilon\bar{q}. \quad (63)$$

Pomocí rovnosti (62) a kvaternionů přepíšeme vztah $\mathbf{t} \times R\mathbf{l}$ (viz Poznámka 3.4) a dostáváme:

$$\mathbf{t} \times R\mathbf{l} = \frac{q\mathbf{l}\bar{q}\bar{t} + t\mathbf{q}\mathbf{l}\bar{q}}{2}. \quad (64)$$

Dosadíme do rovnosti (61) vztahy (63) a (64), tj.:

$$\hat{\mathbf{m}}_\varepsilon = q\mathbf{m}_\varepsilon\bar{q} + \frac{q\mathbf{l}\bar{q}\bar{t} + t\mathbf{q}\mathbf{l}\bar{q}}{2}. \quad (65)$$

Přímku k nyní můžeme popsat vztahy (62) a (65), tj.

$$\hat{\mathbf{l}} + \varepsilon\hat{\mathbf{m}}_\varepsilon = q\mathbf{l}\bar{q} + q\mathbf{m}_\varepsilon\bar{q} + \frac{q\mathbf{l}\bar{q}\bar{t} + t\mathbf{q}\mathbf{l}\bar{q}}{2}. \quad (66)$$

Řekněme, že existuje kvaternion $q_\varepsilon = \frac{tq}{2}$ a duální kvaternion $\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon$. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\hat{\mathbf{l}} + \varepsilon\hat{\mathbf{m}}_\varepsilon = (q + \varepsilon q_\varepsilon)(\mathbf{l} + \varepsilon\mathbf{m}_\varepsilon)(\bar{q} + \varepsilon\bar{q}_\varepsilon), \quad (67)$$

⁵Posunutí zachovává směr.

kde \mathbf{l} a \mathbf{m}_ε jsou opět vektory. Vhodným přeznačením rovnosti (67) dostáváme výsledný vztah

$$\hat{\mathbf{l}}_d = \mathbf{q}_d \mathbf{l}_d \overline{\mathbf{q}}_d. \quad (68)$$

Norma duálního kvaternionu

$$\|\mathbf{q}_d\|^2 = \mathbf{q}_d \overline{\mathbf{q}}_d = q\bar{q} + \varepsilon(q\bar{q}_\varepsilon + q_\varepsilon\bar{q}) = q\bar{q} + \varepsilon \frac{q\bar{q}t + tq\bar{q}}{2} = 1$$

a jedná se tedy o jednotkový duální kvaternion. □

Jak víme, geometrická interpretace kvaternionu vychází z formule $q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{s} \sin \frac{\theta}{2}$, která obsahuje směrový vektor osy rotace \mathbf{s} a úhel rotace θ . Pokusíme se ji zobecnit i na duální kvaterniony.

Věta 5.9 *Nechť $\theta_d \in \mathbb{D}$ a $\mathbf{v}_d \in \mathbb{H}_{d_1}$, kde $\theta_d = \theta + \varepsilon\theta_\varepsilon$ a $\mathbf{v}_d = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + \varepsilon(b_\varepsilon\mathbf{i} + c_\varepsilon\mathbf{j} + d_\varepsilon\mathbf{k})$. Pak*

$$\mathbf{q}_d = \cos \frac{\theta_d}{2} + \mathbf{v}_d \sin \frac{\theta_d}{2} \quad (69)$$

je jednotkový duální kvaternion. Naopak pro každé $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_{d_1}$ existuje $\theta_d \in \mathbb{D}$ a $\mathbf{v}_d \in \mathbb{H}_{d_1}$ s nulovou skalární částí tak, že je splněn vztah (69).

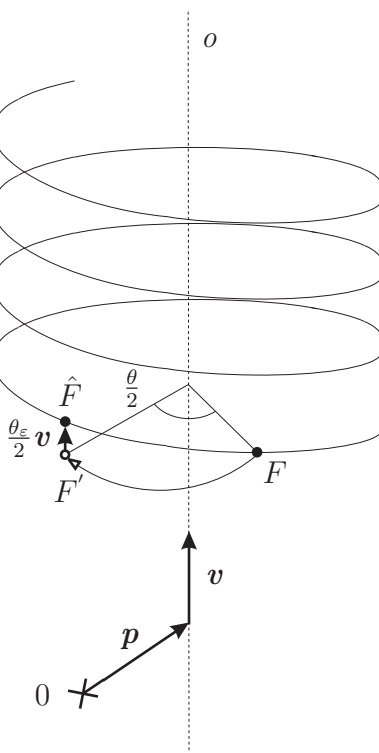
Důkaz: Důkaz lze nalézt např. v [24]. □

Každý jednotkový duální kvaternion \mathbf{q}_d , viz vztah (69), lze popsat parametry $\theta, \theta_\varepsilon, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\varepsilon$, kde $\mathbf{v}, \mathbf{v}_\varepsilon$ jsou složky jednotkového duálního kvaternion \mathbf{v}_d , tedy $\mathbf{v}_d = \mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon$. Parametry $\theta, \theta_\varepsilon$ jsou složky duálního úhlu, tedy $\theta_d = \theta + \varepsilon\theta_\varepsilon$, kde θ je úhel otočení a θ_ε je vzdálenost. Pokud je $\theta = 2c\pi$, kde $c \in \mathbb{Z}$, pak \mathbf{v} reprezentuje vektor posunutí. Jednotkový duální kvaternion \mathbf{q}_d můžeme zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{q}_d = \cos \frac{\theta_d}{2} + \mathbf{v}_d \sin \frac{\theta_d}{2} = \cos \frac{\theta + \varepsilon\theta_\varepsilon}{2} + (\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon) \sin \frac{\theta + \varepsilon\theta_\varepsilon}{2}. \quad (70)$$

Geometrická interpretace vztahu (70) souvisí s pohybem po šroubovici (šroubový pohyb), což je složení rotace okolo osy a posunutí ve směru stejné osy. Tímto způsobem může být popsána každá přímá shodnost v \mathbb{R}^3 (viz [21]).

Úhel $\frac{\theta}{2}$ je úhel rotace a jednotkový vektor \mathbf{v} reprezentuje směr osy rotace. Vzdálenost $\frac{\theta_\varepsilon}{2}$ je velikost posunutí podél vektoru \mathbf{v} (viz Obr.4) a \mathbf{v}_ε je moment osy, viz Definice 5.11. Moment osy popisuje pozici osy v prostoru. Je dán rovnicí $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{p} \times \mathbf{v}$, kde \mathbf{p} je vektor směřující z počátku k libovolnému bodu na ose. Není důležité, který bod vybereme, protože pro každé další body ležící na ose, např. $\mathbf{p} + c\mathbf{v}$ (kde $c \in \mathbb{R}$) dostaneme stejný moment: $(\mathbf{p} + c\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}$. Vidíme, že na rozdíl od kvaternionů, které reprezentují rotace, jejichž osy prochází počátkem, mohou duální kvaterniony reprezentovat rotace s libovolnými osami (viz [23]).



Obr. 4: Šroubový pohyb. Bod F se otočí kolem osy, která je daná směrovým vektorem \mathbf{v} a je posunuta o vektor \mathbf{p} . Úhel otočení bodu F do bodu F' je $\frac{\theta}{2}$. Následně se bod F' posune do bodu \hat{F} o velikost $\frac{\theta_\varepsilon}{2}\mathbf{v}$ ve směru osy otočení.

Geometrická interpretace rotace pomocí duálních kvaternionů

V této části se zaměříme pouze na rotaci bodu kolem osy. Můžeme říci, že jednotkový duální kvaternion \mathbf{q}_d reprezentuje rotaci v trojrozměrném prostoru, pokud je jeho duální část nulová ($q_\varepsilon = 0$). Zavedeme jednotkový duální kvaternion ve speciální formě a vyjádříme vztah pro rotaci.

Věta 5.10 *Nechť je dán polohový vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ bodu P a jednotkový duální kvaternion $\mathbf{q}_d \in \mathbb{H}_{d_1}$. Pak otočení bodu P do bodu \hat{P} můžeme vyjádřit jako*

$$R\mathbf{p}_d = \mathbf{q}_d \mathbf{p}_d \overline{\mathbf{q}_d^*}, \quad (71)$$

kde \mathbf{p}_d je jednotkový duální kvaternion, který odpovídá vektoru \mathbf{p} a je ve tvaru

$$\mathbf{p}_d = 1 + \varepsilon(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}). \quad (72)$$

Důkaz: S využitím Věty 5.5 dokážeme, že jde o jednotkový kvaternion. Tedy $\mathbf{p}_d = r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k} + \varepsilon(p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}) = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + \varepsilon(0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})$. Platí $q \cdot q_\varepsilon = 0$ a $\|q\| = 1$.

Jednoduše ověříme, že vztah (71) popisuje rotaci. Pokud $q_\varepsilon = 0$, tzn. $\mathbf{q}_d = q$, dostaneme následující vztah pro rotaci

$$R\mathbf{p}_d = q\mathbf{p}_d\bar{q} \quad (73)$$

$$= q[1 + \varepsilon(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})]\bar{q} \quad (74)$$

$$= 1 + \varepsilon q(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})\bar{q}. \quad (75)$$

Příklad 5.1 (Rotace) Necháme rotovat bod $P = [4, 5, 6]$ o úhel $\gamma = 120^\circ$ ($\frac{2}{3}\pi$ rad) kolem osy x , směrový vektor osy otočení je tedy $(1, 0, 0)$. \square

Řešení: Nejprve určíme rotační kvaternion q . K tomu použijeme vzorec pro převod reprezentace osa–úhel do kvaternionů

$$q = \cos \frac{\gamma}{2} + \mathbf{i}(n_x \sin \frac{\gamma}{2}) + \mathbf{j}(n_y \sin \frac{\gamma}{2}) + \mathbf{k}(n_z \sin \frac{\gamma}{2}), \quad (76)$$

kde γ je úhel rotace a $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ je vektor reprezentující osu otočení.

Po dosazení dostaneme $q = \cos \frac{\pi}{3} + \mathbf{i}(1 \sin \frac{\pi}{3}) + \mathbf{j}(0 \sin \frac{\pi}{3}) + \mathbf{k}(0 \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$.

K bodu P , jenž je určený vektorem \mathbf{p} , určíme jednotkový duální kvaternion $\mathbf{p}_d = 1 + \varepsilon 4\mathbf{i} + \varepsilon 5\mathbf{j} + \varepsilon 6\mathbf{k}$ a můžeme dosadit hodnoty do rovnosti (73)

$$\begin{aligned} R\mathbf{p}_d &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \right) (1 + \varepsilon 4\mathbf{i} + \varepsilon 5\mathbf{j} + \varepsilon 6\mathbf{k}) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \varepsilon 2\sqrt{3} + \varepsilon 2\mathbf{i} + \varepsilon \frac{5 - 6\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} + \varepsilon \frac{1 + 5\sqrt{3}}{2}\mathbf{k} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \right) \\ &= 1 + \varepsilon 4\mathbf{i} - \varepsilon \frac{5 + 6\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - \varepsilon \frac{6 - 5\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Bod P jsme otočili do bodu $P' = \left[4, \frac{-5-6\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-6}{2} \right]$. \square

Geometrická interpretace translace pomocí duálních kvaternionů

V této části se zaměříme pouze na posunutí v trojrozměrném prostoru. Následující větou zavedeme jednotkový duální kvaternion, který bude odpovídat posunutí o určitý vektor a vyjádříme tak jednoduchý vztah pro translaci bodu.

Věta 5.11 *Nechť je dán polohový vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ bodu P a $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ je vektor posunutí. Pak posunutí bodu P do bodu \hat{P} můžeme vyjádřit jako*

$$T\mathbf{p}_d = \mathbf{t}_d \mathbf{p}_d \bar{\mathbf{t}}_d, \quad (77)$$

kde \mathbf{p}_d je jednotkový duální kvaternion, který odpovídá vektoru \mathbf{p} a je ve tvaru (72). \mathbf{t}_d je jednotkový duální kvaternion, pro který platí

$$\mathbf{t}_d = 1 + \frac{\varepsilon}{2}(t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}). \quad (78)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{p}_d} &= \mathbf{t}_d \mathbf{p}_d \overline{\mathbf{t}_d^*} \\
&= \mathbf{t}_d [1 + \varepsilon(p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k})] (1 + \frac{\varepsilon}{2} [t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k}]) \\
&= \mathbf{t}_d [1 + \varepsilon((p_1 + \frac{t_1}{2}) \mathbf{i} + (p_2 + \frac{t_2}{2}) \mathbf{j} + (p_3 + \frac{t_3}{2}) \mathbf{k})] \\
&= [1 + \frac{\varepsilon}{2} (t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k})] [1 + \varepsilon((p_1 + \frac{t_1}{2}) \mathbf{i} + (p_2 + \frac{t_2}{2}) \mathbf{j} + (p_3 + \frac{t_3}{2}) \mathbf{k})] \\
&= 1 + \varepsilon[(p_1 + t_1) \mathbf{i} + (p_2 + t_2) \mathbf{j} + (p_3 + t_3) \mathbf{k}], \tag{79}
\end{aligned}$$

což ukazuje, že vektor \mathbf{p} se posune o vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$. \square

Geometrická interpretace přímé shodnosti pomocí duálních kvaternionů

Na začátku podkapitoly 5.3 jsme ve Větě 5.8 ukázali, jak mohou duální kvaterniony popsat zobrazení přímky v přímé shodnosti. Pokud chceme vyjádřit složení⁶ otočení a posunutí bodu, musíme vztah (57) vhodně upravit. K tomu nám poslouží následující věta.

Věta 5.12 *Nechť je dán polohový vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ bodu P , vektor posunutí $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ a jednotkový kvaternion $q \in \mathbb{H}_1$. Pak složení otočení a posunutí bodu P do bodu \hat{P} můžeme vyjádřit jako*

$$\hat{\mathbf{p}}_d = \mathbf{q}_d \mathbf{p}_d \overline{\mathbf{q}_d^*}, \tag{80}$$

kde \mathbf{q}_d je jednotkový duální kvaternion, pro který platí

$$\mathbf{q}_d = q + \varepsilon q_\varepsilon = q + \varepsilon \frac{tq}{2} \in \mathbb{H}_{d_1}, \quad t = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k} \in \mathbb{H}_p. \tag{81}$$

Důkaz: Složení rotace a translace pomocí duálních kvaternionů vypadá následovně, $q \in \mathbb{H}_1$ reprezentuje otočení a $\mathbf{t}_d \in \mathbb{H}_{d_1}$ posunutí duálního kvaternionu $\mathbf{p}_d \in \mathbb{H}_{d_1}$:

$$\mathbf{t}_d (q \mathbf{p}_d \overline{q^*}) \overline{\mathbf{t}_d^*} = (\mathbf{t}_d q) \mathbf{p}_d (\overline{q^*} \overline{\mathbf{t}_d^*}) = (\mathbf{t}_d q) \mathbf{p}_d (\overline{q^*} \overline{\mathbf{t}_d^*}) = (\mathbf{t}_d q) \mathbf{p}_d \overline{(\mathbf{t}_d q)^*}. \tag{82}$$

Upravíme vztah $\mathbf{t}_d q$, tj.

$$\mathbf{t}_d q = \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} (t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k}) \right] q, \quad t = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k} \tag{83}$$

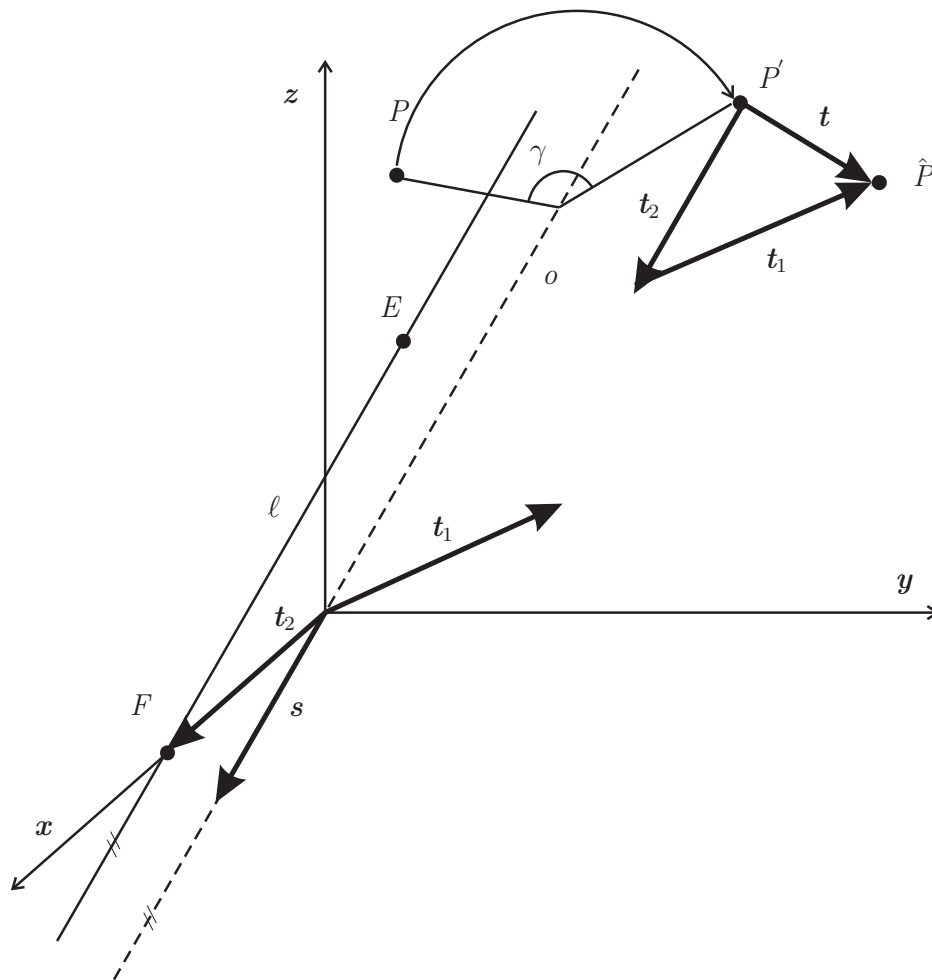
$$= q + \varepsilon \frac{tq}{2}. \tag{84}$$

Obdobně pro $\overline{(\mathbf{t}_d q)^*}$ dostáváme $\overline{(\mathbf{t}_d q)^*} = q - \varepsilon \frac{\overline{q} \overline{t}}{2} = \overline{q} - \varepsilon \overline{q}_\varepsilon$.

⁶Skládání není obecně komutativní a proto záleží na pořadí skládání. V další části textu budeme pracovat s otočením a následným posunutím.

Poznámka 5.5 Pokud chceme převést jednotkový duální kvaternion do matice přímé transformace, pak kvaternion q klasicky reprezentuje rotaci, viz [33]. Posunutí je dané $2q_\varepsilon\bar{q}$, což plyne z důkazu Věty 5.12.

Příklad 5.2 (Rotace a posunutí) Vezmeme bod $P = [4, 5, 6]$ a otočíme o úhel $\gamma = 120^\circ$ ($\frac{2}{3}\pi$ rad) kolem přímky ℓ , která prochází body $E = [0, 2, 2]$ a $F = [1, 0, 0]$. Poté bod posuneme o vektor $t_1 = (1, 2, 4)$, viz Obr. 5.



Obr. 5: Otočení a posunutí bodu P do body \hat{P} , kolem osy dané dvěma body E a F .

Řešení: Nejdříve určíme směrový vektor přímky ℓ , kolem které budeme otáčet, tedy $s = (F - E) = (1, -2, -2)$. Okolo osy o , která prochází počátkem a má stejný směrový vektor jako přímka ℓ , necháme bod rotovat o úhel γ . Tato osa je posunutá vzhledem k přímce ℓ o vektor $t_2 = (1, 0, 0)$ ve směru x -ové osy, proto zadaný bod posuneme o $-t_2$. Pomocí směrového vektoru určíme rotační kvaternion q . Opět použijeme vzorec pro převod reprezentace osa-úhel do kvaternionů, viz Příklad 5.1. Úhel otočení je $\gamma = 120^\circ$ a pro vektor reprezentující osu otočení platí podmínka $nn = 1$. Normujeme směrový vektor a dostaneme jednotkový

vektor: $\mathbf{n} = \left(\frac{\mathbf{s}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$. Nyní můžeme dosadit do vztahu (76) a dostaneme $q = \cos \frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\left(\frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{-2}{3} \sin \frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{-2}{3} \sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k}$.

K bodu P , jenž je určený vektorem \mathbf{p} , určíme jednotkový duální kvaternion $\mathbf{p}_d = 1 + \varepsilon 4\mathbf{i} + \varepsilon 5\mathbf{j} + \varepsilon 6\mathbf{k}$ a posuneme jej o vektor $-\mathbf{t}_2$. Dostáváme $\mathbf{p}_d = 1 + \varepsilon 3\mathbf{i} + \varepsilon 5\mathbf{j} + \varepsilon 6\mathbf{k}$. Ještě potřebujeme znát translační kvaternion t . Bod posuneme zpět o vektor \mathbf{t}_2 a následně o vektor \mathbf{t}_1 a dostaneme tak výslednou pozici bodu P , jenž jsme chtěli otočit okolo přímky ℓ . Pro zjednodušení můžeme obě posunutí sečíst a dostaneme tak vektor celkového posunutí \mathbf{t} . Tedy $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = (1, 2, 4) + (1, 0, 0) = (2, 2, 4)$. Translační kvaternion t bude tvaru $t = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Nyní můžeme použít Větu (5.12).

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_d &= \mathbf{q}_d \mathbf{p}_d \bar{\mathbf{q}}_d^* = (q + \varepsilon \frac{tq}{2}) [1 + \varepsilon(p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})] (q - \varepsilon \frac{\bar{q}t}{2}) \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k} + \varepsilon \frac{5\sqrt{3} + (3 + 2\sqrt{3})\mathbf{i} + (3 + 4\sqrt{3})\mathbf{j} + (4 - 3\sqrt{3})\mathbf{k}}{6} \right] \\ &\quad (1 + \varepsilon 3\mathbf{i} + \varepsilon 5\mathbf{j} + \varepsilon 6\mathbf{k}) \\ &\quad \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k} + \varepsilon \frac{-5\sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})\mathbf{i} - (3 + 4\sqrt{3})\mathbf{j} - (4 - 3\sqrt{3})\mathbf{k}}{6} \right] \\ &= 1 + \varepsilon \frac{-8 - \sqrt{3}}{3}\mathbf{i} + \varepsilon \frac{35 - 12\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \varepsilon \frac{44 + 11\sqrt{3}}{6}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Bod P určený vektorem \mathbf{p} jsme posunuli a otočili do bodu $\hat{P} = \left[\frac{-8-\sqrt{3}}{3}, \frac{35-12\sqrt{3}}{6}, \varepsilon \frac{44+11\sqrt{3}}{6}\right]$, jenž je určený vektorem $\hat{\mathbf{p}}$. \square

6 Aplikace duálních kvaternionů v praxi

Duální kvaterniony se využívají v mnoha odvětvích. Najdeme je například v kinematice, počítačové grafice, fyzice, geometrickém modelování. V následujícím textu uvedeme několik příkladů jejich aplikací.

6.1 Maxwellovy rovnice

Jedněmi z nejznámějších rovnic ve fyzice jsou Maxwellovy rovnice. James Clerk Maxwell (1831–1879), skotský fyzik, absolvoval v letech (1847–1850) Univerzitu v Edinburgu. Zde se setkal s Williamem Hamiltonem a kvaterniony. Později působil jako profesor na univerzitě v Aberdeenu, na King's College v Londýně a v Cambridgi. Byl také členem Královské společnosti v Londýně. Navázal na experimenty Michaela Faradaye (1791–1867) a André Marie Ampéra (1775–1836). Roku 1864 zformuloval soustavu čtyř rovnic, dnes známých jako Maxwellovy rovnice. Bezpochyby jsou jeho největším objevem. Později v roce 1873 je Maxwell přeformuloval s využitím kvaternionů a vektorové analýzy. Těmito rovnicemi předpověděl existenci vlnění, při němž současně osciluje elektrické a magnetické pole. Z rovnic zároveň plyne, že takové vlnění může existovat i ve vakuu. Maxwell na základě tehdy prováděných měření určil rychlost světla $c = 310\,740\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V návaznosti na Maxwellovu teorii se začaly objevovat další experimenty, které byly zaměřeny např. na měření rychlosti světla [28].

Klasické Maxwellovy rovnice, z kterých budeme vycházet, mají tvar:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (85)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (86)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (87)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (88)$$

Vztah (85) nazýváme *Ampérův zákon*, kde rotace vektoru intenzity magnetického pole \mathbf{H} je rovna hustotě vodivého proudu \mathbf{J} a hustotě posuvného (Maxwellova) proudu $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Vztah (86) je tzv. *Faradayův indukční zákon*, kde rotace vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E} je rovna záporně vzaté derivaci magnetické indukce \mathbf{B} . Vztah (87) je *Zákon spojitosti indukčního toku*, kde divergence vektoru magnetické indukce \mathbf{B} je rovna nule. A vztah (88) nazýváme *Gaussovým zákonem elektrostatiky*, kde divergence vektoru elektrické indukce \mathbf{D} je rovna objemové hustotě volného náboje ρ .

Jedním ze způsobů reprezentace Maxwellových rovnic jsou i duální kvaterniony. Nastíníme jejich použití. Nejdříve aplikujeme duální kvaterniony do klasické elektrodynamiky a pro přehlednost ztotožníme: $1 = e_0, \mathbf{i} = e_1, \mathbf{j} = e_2, \mathbf{k} = e_3$. Poté definujeme dva nové základní duální kvaterniony. Jedním z nich je duální kvaternionový diferenciální operátor:

$$\mathbf{D}_d = \nabla + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_\varepsilon} = \left[\frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3 \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_\varepsilon}. \quad (89)$$

Druhým je duální kvaternion \mathbf{M}_d , který zahrnuje intenzitu elektrického pole E a intenzitu magnetického pole H .

$$\mathbf{M}_d = -E + \varepsilon H_\varepsilon = -[E_1 e_1 + E_2 e_2 + E_3 e_3] + \varepsilon[H_1 e_1 + H_2 e_2 + H_3 e_3]. \quad (90)$$

Předcházející duální kvaterniony mezi sebou vynásobíme a dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_d \mathbf{M}_d &= \left[\nabla + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right] [-E + \varepsilon H_\varepsilon] = \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \left[-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{H} \right] \\ &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \rho + \varepsilon J_\varepsilon. \end{aligned} \quad (91)$$

Vznikl další duální kvaternion $\rho + \varepsilon J_\varepsilon$, kde ρ je hustota volného náboje a J_ε je hustota elektrického proudu. Dále pomocí duálních kvaternionů můžeme definovat elektrický potenciál:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{A} - \varepsilon \varphi_\varepsilon = [A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3] - \varepsilon \varphi_\varepsilon, \quad (92)$$

kde \mathbf{A} je vektorový potenciál a φ_ε je skalární potenciál.

Pomocí duálních kvaternionů jsme přepsali čtyři Maxwellovy rovnice (85), (86), (87) a (88) do jedné rovnice (91), odvození naleznete v [41].

6.2 Hand–eye kalibrace

Další uplatnění duálních kvaternionů nalezneme v robotice. V dnešní době běžně nacházíme průmyslové roboty. Jsou využívány např. pro svařování a pro další operace, které jsou pro člověka příliš obtížné. Můžeme se s nimi setkat také v lékařství [19]. Tomuto odvětví se říká robotická chirurgie. Výhodou je šetrný přístup k lidské tkáni, kdy se operuje jen přesně ohraničené místo a snižují se následné komplikace (např. infekce). Robotický systém, viz Obr. 6, se skládá z ramen, kdy je jedno rameno vybaveno speciální kamerou s trojrozměrným obrazem. Chirurg tak může vnímat mimo obrazu i hloubku a určit tak přesně pohyb chirurgických nástrojů, jenž jsou pevně připevněné k ramenům robota. Tento způsob se využívá hlavně tam, kde není bezpečné operovat klasickým způsobem.

Hand–eye systém, viz Obr. 7, bychom mohli přeložit do češtiny jako systém ruka–oko. Oko představuje kamera, která je pevně připevněná na pohyblivém úchopu, tedy ruce a snímá okolí. Hand–eye kalibrace je vypočtení vzájemné pozice a nastavení mezi úchopem robota a kamerou pevně připevněnou k úchopu. Zahrnuje tedy počítání přímých shodností mezi nimi, respektive mezi pozicí v obraze a polohou úchopu. Problém se týká všech senzorů, které jsou připevněné na mechanických spojích. Jedná se například o kameru namontovanou na binokulární hlavě s mechanickými stupni volnosti nebo kameru připevněnou na nějakém přístroji.

S pomocí kamery, kterou připevníme na úchop, můžeme odhadnout pozici uchopení nebo získat pozici kamery. Řídící pokyny robota jsou zadány v souřadnicovém systému úchopu. Dokonce, když změním souřadnice kamery, měli bychom poznat, jak se změní obraz snímáný



Detail operační konzoly

Detail pracovního ramene

Detail pracovní části ramene

Detail stereoskopické optiky

Obr. 6: Robotický systém, který slouží pro chirurgické zákroky [19].

kamerou robota. Pomocí kamery umístěné na úchopu také můžeme provést stereoskopickou rekonstrukci tak, že kameru nastavíme do několika poloh sdílejících stejný pohled. K rekonstrukci trojrozměrné pozice musíme znát vzájemnou korelaci z kamerového souřadnicového systému. Ovšem známe pouze jednu transformaci a ta je v souřadnicích robota. Podobný postup bychom použili i pro připojení kamery na binokulární hlavě. Pokud je kamera ručně připevněná, tak je nutná tato kalibrace, protože může dojít k naklonění kamerového systému.

Řešení problému nalezneme např. v [10]. Obvykle můžeme popsat hand-eye kalibraci pomocí několika homogenních transformačních matic, viz schéma na Obr. 8 (schéma je inspirováno z [10]). Označme X matici transformace z kamery do úchopu, A_i transformační matici z kamery do bazového systému souřadnic a B_i transformační matici ze základny robota do úchopu v i -té pozici. Dále označme A matici transformace mezi dvěma polohami kamery a B matici transformace mezi dvěma polohami úchopu. Jak je dokázáno v [38], tak platí

$$AX = XB, \quad (93)$$



Obr. 7: Hand-eye systém [22].

kde A, B, X jsou matice typu 4×4 , které mají tento tvar:

$$A = \begin{pmatrix} R_A & \mathbf{t}_A \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} R_B & \mathbf{t}_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} R_X & \mathbf{t}_X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

kde $R_A, R_B, R_C \in \mathbf{SO}(3)$ a $\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B, \mathbf{t}_X \in \mathbb{R}^3$ jsou vektory popisující posunutí. Nechť A_1 a A_2 jsou transformační matice z kamery do základního systému souřadnic ve dvou pozicích, dostáváme:

$$A = A_2 A_1^{-1}. \quad (95)$$

Matici B popisuje pohyb úchopu z jedné pozice do druhé a opět pokud jsou B_1 a B_2 transformační matice ze základny robota do úchopu, dostáváme:

$$B = B_2^{-1} B_1. \quad (96)$$

Vztahu (93) rozepíšeme a dostáváme:

$$\begin{pmatrix} R_A & \mathbf{t}_A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_X & \mathbf{t}_X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_X & \mathbf{t}_X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_B & \mathbf{t}_B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (97)$$

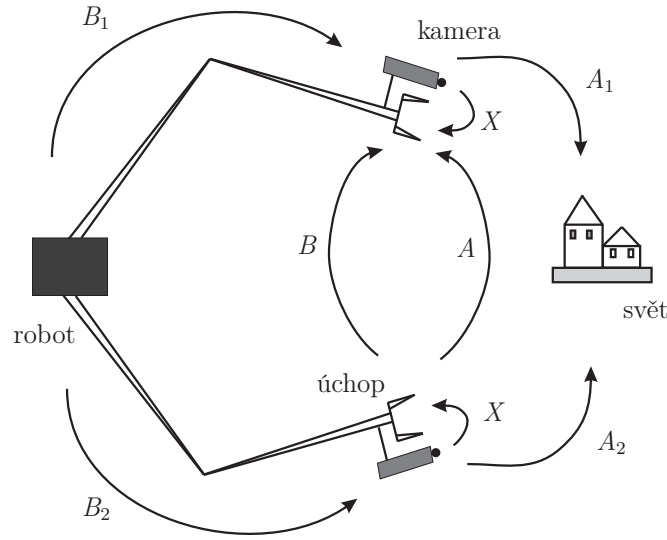
Po vynásobení dostáváme z přecházející rovnosti základní rovnice pro popis vztahu mezi kamerou a úchopem:

$$R_A R_X = R_X R_B \quad (98)$$

$$R_A \mathbf{t}_X + \mathbf{t}_A = R_X \mathbf{t}_B + \mathbf{t}_X. \quad (99)$$

Vztah (99) upravíme do vhodnější výpočet vektoru \mathbf{t}_X :

$$(R_A - I) \mathbf{t}_X = R_X \mathbf{t}_B - \mathbf{t}_A. \quad (100)$$



Obr. 8: Robot s úchopem a připevněnou kamerou ve dvou pozicích.

Obvykle se postupuje tak, že se vyřeší R_X ze vztahu (98) a poté t_X ze vztahu (100). K vyřešení neznámých se využívá nelineární optimalizace.

Nyní se pokusíme úlohu formulovat pomocí duálních kvaternionů, které využijeme pro interpretaci rotace a translace. Nechť p_d označuje šroubový pohyb kamery a r_d označuje šroubový pohyb úchopu. Kamera a úchop jsou pevně spojené. Přímá shodnost mezi nimi není známá a budeme ji označovat jednotkovým duálním kvaternionem q_d . Složením tedy dostáváme:

$$p_d = q_d r_d \bar{q}_d. \quad (101)$$

Skalární části duálních kvaternionů $\Re(p_d)$ a $\Re(r_d)$ se rovnají. Duální kvaterniony p_d a r_d můžeme zapsat dle Věty 5.9, tj.

$$\begin{aligned} p_d &= \cos \frac{\theta_{d_p}}{2} + \mathbf{v}_{d_p} \sin \frac{\theta_{d_p}}{2}, \text{ kde } \theta_{d_p} = \theta_p + \varepsilon \theta_{\varepsilon p}, \\ r_d &= \cos \frac{\theta_{d_r}}{2} + \mathbf{v}_{d_r} \sin \frac{\theta_{d_r}}{2}, \text{ kde } \theta_{d_r} = \theta_r + \varepsilon \theta_{\varepsilon r}. \end{aligned} \quad (102)$$

Protože se rovnají jejich skalární části, můžeme psát:

$$\cos \frac{\theta_{d_p}}{2} = \cos \frac{\theta_p + \varepsilon \theta_{\varepsilon p}}{2} = \cos \frac{\theta_r + \varepsilon \theta_{\varepsilon r}}{2} = \cos \frac{\theta_{d_r}}{2}, \quad (103)$$

což můžeme upravit podle rovnosti (38) a dostaneme:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta_p + \varepsilon \theta_{\varepsilon p}}{2} &= \cos \frac{\theta_p}{2} - \varepsilon \frac{\theta_{\varepsilon p}}{2} \sin \frac{\theta_p}{2} \\ \cos \frac{\theta_r + \varepsilon \theta_{\varepsilon r}}{2} &= \cos \frac{\theta_r}{2} - \varepsilon \frac{\theta_{\varepsilon r}}{2} \sin \frac{\theta_r}{2}. \end{aligned} \quad (104)$$

Ekvivalentně dostáváme:

$$\cos \frac{\theta_p}{2} = \cos \frac{\theta_r}{2} \quad \text{a} \quad \theta_{\varepsilon p} \sin \frac{\theta_p}{2} = \theta_{\varepsilon r} \sin \frac{\theta_r}{2}. \quad (105)$$

Vidíme, že úhly a velikost posunutí u šroubového pohybu úchopu a šroubového pohybu kamery se rovnají, a proto zůstávají invariantní vzhledem k souřadnicím transformace.

Protože si jsou skalární části rovny, vztah (101) se zjednoduší a počítá se pouze vektorová část. Šroubový pohyb tedy popíšeme následujícím vztahem:

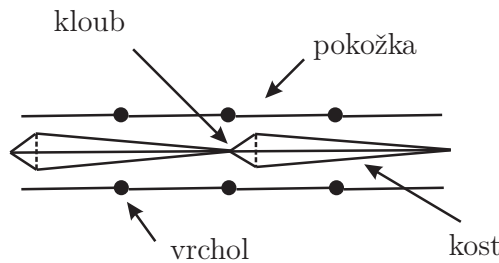
$$\mathbf{v}_{d_p} \sin \frac{\theta_{d_p}}{2} = \mathbf{q}_d (\mathbf{v}_{d_r} \sin \frac{\theta_{d_r}}{2}) \bar{\mathbf{q}}_d. \quad (106)$$

Vztah (106), který jsme získali použitím duálních kvaternionů a vztah (98) jsou ekvivalentní. Zjistili jsme, že hand-eye odhad je nezávislý na úhlu a na vzdálenosti kamery. K dokončení výpočtu můžeme použít např. lineární metodu SVD rozkladu viz. [10]. Výhoda duálních kvaternionů je hlavně v tom, že dokáží velmi jednoduše popsat přímou shodnost.

6.3 Skeletální animace (Skinning)

Skeletální animace neboli skinning je metoda, která se často využívá v počítačové grafice, viz např. [37]. Používá se především k animaci deformace složitějších objektů, u kterých by jiné metody simulace nebyly tak přesné, jedná se např. o vizualizaci virtuálního humanoida, viz [27].

Principem skeletální animace je animace jednoduché kostry, na kterou je navázána trojúhelníková síť. Ta je tvořena vrcholy a je doplněna o normály ve vrcholech, jež jsou potřebné při stínování. Síť reprezentuje povrch animovaného objektu – kůži. Kostra je kořenový strom. Hrany stromu odpovídají kostem a uzly kostry reprezentují klouby. Klouby tedy spojují dvě sousední kosti, viz Obr. 9. Ke každému kloubu můžeme přiřadit homogenní matici, která popisuje afinní transformaci mezi jednotlivými klouby. Všechny kosti mimo kořenové kosti mají právě jednu nadřazenou kost. Každý bod trojúhelníkové sítě obsahuje seznam kostí, které jej mohou ovlivnit. Kostra je obvykle v tzv. referenční poloze, viz [37].



Obr. 9: Animace části jednoduché kostry.

Skeletální animace je základ pro téměř všechny moderní metody animace. Výhodou je snadnější propojení s prostředím scény. Díky jednoduché kostře je možné lépe určit například pohyb ruky nebo přesnou pozici nohou pro chůzi modelu po scéně.

Existuje mnoho metod, které se používají k interpolaci jednotlivých poloh, mohou to být například Sférická lineární interpolace (SLERP), viz [11], která využívá kvaternionů. Jednou z metod skinningu je i blending⁷, který umožňuje míchání jednotlivých animací mezi sebou a s ním spojené algoritmy např. Linear blend skinning (LBS) nebo algoritmy využívající duální kvaterniony jako Dual quaternion linear blending (DLB) nebo Dual quaternion iterative blending (DIB), např. [23].

Dual quaternion linear blending

Nyní se zaměříme na jednu z metod skinningu, která využívá duální kvaterniony. Tato metoda se nazývá *Dual quaternion linear blending (DLB)* a je alternativou pro techniku zvanou *ScLERP*, viz [24]. Důležitým předpokladem je schopnost popsat rotaci a posunutí jednotkovými duálními kvaterniony (viz kapitola 5). Dále potřebujeme vypočítat duální kvaternion \mathbf{q}_d vzhledem k daným konvexním váhám w_1, \dots, w_n . Konvexní váhy jsou takové, pro které platí: $w_1 + \dots + w_n = 1 \wedge w_1 \geq 0, \dots, w_n \geq 0$. Vezmeme jejich lineární kombinace a normujeme, dostáváme jednotkový duální kvaternion, tedy:

$$DLB(\mathbf{w}; \mathbf{q}_{d_1}, \dots, \mathbf{q}_{d_n}) = \frac{w_1 \mathbf{q}_{d_1} + \dots + w_n \mathbf{q}_{d_n}}{\|w_1 \mathbf{q}_{d_1} + \dots + w_n \mathbf{q}_{d_n}\|}, \quad (107)$$

což nazýváme **Dual quaternion linear blending**.

DLB splňuje všechny předpoklady pro skinning: 1) Výstupem *DLB* je vždy přímá shodnost. 2) *DLB* je invariantní vůči souřadnicím, tj. nezáleží na tom, zda nejprve aplikujeme belnding a poté transformaci do nových souřadnic nebo naopak. To znamená, že platí:

$$DLB(\mathbf{w}; \mathbf{p}_d \mathbf{q}_{d_1} \bar{\mathbf{p}}_d, \dots, \mathbf{p}_d \mathbf{q}_{d_n} \bar{\mathbf{p}}_d) = \mathbf{p}_d DLB(\mathbf{w}; \mathbf{q}_{d_1}, \dots, \mathbf{q}_{d_n}) \bar{\mathbf{p}}_d. \quad (108)$$

3) Pokud použijeme *DLB* na dvě přímé shodnosti, interpolují se podél nejkratší trajektorie. Dokáží tedy napodobit chování pokožky a vyhnou se jejímu nadměrnému napínání, viz [23].

Nyní vezmeme $DLB(t; \mathbf{p}_d, \mathbf{q}_d)$ a vynásobíme jej duálním kvaternionem $\mathbf{p}_d \bar{\mathbf{p}}_d = 1$. Pomocí vztahu (108) jej upravíme do tvaru:

$$DLB(t; \mathbf{p}_d, \mathbf{q}_d) = \mathbf{p}_d \bar{\mathbf{p}}_d DLB(t; \mathbf{p}_d, \mathbf{q}_d) = \mathbf{p}_d DLB(t; 1, \bar{\mathbf{p}}_d \mathbf{q}_d). \quad (109)$$

Vezmeme $t = (1 - t, t)$ a dostaneme:

$$DLB(t; 1, \bar{\mathbf{p}}_d \mathbf{q}_d) = \frac{1 - t + t \bar{\mathbf{p}}_d \mathbf{q}_d}{\|1 - t + t \bar{\mathbf{p}}_d \mathbf{q}_d\|} = \frac{1 - t + t \cos(\frac{\theta_d}{2}) + \mathbf{v}_d t \sin(\frac{\theta_d}{2})}{\|1 - t + t \bar{\mathbf{p}}_d \mathbf{q}_d\|}. \quad (110)$$

⁷Označení blending má v počítačové grafice široké využití, označuje se jím také např. prolínání barev vykreslovaného tělesa s pozadím na základě předem zadané míchací funkce. My jej ale budeme využívat pro tzv. míchání vrcholů.

Vidíme, že *DLB* využívá šroubový pohyb.

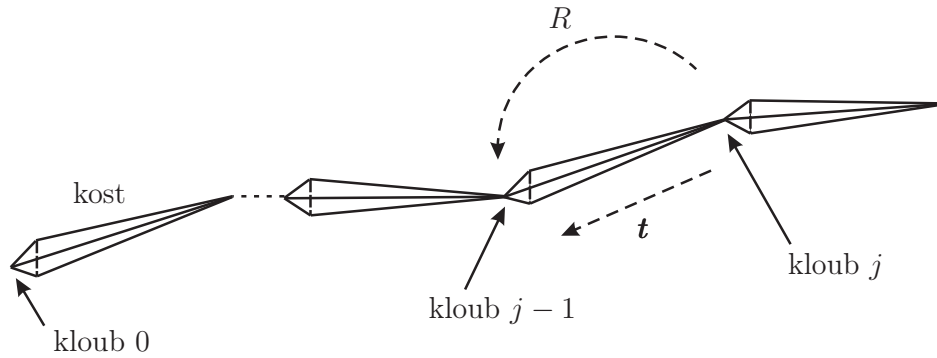
Nyní se budeme zabývat *DLB* algoritmem. Nejdříve ale nastíníme metodu Linear blend skinning a její nevýhody. Dále projdeme celým postupem *DLB* a pokusíme se jej zjednodušit.

Linear blend skinning. Zaměříme se na postup, který se používá při skeletální animaci, viz [49]. Strom je tvořen několika uzly, viz Obr. 10, inspirováno z [49]. Mějme nějaký vrchol P , který je dán polohovým vektorem \mathbf{p} (dále jen vrchol). Kořen stromu označíme 0. Kloub resp. uzel j označíme kladným nezáporným číslem podle vzdálenosti od kořene stromu, jeho předchůdce označíme $j-1$. Homogenní matici, která odpovídá kloubu j označíme H_j . Matice se skládá z rotace R_j a posunutí \mathbf{t}_j kloubu j , tj.

$$H_j = \begin{bmatrix} R_j & \mathbf{t}_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Tato matice určuje přechod mezi klouby $j-1$ a j . Pokud maticí H_j vynásobíme vrchol \mathbf{p} , který je vyjádřený v souřadnicích soustavy kloubu $j-1$, dostaneme souřadnice stejného vrcholu ale vyjádřeného vzhledem k soustavě kloubu j . Referenční kostra je dána množinou všech transformací H_j . Transformaci ze světových souřadnic do souřadného systému kloubu j vyjádříme jako:

$$A_j = H_0 \cdots H_{j-1} H_j. \quad (112)$$



Obr. 10: Posunutí a otočení kostry.

Uvažujeme, že každý kloub se může otáčet kolem své osy a zároveň ovlivňuje své následovníky. Rotace kloubu j je popsána maticí T_j . Posunutí se používá pouze v kořenu stromu.

Předpokládejme, že máme vrchol \mathbf{p}_j , který je zadán v soustavě kloubu j . Jeho animovanou polohu můžeme vypočítat jako:

$$\hat{\mathbf{p}}_j = T_j \mathbf{p}_j. \quad (113)$$

Souřadnice $\hat{\mathbf{p}}_j$ vyjádříme v soustavě kloubu $j-1$ pomocí složené matice F_{j-1} následovně:

$$F_j = H_0 T_0 \cdot H_{j-1} T_{j-1} H_j T_j. \quad (114)$$

Pokožka musí být nějakým způsobem spojena s kostru. Každý vrchol sítě, který reprezentuje pokožku přiřadíme k jednomu kloubu. Vrcholy se transformují tak, jako by byly pevně spojeny s kloubem. Vrchol v , zadaný v soustavě kořene kostry, bude přiřazen kloubu j . Jeho polohu vypočítáme jako:

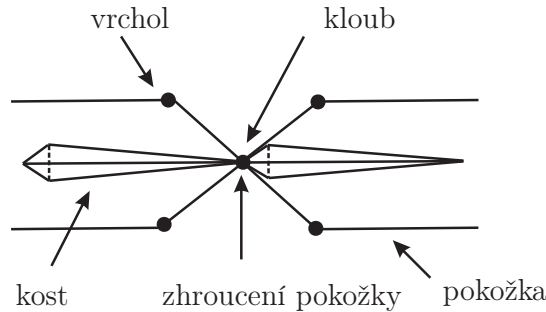
$$\hat{\mathbf{p}} = F_j A_j^{-1} \mathbf{p}. \quad (115)$$

Hladkého tvaru pokožky můžeme dosáhnout např. metodou **Linear blend skinning**. Je to obecnější vazba pokožky na kostru. Vrchol pokožky je přiřazen několika kloubům. Výsledná poloha vrcholu se spočítá jako konvexní kombinace transformací tohoto vrcholu příslušnými klouby. Vrchol \mathbf{p} je přiřazen kloubům j_1, \dots, j_s a jeho výslednou polohu spočteme takto:

$$\hat{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^s w_i C_{j_i} \mathbf{p}, \quad (116)$$

kde $C_{j_i} = F_{j_i} A_{j_i}^{-1} \in \mathbf{SE}(3)$ vyjadřuje transformaci z předešlé polohy kloubu do nové a váha w_i popisuje míru vlivu kloubu j_i . Například pokud $s = 2$, pak vrchol $\hat{\mathbf{p}}$ leží na úsečce spojující $C_{j_1} v$ a $C_{j_2} v$. Aktuální poloze je dána váhami w_1 nebo w_2 .

Jestliže jsou rotace kloubů velké, pak metoda vytváří různá znetvoření pokožky. Při použití rotace o 180° se pokožka může zhroutit do jednoho bodu, viz Obr. 11. Tomuto problému se říká *problém papíru od bonbonů*⁸, viz [13].



Obr. 11: Zhroucení animovaného objektu do jednoho bodu.

Existuje několik způsobů jak odstranit problémy a my se budeme zabývat metodou, která je založena na duálních kvaternionech.

Výpočet DLB. Nyní použijeme k výpočtu animovaného vrcholu $\hat{\mathbf{p}}$ vzorec pro výpočet *DLB*, tj. (107). Nejdříve převedeme matice přímé shodnosti C_{j_1}, \dots, C_{j_s} , kde s je počet kloubů j , do duálních kvaternionů $\mathbf{q}_{d_{j_1}}, \dots, \mathbf{q}_{d_{j_s}}$. Dále určíme lineární kombinace jednotlivých duálních kvaternionů, tedy $\mathbf{r}_d = \sum_{i=1}^s w_i \mathbf{q}_{d_{j_i}}$ a $\hat{\mathbf{r}}_d = \frac{\mathbf{r}_d}{\|\mathbf{r}_d\|}$. Normu duálního kvaternionu můžeme psát díky vztahu (51) jako $\|\mathbf{r}_d\| = \|r\| + \varepsilon \frac{r \cdot r_\varepsilon}{\|r\|}$, dostáváme:

$$\hat{\mathbf{r}}_d = \frac{\mathbf{r}_d}{\|\mathbf{r}_d\|} = \frac{r + \varepsilon r_\varepsilon}{\|r\| + \varepsilon \frac{r \cdot r_\varepsilon}{\|r\|}} = (r + \varepsilon r_\varepsilon) \frac{1}{\|r\|}. \quad (117)$$

⁸V anglické literatuře bývá označován jako Candy wrapper artifact.

Výraz $\frac{1}{\|\mathbf{r}_d\|}$ upravíme pomocí Věty 3.5 a dostaneme $\frac{1}{\|\mathbf{r}_d\|} = \frac{1}{\|r\|} - \varepsilon \frac{r \cdot r_\varepsilon}{\|r\|^3}$. Dosadíme do vztahu (117) a opět upravíme:

$$\frac{r + \varepsilon r_\varepsilon}{\|\mathbf{r}_d\|} = \frac{r}{\|r\|} + \varepsilon \left(\frac{r_\varepsilon}{\|r\|} - \frac{r(r \cdot r)}{\|r\|^3} \right). \quad (118)$$

Rovnost (118) můžeme zapsat ve tvaru $\hat{\mathbf{r}}_d = \hat{r} + \varepsilon \hat{r}_\varepsilon$, kde $\hat{r} = \frac{r}{\|r\|}$ a $\hat{r}_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon}{\|r\|} - \frac{r(r \cdot r)}{\|r\|^3}$.

Duální kvaternion $\hat{\mathbf{r}}_d$ převedeme do maticového tvaru M . Rotační část je dána $\hat{r} = \frac{r}{\|r\|}$, viz Poznámka 5.5 a posunutí je dáno

$$2\hat{r}_\varepsilon \bar{\hat{r}} = 2 \left(\frac{r_\varepsilon}{\|r\|} - \frac{r(r \cdot r)}{\|r\|^3} \right) \frac{\bar{r}}{\|r\|} = 2 \left(\frac{r_\varepsilon r}{\|r\|^2} - \frac{r \cdot r_\varepsilon}{\|r\|^2} \right). \quad (119)$$

Protože se jedná o jednotkový duální kvaternion, je $r \cdot r_\varepsilon = 0$ a vztah (119) zjednodušíme:

$$2\hat{r}_\varepsilon \bar{\hat{r}} = 2 \left(\frac{r_\varepsilon r}{\|r\|^2} \right). \quad (120)$$

Matice M (více viz Algoritmus 1) slouží k transformaci vrcholu \mathbf{p} a normály \mathbf{p}' do animovaného vrcholu $\hat{\mathbf{p}}$ a normály $\hat{\mathbf{p}}'$. Nyní můžeme přejít k zadání výsledného algoritmu.

Algoritmus 1

Vstup: Na vstupu jsou zadávány duální kvaterniony $\mathbf{q}_{d_1}, \dots, \mathbf{q}_{d_n}$, vrchol P , určený polohovým vektorem $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, 1)$, normálový vektor $\mathbf{p}' = (p_1, p_2, p_3, 0)$, indexy kloubů j_1, \dots, j_s a váhy w_1, \dots, w_s .

Výpočet:

- Určíme lineární kombinace jednotlivých duálních kvaternionů, tj. $\hat{\mathbf{r}}_d = w_1 \mathbf{q}_{d_{j_1}} + \dots + \mathbf{q}_d = r + \varepsilon r_\varepsilon$.

- Pro usnadnění výpočtu označíme $c = \frac{r}{\|r\|} = \frac{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = [c_1, c_2, c_3, c_4]$
a $d = \frac{r_\varepsilon}{\|r\|} = \frac{a_\varepsilon + b_\varepsilon\mathbf{i} + c_\varepsilon\mathbf{j} + d_\varepsilon\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = [d_1, d_2, d_3, d_4]$.

- Vektor posunutí $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ spočítáme podle vztahu (120) jako: $\mathbf{t} = 2d\bar{c}$, tj:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2(-d_1c_2 + d_2c_1 - d_3c_4 + d_4c_3), \\ t_2 &= 2(-d_1c_3 + d_2c_4 + d_3c_1 - d_4c_2), \\ t_3 &= 2(-d_1c_4 - d_2c_3 + d_3c_2 + d_4c_1). \end{aligned}$$

- Sestavíme matici M přímé shodnosti. Rotační část je dána násobením kvaternionů, viz [33] a translační část jsme vyjádřili v předchozím kroku:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 2c_3^2 - 2c_4^2 & 2c_2c_3 - 2c_1c_4 & 2c_2c_4 + 2c_1c_3 & t_1 \\ 2c_2c_3 + 2c_1c_4 & 1 - 2c_2^2 - 2c_4^2 & 2c_3c_4 - 2c_1c_2 & t_2 \\ 2c_1c_4 - 2c_1c_3 & 2c_3c_4 + 2c_1c_2 & 1 - 2c_2^2 - 2c_3^2 & t_3 \end{pmatrix}.$$

- Vynásobením vrcholu \mathbf{p} a normály \mathbf{p}' maticí M dostáváme animovanou pozici vrcholu $\hat{\mathbf{p}}$ a normály $\hat{\mathbf{p}}'$, tj.:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}} &= M\mathbf{p}, \\ \hat{\mathbf{p}}' &= M\mathbf{p}'.\end{aligned}$$

Díky tomu, že jsou nahrazeny matice C_j duálními kvaterniony \mathbf{q}_{d_j} funguje algoritmus *DLB* i pro větší rotace a předchází tak problému papíru od bonbonů, přestože je výpočetně náročnější než metoda Linear blend skinning.

6.4 Racionální Bézierova a NURBS křivka duální kvaterniony

Další oblastí, kde můžeme nalézt duální kvaterniony, je oblast strojírenství. Dají se například využít při 5–ti osém obrábění. 5–ti osé obrábění umožňuje obrábění velmi složitých tvarových dílů pro speciální odvětví průmyslu, jako je například průmysl kosmický, letecký nebo automobilový. Je určeno pro obrábění tvarově velmi složitých dílů. Jednou z výhod tohoto obrábění je možnost obrábět i špatně dostupné oblasti modelu, popřípadě tvarově složité díly, k jejichž výrobě se dříve musel používat odlitek. Dráhu speciálního nože při 5–ti osém obrábění můžeme popsat racionálními Bézierovými, resp. NURBS křivkami. Křivky jsou zkonstruované s pomocí duálních kvaternionů. Nebudeme zde podrobně popisovat celý proces obrábění, zmíníme pouze část, kde a jak se používají duální kvaterniony, viz [34].

Reprezentace dráhy bodu s využitím duálních kvaternionů.

Mějme pohyblivou soustavu souřadnic $\langle \hat{O}; \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$ a stálou soustavu souřadnic $\langle O; x, y, z \rangle$. Bod P se nachází v soustavě \hat{O} . Pokud budeme pohybovat soustavou \hat{O} vzhledem k O jako na Obr. 12, dostaneme trajektorii bodu P . Bod P_1 se po trajektorii dostane do bodu P_2 . Označme \tilde{P} , resp. P homogenní souřadnice bodu v soustavě O , resp. \hat{O} . S použitím duálního kvaternionu \mathbf{q}_d můžeme získat vztah mezi \tilde{P} a P . Bod P se přemístí po nějaké křivce do bodu P_1 . Transformace mezi souřadnicemi \tilde{P}_1 v soustavě O a souřadnicemi P_1 v soustavě \hat{O} může být reprezentována duálním kvaternionem \mathbf{q}_{d_1} . Obdobně bude transformace mezi souřadnicemi pro bod P_2 , tedy \tilde{P}_2 a P_2 , reprezentována duálním kvaternionem \mathbf{q}_{d_2} . Dostáváme tak množinu duálních kvaternionů \mathbf{q}_{d_i} , která představuje transformace mezi souřadnicemi bodu P_i , tedy \tilde{P} a P , v různých bodových pozicích bodu P .

Pokusíme se zkonstruovat racionální Bézierovu duální kvaternionovou křivku, která bude procházet množinou duálních kvaternionů $\hat{\mathbf{q}}_{d_i}$. Získáme $n + 1$ duálních kvaternionů \mathbf{q}_{d_i} , tzv. *řídící body* (vyjádřeny v homogenních souřadnicích). Protože násobení souřadnic bodu v homogenních souřadnicích nenulovým číslem nemění jeho polohu, můžeme násobit souřadnice \mathbf{q}_{d_i} váhou w_i ⁹. Získáváme tak množinu tzv. *kontrolních duálních kvaternionů* $\mathbf{v}_{d_i} = w_i \mathbf{q}_{d_i}$. Pak

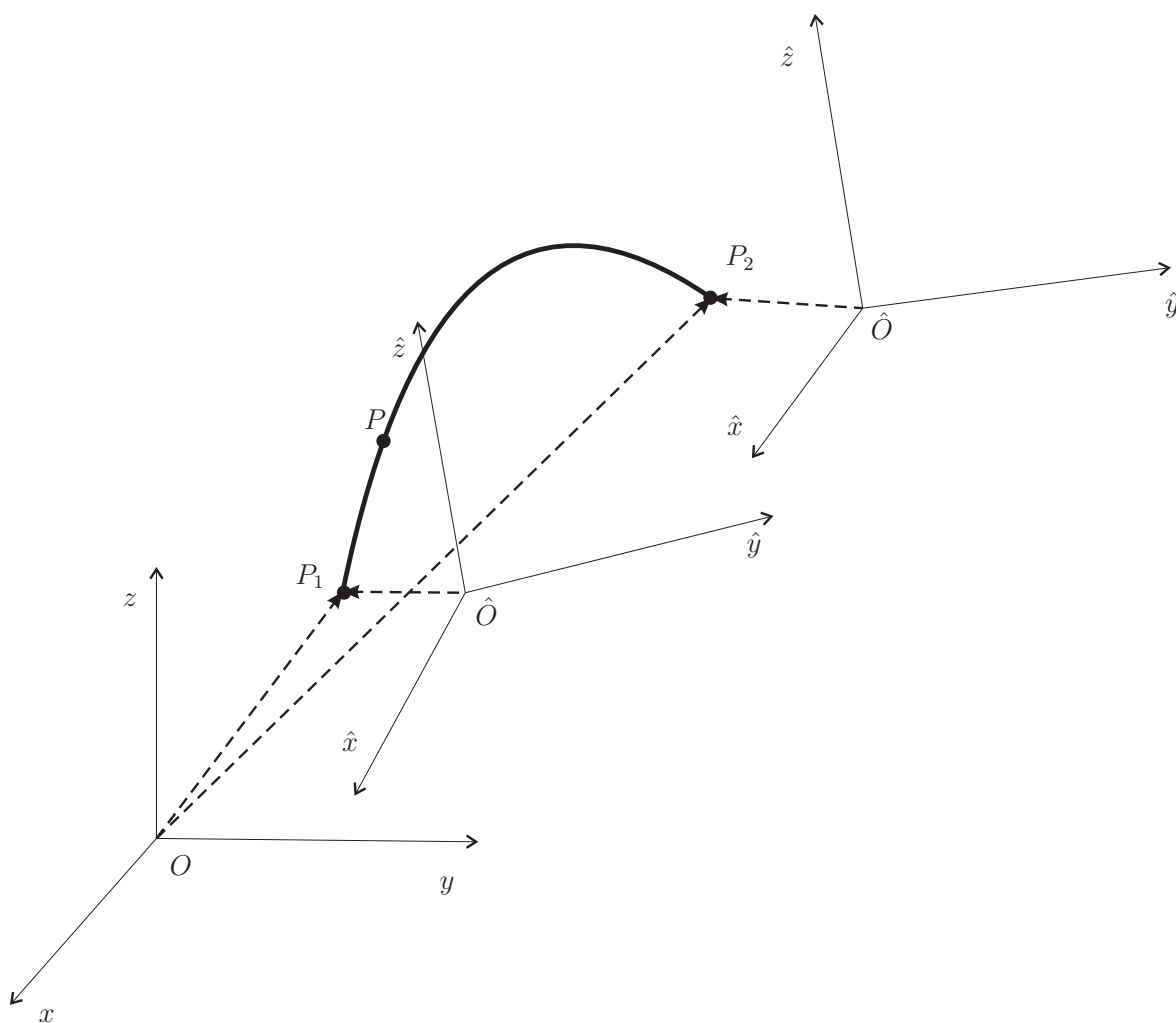
⁹Obecně platí, že váha w_i je kladná.

je racionální Bézierova duální kvaternionová křivka dána tvarem:

$$\hat{q}_d(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{v}_{d_i}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (121)$$

kde $B_{i,n}(t)$ jsou *Bernsteinovy polynomy*, tj.:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (122)$$



Obr. 12: Trajektorie bodu P vytvořená pohyblivou soustavou \hat{O} .

Obdobně můžeme zapsat **NURBS duální kvaternionovou křivku**, která je dána $n + 1$ řídicími body \mathbf{q}_{d_i} , váhami w_i a vektorem parametrizace $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ obsahující $m + 1$ uzlů, tj.:

$$\mathbf{q}_d(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \mathbf{v}_{d_i}, \quad (123)$$

kde jsou bázové polynomy pro $k > 0$ definovány předpisem:

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+k,k-1}(t), \quad (124)$$

pro $k = 0$

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (125)$$

Získali jsme tedy vzorce (123) a (121) pro výpočet trajektorie bodu P , což můžeme dále uplatnit ve strojírenství, viz [48]. V současné době existují CNC¹⁰ stroje, které umožňují vedení nástroje právě po křivkových drahách typu „spline“.

6.5 Segmentace objektů z ultrazvukového obrazu

Ultrasonografie je diagnostická zobrazovací technika, která využívá ultrazvukové vlny. Používá se například pro zobrazování svalů nebo vnitřních orgánů. Následně se zkoumá jejich velikost, struktura nebo poškození, viz [45].

V kybernetice se můžeme setkat s tzv. *segmentací objektů* z ultrazvukového obrazu vytvořeného ultrasonografií. Segmentace, viz [1], je využívána právě ke zpracování a analýze obrazových dat, při níž se dělí obraz na určité oblasti. Vlastnosti těchto oblastí jsou v nějakém ohledu stejnorodé. Obvykle se pokoušíme odlišit určité objekty od pozadí. Rozlišujeme dva druhy segmentace – úplnou a částečnou. Pokud použijeme úplnou segmentaci, tak dostaneme množinu disjunktních oblastí odpovídajících reálným objektům v obrázku. Použitím částečné segmentace dostaneme oblasti, které nemusí souhlasit s reálnými objekty. Snímek rozdělujeme do oblastí, které jsou z jistého hlediska homogenní. Kritériem homogenity může být například jas, barva nebo textura.

Segmentace je složitý problém. Při snímání se do obrazu může přidat šum nebo může dojít k tvarovým deformacím a proto je těžké rozpoznat hledané objekty. Důležité je mít nějaké informace o problému, např. tvar objektu nebo pozice ve scéně.

Jednou z nejčastějších metod segmentace je *prahování*. Jedná se o transformaci obrazu na obraz binární, kdy rozdělujeme obraz dle jasu každého pixelu. Tato metoda dobře funguje pro objekty, které se výrazně liší od pozadí. V ultrazvukových snímcích jsou si velmi podobné textury objektu a pozadí. Je složité hledaný objekt oddělit a prahování zde nelze použít.

¹⁰Computerized Numerical Control stroje slouží například k obrábění.

Hledá se tedy metoda, která dokáže přesně ohraničit objekty ze snímků, jenž jsou špatně rozeznatelné.

Soustředme se nyní na rozpoznávání tvaru ledvin v ultrazvukovém snímku. Nejprve se popíší textury, které jsou v hledané oblasti, tedy v ledvinách. Poté se zjišťuje podobnost mezi texturou ledvin a texturou snímku. Chceme tak určit tvar ledviny. To ovšem není snadné. Potřebujeme ještě získat obecný tvarový model ledviny. Vezmeme tedy co nejvíce různých tvarů ledvin a z nich získáme model průměrného tvaru ledviny a vektory deformací. Vektor deformací uvádí, jak a kde se ledviny mohou deformovat. Sestaví se kritérium, které obsahuje tyto míry deformací. Poté se tvarový model ledviny otáčením a posouváním aplikuje na snímek, kde se dle kritéria vypočítávají míry deformací. Postupnou aplikací bychom měli získat přesný tvar ledviny na ultrazvukovém snímku, viz [46].

O problém segmentace objektů z ultrazvukového obrazu se začala zajímat katedra kybernetiky na ZČU. Díky nedostatku lékařských dat, se tento problém snaží řešit pro segmentaci javorových listů. Na část celé úlohy můžeme aplikovat duální kvaterniony. Jedná se tedy o otočení, posunutí a zvětšení resp. zmenšení daného objektu.

Předně se zpracuje snímek javorového listu v programu Matlab. Převeďte se na jednotlivé body, chybějící body se interpolují a javorový list se vykreslí. Dostáváme potřebné body objektu, s kterými budeme dále pracovat. List musíme posunout do požadované polohy a dále s ním otáčíme. Celý proces otáčení a posouvání slouží k pozdější aplikaci porovnávání, kdy daný obecný list porovnáváme s tím, který chceme rozpoznat a zjišťujeme jeho vektory deformace a hledáme parametry minimalizující kritérium. Parametry jsou otočení, poloha a deformace.

K řešení použijeme funkci pro otočení a posunutí bodu duálními kvaterniony v prostoru, podrobněji viz podkapitola 6.6. Zadaná data jsou pouze dvojrozměrná, a proto se celý algoritmus zjednoduší, nicméně metoda je obecně použitelná i ve dvojrozměrném prostoru.

6.6 Výpočet otočení a posunutí ploch, křivek a bodů v trojrozměrném prostoru

Vytvoříme funkci pro výpočet otočení plochy resp. křivky okolo zadané osy o úhel φ a posunutí o vektor \mathbf{t} v programu Matlab (dále jen otočení a posunutí plochy). Uvedeme pouze algoritmus, dle kterého program pracuje.

Využijeme získaných poznatků z kapitoly 5. Použijeme vztah pro otočení a posunutí bodu duálním kvaternionem (77). Dále pak vztah (48) pro násobení duálních kvaternionů. Postupujeme obdobně jako v Příkladu 5.2.

Algoritmus 2

Vstup: Zadávány jsou tyto parametry: bod, který chceme transformovat: $P = [p_x, p_y, p_z]$; body určující osu otočení: $A = [a_x, a_y, a_z]$, $B = [b_x, b_y, b_z]$; vektor posunutí: $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$, úhel otočení φ .

Výpočet:

- Nejprve posuneme bod P o vektor $\mathbf{a} = (-a_x, -a_y, -a_z)$ tak, aby osa otočení procházela počátkem. Souřadnice posunutého bodu jsou:

$$\hat{P} = P + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} p_x - a_x, \\ p_y - a_y \\ p_z - a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix}. \quad (126)$$

Po přepsání bodu \hat{P} do jednotkového duálního kvaternionu $\hat{\mathbf{p}}_d$ dostáváme:

$$\hat{\mathbf{p}}_d = [1, 0, 0, 0, 0, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z] = [a_2, 0, 0, 0, 0, f_2, g_2, h_2].$$

- Určíme směrový vektor osy otočení, tj. $\mathbf{s} = B - A$. Po normování směrového vektoru dostáváme jednotkový vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.
- Rotační část q duálního kvaternionu $\mathbf{q}_d = [a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1]$, získáme jako:

$$q = [\cos \theta, (n_x \sin \theta, n_y \sin \theta, n_z \sin \theta)] = [a_1, b_1, c_1, d_1], \quad \text{kde } \theta = \varphi/2.$$

- Translační část q_ε duálního kvaternionu \mathbf{q}_d , získáme ze vztahu $q_\varepsilon = \frac{t\mathbf{q}}{2}$. Přičemž bod posuneme o vektor \mathbf{t} a vektor $-\mathbf{a}$. Dostáváme $t = [0, t_x + a_x, t_y + a_y, t_z + a_z] = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ a translační část, s použitím násobení (48), můžeme vyjádřit jako:

$$q_\varepsilon = \begin{bmatrix} (-t_2 b_1 - c_1 t_3 - d_1 t_4)/2 \\ (t_2 a_1 + d_1 t_3 - c_1 t_4)/2 \\ (-t_2 d_1 + a_1 t_3 + b_1 t_4)/2 \\ (t_2 c_1 - b_1 t_3 + a_1 t_4)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \\ h_1 \end{bmatrix}. \quad (127)$$

Duálně konjugovaný kvaternion $\overline{\mathbf{q}}_d^*$ k duálnímu kvaternionu \mathbf{q}_d má následující tvar:

$$\overline{\mathbf{q}}_d^* = [a_1, -b_1, -c_1, -d_1, -e_1, f_1, g_1, h_1] = [a_4, b_4, c_4, d_4, e_4, f_4, g_4, h_4].$$

- Postupujeme podle rovnosti (77) s použitím násobení (48). Nejprve vypočítáme vztah $\mathbf{a}_d = \mathbf{q}_d \hat{\mathbf{p}}_d$, tj.:

$$\mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 c_1 \\ a_2 d_1 \\ -b_1 f_2 - c_1 g_2 - d_1 h_2 + e_1 a_2 \\ a_1 f_2 + c_1 h_2 - g_2 d_1 + a_2 f_1 \\ a_1 g_2 - b_1 h_2 + f_2 d_1 + a_2 g_1 \\ a_1 h_2 + b_1 g_2 - f_2 c_1 + a_2 h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ e_3 \\ f_3 \\ g_3 \\ h_3 \end{bmatrix}. \quad (128)$$

- Nyní vynásobíme duální kvaternion \mathbf{a}_d zprava duálním kvaternionem $\bar{\mathbf{q}}_d^*$. Dostaneme jednotkový duální kvaternion $\tilde{\mathbf{p}}_d = [1, 0, 0, 0, 0, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z]$, pro jehož souřadnice platí tento vztah:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3f_4 + e_4b_3 + c_3h_4 - g_4d_3 + e_3b_4 + a_4f_3 + g_3d_4 - c_4h_3 \\ a_3g_4 - b_3h_4 + e_4c_3 + f_4d_3 + e_3c_4 - f_3d_4 + a_4g_3 + b_4h_3 \\ a_3h_4 + b_3g_4 - f_4c_3 + e_4d_3 + e_3d_4 + f_3c_4 - b_4g_3 + a_4h_3 \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Výsledný bod \tilde{P} po otočení a posunutí má souřadnice $\tilde{P} = [\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{p}_z]$.

Získali jsme tak algoritmus pro otočení bodu P o úhel φ okolo libovolné osy otočení a posunutí o vektor \mathbf{t} . Chceme-li otočit a posunout plochu resp. křivku budeme postupovat obdobně. Pro transformaci objektu vypočteme jednotlivé body, které následně otočíme a posuneme. Celý kód s příklady je k nahlédnutí v příloze A. Výstup kódu může být následující:

Příklad 6.1 Transformace *hyperbolického paraboloidu*—Obr. 13.

Parametrické zadání: $P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)$.

Body osy otočení: $A = [0, 10, 0]$, $B = [1, 2, 3]$.

Úhel otočení: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Vektor posunutí: $\mathbf{t} = [12, 2, 0]$.

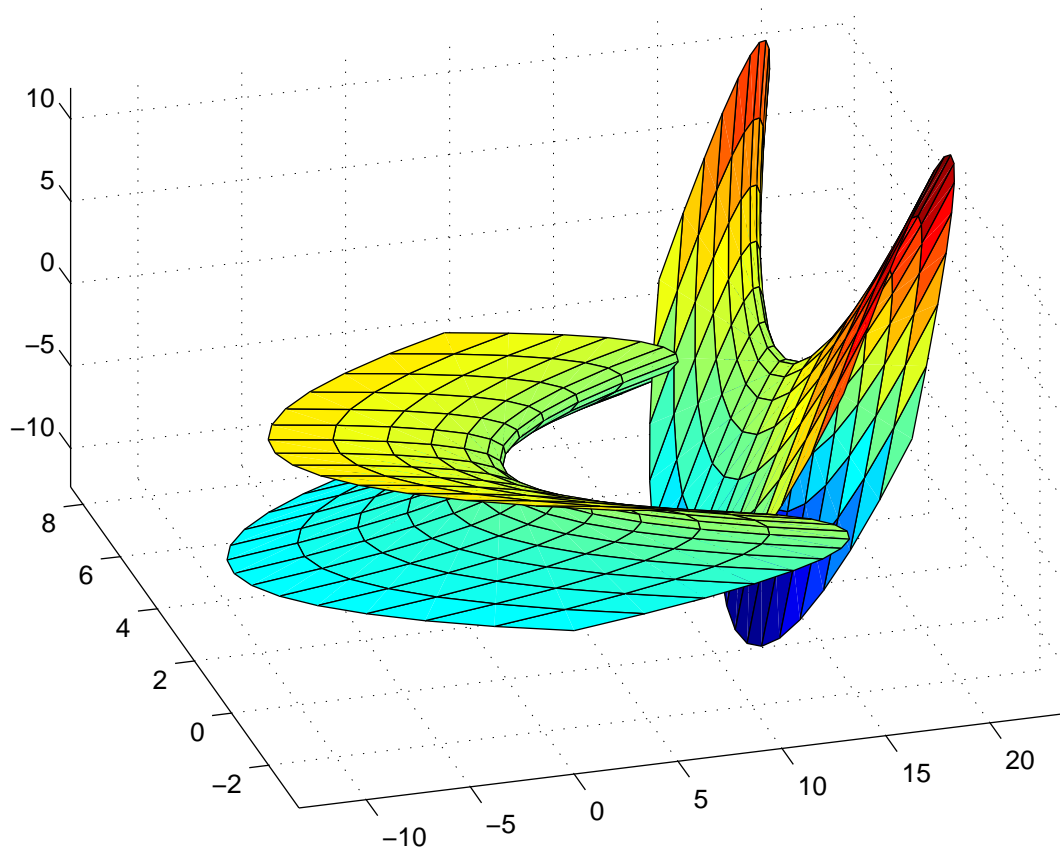
Uvedený algoritmus pro otočení a posunutí se výrazně zjednoduší, pokud ho upravíme pro rovinu. V rovině otáčíme objekt pouze kolem bodu. Rotační část duálního kvaternionu \mathbf{q}_d přejde do tvaru: $q = [\cos \theta, 0, 0, \sin \theta]$ a zjednoduší se i tvar pro translační část duálního kvaternionu q_ε , tj.: $q_\varepsilon = [0, (a_1t_2 + t_3d_1)/2, (-d_1t_2 + t_3a_1)/2, 0]$. Duální kvaternion $\mathbf{a}_d = \mathbf{q}_d\hat{\mathbf{p}}_d$, viz vztah (128), upravíme tj.:

$$\mathbf{a}_d = \begin{bmatrix} a_1a_2 \\ 0 \\ 0 \\ a_2d_1 \\ 0 \\ a_1f_2 - g_2d_1 + a_2f_1 \\ a_1g_2 + f_2d_1 + a_2g_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (130)$$

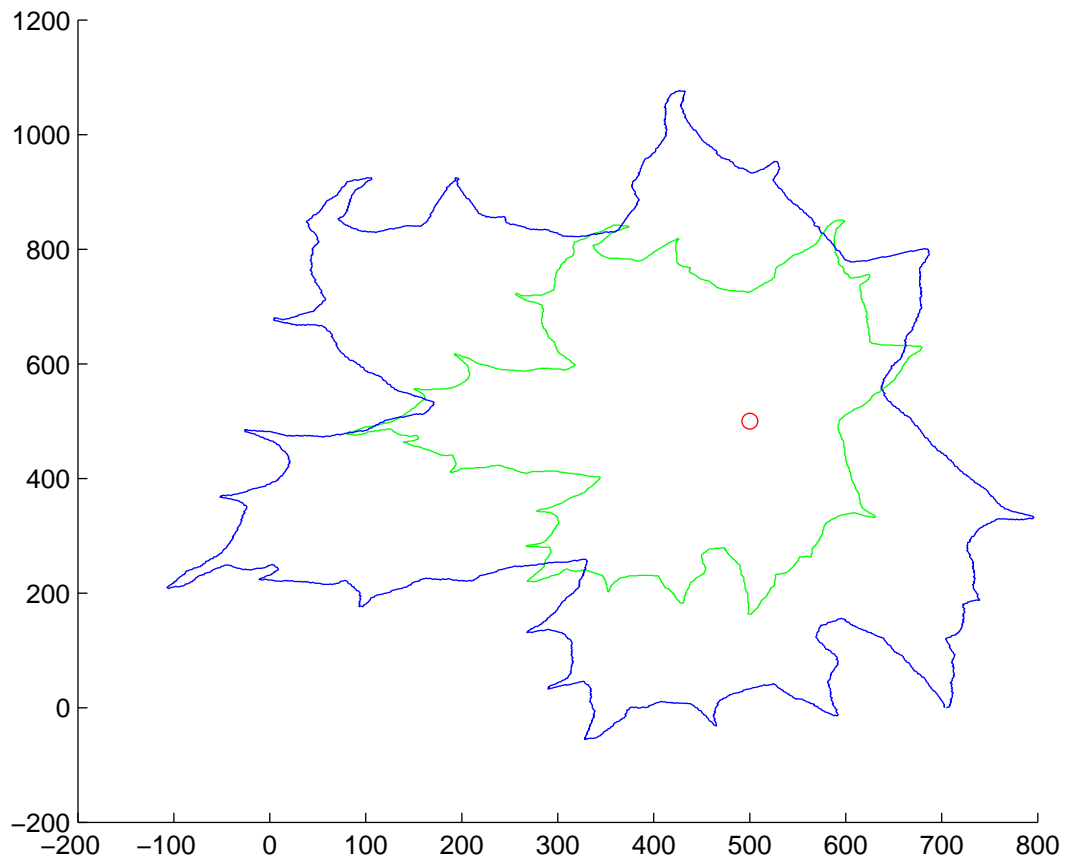
Souřadnice výsledného bodu \tilde{P} jsou tvaru:

$$\tilde{P} = [a_3f_4 - g_4d_3 + a_4f_3 + g_3d_4, a_3g_4 + f_4d_3 - f_3d_4 + a_4g_3]. \quad (131)$$

Zvětšení či zmenšení objektu získáme tím, že příslušné bodové souřadnice vynásobíme reálnou konstantou s . Algoritmus pro otočení, posunutí a zvětšení bodu najdeme v příloze A. Výstup algoritmu můžeme nalézt na Obr. 14. Funkce také dokáže vypočítat hodnotu zpětné transformace.



Obr. 13: Hyperbolický paraboloid v základní poloze (vlevo) a po transformaci (vpravo), popsané duálními kvaterniony.



Obr. 14: Původní javorový list (zelený) a po otočení o úhel $\frac{\pi}{8}$ okolo bodu $A = [500, 500]$ a zvětšený $s = 1,6$ (modrý).

7 Závěr

Předložená diplomová práce má část rešeršní, formulační a realizační. Jedním z přínosů by měl být mj. fakt, že se jedná o ucelený přehled studované problematiky. Za další přínos lze považovat i zachycení aplikačního potenciálu duálních kvaternionů. Prakticky byly metody ověřeny na problému, který je studován na katedře kybernetiky FAV ZČU. Vytvořené funkce byly zpracovány v programu Matlab.

V diplomové práci je zpracována problematika kvaternionů, duálních čísel a duálních kvaternionů. V první kapitole je zpracována historie komplexních čísel. Na ni navazuje historie kvaternionů a duálních kvaternionů. Následující kapitola 3 se zabývá algebrou kvaternionů. Důležitá je zejména schopnost kvaternionů vyjádřit rotace v $SO(3)$. Kapitola 4 se zabývá duálními čísly a jejich základními vlastnostmi. Nyní jsme schopni zavést algebru duálních kvaternionů a jejich souvislost s otočením a posunutím a tedy i grupu $SE(3)$, kterým je věnována kapitola 5. Nalezneme zde i příklady.

Duální kvaterniony dokáží popsat přímé shodnosti. Výhodou je jednoduchost reprezentace rotace a translace v jedné prostorové operaci tj. jejich složení. Využívají se například tam, kde není možné použít reprezentaci rotace a posunutí pomocí matic. Kapitola 6 se zabývá uplatněním této nevšední oblasti matematiky v praktických problémech. Můžeme je využít k popisu Maxwellových rovnic ve fyzice, kdy čtyři klasické rovnice vyjádříme pomocí jedné. Duální kvaterniony se těší veliké oblibě zejména v robotice. S jejich pomocí lze snadno řešit problém hand-eye kalibrace. Popisují vztah mezi suřadnicovými systémy úchopu robota a kamery, která je k úchopu připevněna. Robotický systém se používá například v lékařství. Poslední dobou nachází uplatnění v oblasti počítačové grafiky zvané skinning. Skinning se zabývá animací složitých objektů. Používáním matic dochází k deformacím a vzniká tzv. problém papíru od bonbonů. Proto je nezbytné použít alternativní algoritmus, např. Dual quaternion linear blending využívající duální kvaterniony, který výše zmíněným problémům předchází. Dále je můžeme použít ve strojírenství k popisu dráhy nože při obrábění. Dráhu popíšeme racionálními Bézierovými resp. NURBS duálními kvaternionovými křivkami.

V diplomové práci je nastíněna aplikace duálních kvaternionů pro jeden z projektů katedry kybernetiky na ZČU. Je jím segmentace ultrazvukových snímků. Technika, která z ultrazvukových snímků dokáže přesně oddělit požadovaný objekt od pozadí, má velký potenciál pro aplikaci v lékařství. Cílem je nalézt obecný tvarový model a sestavit kritérium obsahující míry deformací. Model porovnáваме s objektem, který chceme rozpoznat. Zjišťujeme jeho vektory deformace a hledáme parametry minimalizující kritérium. Parametry jsou otočení, poloha a deformace. Na část úlohy můžeme aplikovat duální kvaterniony. Jedná se o otočení, posunutí a zvětšení, resp. zmenšení objektu.

Na základě poznatků získaných v kapitole 5, je vytvořena funkce pro otočení bodu kolem libovolné osy o úhel φ a posunutí o vektor \mathbf{t} v trojrozměrném prostoru. Byla aplikována na kybernetická data. V tomto případě se funkce zjednoduší. Na základě požadavku bylo přidáno zvětšení, resp. zmenšení a transformace do zpětné pozice. Dále je vytvořena funkce pro otočení plochy, resp. křivky kolem libovolné osy o úhel θ a posunutí o vektor \mathbf{v} . Je zde využíván algoritmus pro otočení a posunutí bodu. Výsledné funkce a jejich výstupy jsou k nahlédnutí v příloze A.

Literatura

- [1] ANDRET, L. Automatická volumetrie patologických ložisek parenchymatosních orgánů v USG obraze. *Bakalářská práce*. Plzeň, 2008.
- [2] ARRIBAS, M., ELIPE, A., PALACIOS, M. *Quaternions and the rotation of a rigid body*. [online]. [cit. 2008-10-19]. Dostupný na WWW: <<http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2006/preprint15.pdf>>.
- [3] BEČVÁŘ, J. 150 let od objevu kvaternionů. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 1993, 38. ročník, 6. číslo, s. 305–317.
- [4] *Biquaternion*. [online]. [cit. 2009-03-04]. Dostupný na WWW: <<http://reference.findtarget.com/search/Biquaternion/>>.
- [5] CLIFFORD, W. K. *Proc. London Mathematic Society*. 1873.
- [6] CONWAY, J. H., SMITH, D. A. *On quaternions and octonions: theory, arithmetic and symmetry*. 1. vyd, USA : Springer, 2003.
- [7] CONRAD, K. *Isometries of \mathbb{R}^n* . [online]. [cit. 2006-03-10]. Dostupný na WWW:<<http://www.math.uconn.edu/~kconrad/math315/315isometryRn.pdf>>.
- [8] CORROCHANO, E. B., SOBCZYK, G. *Geometric Algebra*. ISBN-10: 0817641998, USA : Birkhäuser Boston, 2001.
- [9] CROWE, M. J. *History of vector analysis*. 1. vyd, USA : Dover Publications, 1994.
- [10] DANIILIDIS, K. Hand–Eye Calibration using dual quaternions. *The International Journal of Robotics Research*. 1999, 3 číslo, s. 286–298.
- [11] DAM, B. E., KOCH, M., LILLHOLM, M. Quaternions, Interpolation and animation. *Technical report*. 1998, 5. číslo, s. 9–23.
- [12] *Fact Archive - Quaternion*. [online]. [cit. 2009-02-08]. Dostupný na WWW: <<http://www.fact-archive.com/encyclopedia/Quaternion> >.
- [13] FENG, W. W., KIM, B. Y., YU, Y. Real-Time Data Driven Deformation Using Kernel Canonical Correlation Analysis. *ACM Transactions on Graphics*. 2008.
- [14] FISCHER, I. S. *Dual-Numbrs Methods in Kinematics, Statics and Dynamics*. CRC Press, 1999.
- [15] GALLIER, J. *Geometric methods and applications*. 1. vyd, USA : Springer, 2001.
- [16] HATHAWAY, S. *A Primer Of Quaternions.*, ISBN-10: 1933998644, USA : Merchant Books, 2007.

- [17] HOLIN, H. *The Quaternionic Exponential (and beyond)*. [online]. [cit. 2008-12-7]. Dostupný na WWW: <http://www.boost.org/doc/libs/1_37_0/libs/math/quadernion/TQE.pdf>.
- [18] HORA, J. O kvaternionech. *Rozhledy matematiky-fyziky*. 1995, 72. ročník, s. 8–9.
- [19] *Hospimed -Robotický systém*. [online]. [cit. 2009-04-19]. Dostupný na WWW: <<http://www.inovace.cz/for-high-tech/inovace-v-oborech/clanek/roboticky-system-da-vinci/>>.
- [20] HURWITZ, A. Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*. 1898. s. 309–316.
- [21] *Chasles's Theorem*. [online]. [cit. 2008-11-17]. Dostupný na WWW: <<http://scienceworld.wolfram.com/physics/CharlessTheorem.html>>.
- [22] *IRP* [online]. [cit. 2009-04-19]. Dostupný na WWW: <www.rob.cs.tu-bs.de>.
- [23] KAVAN, L., COLLINS, S., ŽÁRA, J., O'SULLIVAN, C. Skinning with Dual Quaternions. *ACM Transaction on Graphics.*, 2008, 27(4).
- [24] KAVAN, L., COLLINS, S., O'SULLIVAN, C., ZARA, J. *Geometric Skinning with Approximate Dual Quaternion Blending*. [online]. [cit. 2008-10-19]. Dostupný na WWW: <<http://isg.cs.tcd.ie/kavanl/papers/sdq-tog08.pdf>>.
- [25] KAVAN, L., ZARA, J. *Spherical Blend Skinning: A Real-time Deformation of Articulated Models* [online]. [cit. 2007-12-3]. Dostupný na WWW: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1053429>>.
- [26] KOTELNIKOV, A. P. *Screw calculus and some of its applications to geometry and mechanics.*, 1895.
- [27] KRYSTL, F. KAnimace Humanoida metodou Vertex Blending. *Bakalářská práce*. Praha, 2007.
- [28] KUKAL, J. *Muž, který zde nebyl na procházce*. [online]. [cit. 2009-03-24]. Dostupný na WWW: <<http://www.automatizace.cz/article.php?a=2226>>.
- [29] LAWRENCE, M. J. *Four-dimensional geometry and visualization*. [online]. [cit. 2006-03-22]. Dostupný na WWW: <<http://www.gang.umass.edu/lawrence/downloads/four-1.0.2.pdf>>.
- [30] LIU, Q., PRAKASH, E. C. *The Parameterization of Joint Rotation with the Unit Quaternion*. [online]. [cit. 2008-12-7]. Dostupný na WWW: <<http://www.cmis.csiro.au/Hugues.Talbot/dicta2003/cdrom/pdf/0409.pdf>>.
- [31] ODEHNAL, B., STACHEL, H. *The upper talocalceaneal*. [online]. [cit. 2008-11-19]. Dostupný na WWW: <<http://www.geometrie.tuwien.ac.at/odehnal/knochen.pdf>>.

- [32] PEREZ, M. A. *Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems*. University of California, 2003.
- [33] PROŠKOVÁ, J. Kvaterniony a jejich užití v geometrii. *Bakalářská práce*. Plzeň, 2006.
- [34] PURWAR, A., QIAODE, G. J. *On the Effect of Dual Weights in Computer Aided Design of Rational Motions*. State University of New York, Transactions of the ASME, čl. 127, 2005.
- [35] RONEY, J. *William Kingdon Clifford*. [online]. [cit. 2009-03-04]. Dostupný na WWW: <[http://oro.open.ac.uk/8455/1/chapter4\(020507\).pdf](http://oro.open.ac.uk/8455/1/chapter4(020507).pdf)>.
- [36] SARKKA, S. *Notes on Quaternions*. [online]. [cit. 2008-10-19]. Dostupný na WWW: <<http://www.lce.hut.fi/ssarkka/pub/quat.pdf>>.
- [37] ŠEBOR, P. Skeletální animace. *Bakalářská práce*. Praha, 2006.
- [38] SHIU, Y., AHMAD, S. *Calibration of wrist-mounted robotic sensors by solving homogeneous transform equations of the form $AX = XB$* . IEEE Trans. Robot. Automat. 5:16–27, 1989.
- [39] STACHEL, H. *On spatial Involute Gearing*. Hungary, 2004.
- [40] STILLWELL, J. *Geometry of surfaces*. 1. vyd, USA : Springer, 1995.
- [41] SÜLEYMAN, D., KUDRET, Ö. *Dual quaternionic reformulation of electormagnetism*. Turkey, 2003.
- [42] TOTH, G. *Glimpes of algebra and geometry*. 1. vyd, USA : Springer, 2002.
- [43] WEISSTEIN, E. W. *MathWorld—Euler’s Rotation Theorem*. [online]. [cit. 2006-04-25]. Dostupný na WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/EulersRotationTheorem.html>>.
- [44] *Wikipedia - Quaternion*. [online]. [cit. 2006-03-20]. Dostupný na WWW: <<http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>>.
- [45] *Wikipedia - Lékařská ultrasonografie*. [online]. [cit. 2009-05-02]. Dostupný na WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Lékařská_ultrasonografie>.
- [46] XIE, J, JIANG, Y., TSUI, H. T. *Segmentation of Kidney From Ultrasound Images Based on Texture and Shape Priors*. Transactions on medical imaging, čl. 24, 2005.
- [47] YANG, A. T., FREUNDSTEIN, F. *Aplictation of dual number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms*. 1964.
- [48] ZHANG, W., ZHANG, Y. F., GE, Q. J. *Five-axis Tool Path Generation for Sculptured Surface Machining using Rational Bézier Motions of a Flat-end Cutter*. [online]. [cit. 2009-04-16]. Dostupný na WWW: <http://www.cadanda.com/V1Nos1to4_29.pdf>.

- [49] ŽÁRA, J., BENEŠ, B., SOCHOR, J., FELKEL, P. *Moderní počítačová grafika*. 2. vyd, Computer Press, 2005.

A Algoritmy pro výpočet otočení a posunutí ploch, křivek a bodů duálními kvaterniony

Funkce pro otočení a posunutí bodu okolo dané přímky v trojrozměrném prostoru duálními kvaterniony

```
% Autor : Jitka Proskova
% Funkce pro vypocet otoceni a posunuti bodu okolo dane primky
% v trojrozmernem prostoru pomoci dualnich kvaternionu
%
% out = kvater (uhel_otoceni, bod1, bod2, posunuti, vstup)
%
% vstup: uhel_otoceni (uhel otoceni bodu okolo osy otoceni)
%       bod1: [A1, A2, A3] (zadani 1. bodu osy otaceni)
%       bod2: [B1, B2, B3] (zadani 2. bodu osy otaceni)
%       posunuti: [C1, C2, C3] (posunuti v prostoru o nejaky vektor)
%       vstup: [f0, g0, h0] (souradnie bodu)
%
% otoceni a posun v prostoru
% priklad: kvater(pi/2,[1 1 0],[1 0 2],[1 0 1],[2 2 -2])

function [out] = kvater(uhel_otoceni, bod1, bod2, posunuti, vstup)
    f0 = vstup(:,1);
    g0 = vstup(:,2);
    h0 = vstup(:,3);

    A1 = bod1(:,1); % body urcujici osu otoceni
    A2 = bod1(:,2);
    A3 = bod1(:,3);

    B1 = bod2(:,1);
    B2 = bod2(:,2);
    B3 = bod2(:,3);

    s1 = B1-A1; % smerovy vektor osy otoceni
    s2 = B2-A2;
    s3 = B3-A3;
    S = sqrt(s1^2 + s2^2 + s3^2);
    n_x = s1/S; % normovani smeroveho vektoru
    n_y = s2/S;
    n_z = s3/S;
```

```

f2 = f0 - A1; % posunuti primky do pocatku
g2 = g0 - A2;
h2 = h0 - A3;
theta = uhel_otoceni/2;

a9 = 0; % posunuti - souradnice pro t = [a9 b9 c9 d9] + posunuti zpocatku
b9 = posunuti(:,1) + A1;
c9 = posunuti(:,2) + A2;
d9 = posunuti(:,3) + A3;

a1 = cos(theta); % rotacni cast DK Q1 = [a1, b1, c1, d1, e1, f1, g1, h1]
b1 = n_x * sin(theta);
c1 = n_y * sin(theta);
d1 = n_z * sin(theta);

e1 = (a9*a1 - b9*b1 - c9*c1 - d9*d1)/2; %translacni cast DK Q1
f1 = (a9*b1 + a1*b9 + c9*d1 - c1*d9)/2;
g1 = (a9*c1 - b9*d1 + a1*c9 + b1*d9)/2;
h1 = (a9*d1 + b9*c1 - b1*c9 + a1*d9)/2;

% zadani vstupniho bodu v DK Q2 - slozky ktere jsou pevne dane
% Q2 = [a2 b2 c2 d2 e2 f2 g2 h2] - [1 0 0 0 0 f2 g2 h2]
a2 = 1;
b2 = 0;
c2 = 0;
d2 = 0;
e2 = 0;

% zadani DK Q4 konjugovaneho k DK Q1
% Q4 = [a4, b4, c4, d4, e4, f4, g4, h4] - [a1 -b1 -c1 -d1 -e1 f1 g1 h1]
a4 = a1;
b4 = -b1;
c4 = -c1;
d4 = -d1;
e4 = -e1;
f4 = f1;
g4 = g1;
h4 = h1;

% Q5 = Q1*Q2*Q4 - otoceni a posunuti (stred otoceni + posunuti)
% 1. nasobeni Q3 = Q1*Q2
a3 = a1*a2 - b1*b2 - c1*c2 - d1*d2;

```

```

b3 = a1*b2 + a2*b1 + c1*d2 - c2*d1;
c3 = a1*c2 - b1*d2 + a2*c1 + b2*d1;
d3 = a1*d2 + b1*c2 - b2*c1 + a2*d1;
e3 = a1*e2 - b1*f2 - c1*g2 - d1*h2 + e1*a2 - f1*b2 - g1*c2 - h1*d2;
f3 = a1*f2 + e2*b1 + c1*h2 - g2*d1 + e1*b2 + a2*f1 + g1*d2 - c2*h1;
g3 = a1*g2 - b1*h2 + e2*c1 + f2*d1 + e1*c2 - f1*d2 + a2*g1 + b2*h1;
h3 = a1*h2 + b1*g2 - f2*c1 + e2*d1 + e1*d2 + f1*c2 - b2*g1 + a2*h1;

% 2. nasobeni Q5 = Q3*Q4
f5 = a3*f4 + e4*b3 + c3*h4 - g4*d3 + e3*b4 + a4*f3 + g3*d4 - c4*h3;
g5 = a3*g4 - b3*h4 + e4*c3 + f4*d3 + e3*c4 - f3*d4 + a4*g3 + b4*h3;
h5 = a3*h4 + b3*g4 - f4*c3 + e4*d3 + e3*d4 + f3*c4 - b4*g3 + a4*h3;

f5 = roundn(f5, -5); % zaokrouhleni
g5 = roundn(g5, -5);
h5 = roundn(h5, -5);

out = [f5, g5, h5]; % vystupni bod po otoceni a posunutí
end

```

Funkce pro otočení, posunutí a zvětšení bodu v rovině duálními kvaterniony

```
% Autor : Jitka Proskova
% Funkce transformuje body, provadi rotaci, transalci a zvetsneni resp.
% zmenseni
%
% pt_out = kvater1(pt_in,T,C,inv)
%
% vstup:  vstup: vstupni body
%         T: [s,uhel_otocnei,Tx,Ty]
%         C: stred otaceni [C1 C2]
%         inv:
% pokud je zadán ctvrty parametr (jakykoliv) je provedena inverzni operace
% s: zvetseni resp. zmeseni
% uhel_otoceni: uhel otoceni kolem osy z
% Tx, Ty: vektor posunuti

function [pt_out] = kvater1(vstup,T,C,varargin)
% klasicke otoceni, posunuti a zvetseni
if nargin == 3
    f = vstup(:,1); % f, g souradnice vstupniho bodu
    g = vstup(:,2);
    s = T(:,1); % zvetseni
    uhel_otoceni = T(:,2); % uhel otoceni
    s1 = C(:,1); % s1, s2 souradnice stredu otoceni
    s2 = C(:,2);
    % zvetseni a posunuti zadaneho bodu bodu otaceni do pocatku souradnic
    f2 = s*f - s*s1;
    g2 = s*g - s*s2;
    % posunuti - souradnice pro t = [a9 b9 c9 d9] + posunuti zpocatku
    a9 = 0;
    b9 = T(:,3) + s1; % bod posunuti
    c9 = T(:,4) + s2;
    d9 = 0;
    theta = uhel_otoceni/2; % uhel otoceni

    % rotacni cast DK Q1 = [a1, b1, c1, d1, e1, f1, g1, h1] upravene pro 2D
    % rotace pouze podle osy z
    a1 = cos(theta);
    b1 = 0;
    c1 = 0;
    d1 = sin(theta);
```

```

% translacni cast DK Q1
e1 = (a9*a1 - b9*b1 - c9*c1 - d9*d1)/2;
f1 = (a9*b1 + a1*b9 + c9*d1 - c1*d9)/2;
g1 = (a9*c1 - b9*d1 + a1*c9 + b1*d9)/2;
h1 = (a9*d1 + b9*c1 - b1*c9 + a1*d9)/2;

% zadani vstupniho bodu v DK Q2 - slozky ktere jsou pevne dane
% Q2 = [a2 b2 c2 d2 e2 f2 g2 h2] - [1 0 0 0 0 f2 g2 0]
a2 = 1;
b2 = 0;
c2 = 0;
d2 = 0;
e2 = 0;
h2 = 0;

% zadani DK Q4 konjugovaneho k DK Q1
% Q4 = [a4, b4, c4, d4, e4, f4, g4, h4] - [a1 -b1 -c1 -d1 -e1 f1 g1 h1]
a4 = a1;
b4 = -b1;
c4 = -c1;
d4 = -d1;
e4 = -e1;
f4 = f1;
g4 = g1;
h4 = h1;

% Q5 = Q1*Q2*Q4 - otoceni a posunuti {stred otoceni + posunuti}
% 1. nasobeni Q3 = Q1*Q2
a3 = a1*a2 - b1*b2 - c1*c2 - d1*d2;
b3 = a1*b2 + a2*b1 + c1*d2 - c2*d1;
c3 = a1*c2 - b1*d2 + a2*c1 + b2*d1;
d3 = a1*d2 + b1*c2 - b2*c1 + a2*d1;
e3 = a1*e2 - b1*f2 - c1*g2 - d1*h2 + e1*a2 - f1*b2 - g1*c2 - h1*d2;
f3 = a1*f2 + e2*b1 + c1*h2 - g2*d1 + e1*b2 + a2*f1 + g1*d2 - c2*h1;
g3 = a1*g2 - b1*h2 + e2*c1 + f2*d1 + e1*c2 - f1*d2 + a2*g1 + b2*h1;
h3 = a1*h2 + b1*g2 - f2*c1 + e2*d1 + e1*d2 + f1*c2 - b2*g1 + a2*h1;

% otoceny a posunuty bod
f5 = a3*f4 + e4*b3 + c3*h4 - g4*d3 + e3*b4 + a4*f3 + g3*d4 - c4*h3;
g5 = a3*g4 - b3*h4 + e4*c3 + f4*d3 + e3*c4 - f3*d4 + a4*g3 + b4*h3;
end

```

```

% inverzni postup
if nargin == 4
    f = vstup(:,1); % f, g souradnice vstupniho bodu
    g = vstup(:,2);
    s = T(:,1); % zvetseni
    uhel_otoceni = - T(:,2); % zpetny uhel otoceni
    s1 = C(:,1); % s1, s2 souradnice stredu otoceni
    s2 = C(:,2);
    % posunuti zadaneho bodu otaceni do pocatku souradnic
    f2 = f - T(:,3) - s1;
    g2 = g - T(:,4) - s2;
    % posunuti
    a9 = 0;
    b9 = s*s1;
    c9 = s*s2;
    d9 = 0;
    theta = uhel_otoceni/2; % uhel otoceni

    % rotacni cast DK Q1 = [a1, b1, c1, d1, e1, f1, g1, h1] upravene pro 2D
    % rotace pouze podle osy z
    a1 = cos(theta);
    b1 = 0;
    c1 = 0;
    d1 = sin(theta);

    % translacni cast DK Q1
    e1 = (a9*a1 - b9*b1 - c9*c1 - d9*d1)/2;
    f1 = (a9*b1 + a1*b9 + c9*d1 - c1*d9)/2;
    g1 = (a9*c1 - b9*d1 + a1*c9 + b1*d9)/2;
    h1 = (a9*d1 + b9*c1 - b1*c9 + a1*d9)/2;

    % zadani vstupniho bodu v DK Q2 - slozky ktere jsou pevne dane
    % Q2 = [a2 b2 c2 d2 e2 f2 g2 h2] - [1 0 0 0 0 f2 g2 0]
    a2 = 1;
    b2 = 0;
    c2 = 0;
    d2 = 0;
    e2 = 0;
    h2 = 0;

    % zadani DK Q4 konjugovaneho k DK Q1
    % Q4 = [a4, b4, c4, d4, e4, f4, g4, h4] - [a1 -b1 -c1 -d1 -e1 f1 g1 h1]
    a4 = a1;

```



```

b4 = -b1;
c4 = -c1;
d4 = -d1;
e4 = -e1;
f4 = f1;
g4 = g1;
h4 = h1;

% Q5 = Q1*Q2*Q4 - otoceni a posunuti {stred otoceni + posunuti}
% nasobeni Q3 = Q1*Q2
a3 = a1*a2 - b1*b2 - c1*c2 - d1*d2;
b3 = a1*b2 + a2*b1 + c1*d2 - c2*d1;
c3 = a1*c2 - b1*d2 + a2*c1 + b2*d1;
d3 = a1*d2 + b1*c2 - b2*c1 + a2*d1;
e3 = a1*e2 - b1*f2 - c1*g2 - d1*h2 + e1*a2 - f1*b2 - g1*c2 - h1*d2;
f3 = a1*f2 + e2*b1 + c1*h2 - g2*d1 + e1*b2 + a2*f1 + g1*d2 - c2*h1;
g3 = a1*g2 - b1*h2 + e2*c1 + f2*d1 + e1*c2 - f1*d2 + a2*g1 + b2*h1;
h3 = a1*h2 + b1*g2 - f2*c1 + e2*d1 + e1*d2 + f1*c2 - b2*g1 + a2*h1;

% otoceny a posunuty bod
f5 = a3*f4 + e4*b3 + c3*h4 - g4*d3 + e3*b4 + a4*f3 + g3*d4 - c4*h3;
g5 = a3*g4 - b3*h4 + e4*c3 + f4*d3 + e3*c4 - f3*d4 + a4*g3 + b4*h3;
s = (1/T(:,1)); % zvetseni
f5 = f5*s;
g5 = g5*s;
end
pt_out = [f5, g5]; % vystupni bod
end

```

Funkce pro otočení a posunutí plochy resp. křivky okolo dané přímky v trojrozměrném prostoru duálními kvaterniony

Tato funkce využívá funkce kvater, pro otočení a posunutí bodu.

```
% Autor : Jitka Proskova
% Funkce pro vypocet otoceni a posunuti plochy
% okolo dane primky pomoci dualnich kvaternionu
%
% [out] = transformace(pokX, pokY, pokZ, uhel_otoceni, bod1,
%                     bod2, posunuti)
%
% vstup: pokX: parametricke vyjadreni x
%        pokY: parametricke vyjadreni y
%        pokZ: parametricke vyjadreni z
%        uhel: beta (uhel otoceni)
%        bod1: [A1, A2, A3] (zadani 1. bodu osy otaceni)
%        bod2: [B1, B2, B3] (zadani 2. bodu osy otaceni)
%        posunuti: [C1, C2, C3] (posunuti v prostoru o nejaky vektor)
% zadani parametru: T1, T2

% otoceni a posun krivky nebo plochy v prostoru
% priklad: (T1, T2, T1^2 -T2^2, pi/3, [0 10 0], [0 0 0], [20 0 0])

function [out] = transformace(pokX, pokY, pokZ, uhel_otoceni, bod1,
bod2, posunuti)

syms T1; % deklarace symbolicke promene
syms T2;

krok = 0.1;
t1 = -pi-krok:krok:pi+krok;
t2 = -pi-krok:krok:pi+krok;

[A1, A2] = meshgrid(t1,t2);

% zamena symb. promenne za hodnoty v rci X
if max(size(findsym(pokX))) > 2
X = subs(pokX,{T1,T2},{A1,A2});
else
if findsym(pokX) == 'T1'
X = subs(pokX,{T1},{A1});
```

```

    else
        X = subs(pokX,{T2},{A2});
    end
end

% zamena symb. promenne za hodnoty v rci Y
if max(size(findsym(pokY))) > 2
Y = subs(pokY,{T1,T2},{A1,A2});
else
    if findsym(pokY) == 'T1'
        Y = subs(pokY,{T1},{A1});
    else
        Y = subs(pokY,{T2},{A2});
    end
end

% zamena symb. promenne za hodnoty v rci Z
if max(size(findsym(pokZ))) > 2
Z = subs(pokZ,{T1,T2},{A1,A2});
else
    if findsym(pokZ) == 'T1'
        Z = subs(pokZ,{T1},{A1});
    else
        Z = subs(pokZ,{T2},{A2});
    end
end

F1 = 0;% pomocne promene pro for
F2 = 0;

Xnew = zeros(size(X)); % inicializace novych matic
Ynew = zeros(size(Y));
Znew = zeros(size(Z));

for F1 = 1:1:size(X) % radky
    for F2 = 1:1:size(Y) % sloupce
        newBod = 0;
        newBod = kvater(uhel_otoceni, bod1, bod2, posunuti,
            [X(F1,F2) Y(F1,F2) Z(F1,F2)]);

        Xnew(F1,F2) = newBod(1);
    end
end

```

```

        Ynew(F1,F2) = newBod(2);
        Znew(F1,F2) = newBod(3);
    end
end

surf(X,Y,Z); % vykresleni zadane plochy
hold on
surf(Xnew,Ynew,Znew); % vykresleni otocene a posunute plochy
% upraveni os pri vykreslovani
osX = [min(min(min(X)),min(min(Xnew))) max(max(max(X)),max(max(Xnew)))];
osY = [min(min(min(Y)),min(min(Ynew))) max(max(max(Y)),max(max(Ynew)))];
osZ = [min(min(min(Z)),min(min(Znew))) max(max(max(Z)),max(max(Znew)))];
axis([osX osY osZ]);
end

```

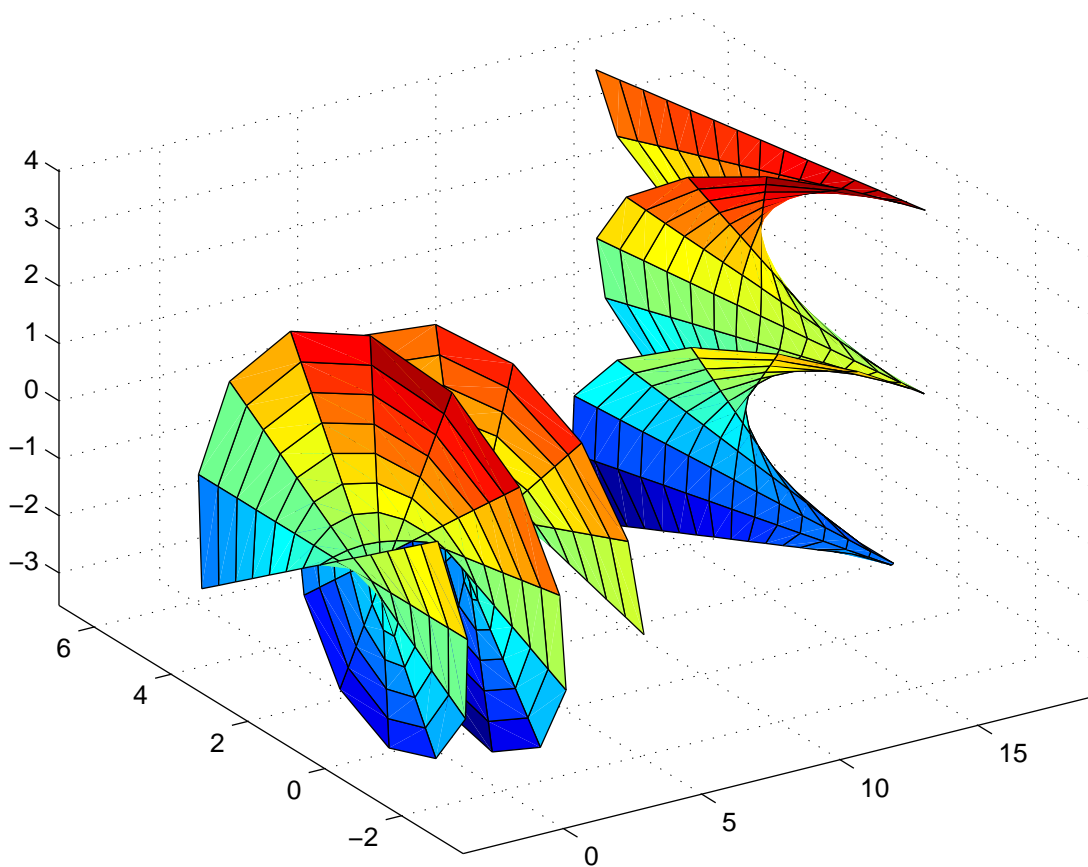
Příklad A.1 Transformace *helikoidu*—Obr. 15.

Parametrické zadání: $P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cos \mathbf{v}, \mathbf{u} \sin \mathbf{v}, \mathbf{v})$.

Body osy otočení: $A = [0, 10, 0]$, $B = [1, 2, 3]$.

Úhel otočení: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Vektor posunutí: $\mathbf{t} = [12, 2, 0]$.



Obr. 15: Helikoid v základní poloze (vlevo) a po transformaci(vpravo), popsané duálními kvaterniony.

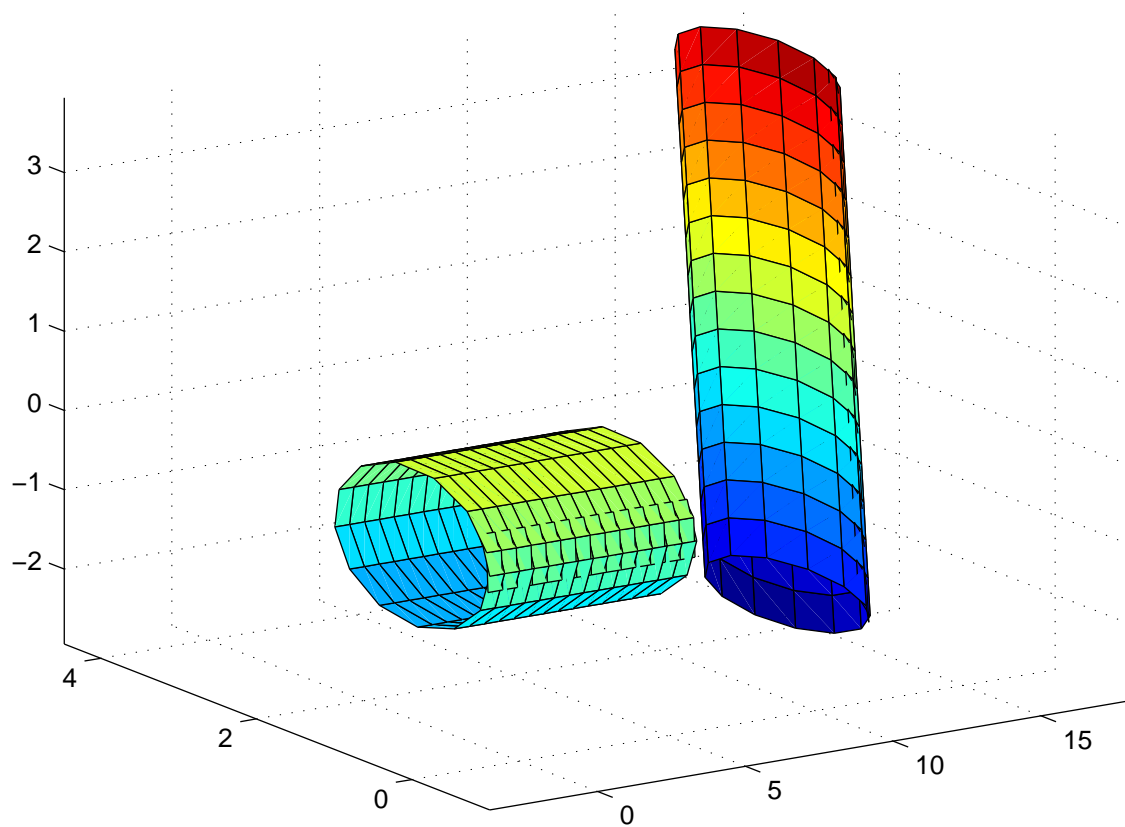
Příklad A.2 Transformace válce—Obr. 16.

Parametrické zadání: $P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\cos \mathbf{u}, \sin \mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Body osy otočení: $A = [0, 10, 0]$, $B = [1, 2, 3]$.

Úhel otočení: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Vektor posunutí: $\mathbf{t} = [12, 2, 0]$.



Obr. 16: Válcová plocha v základní poloze (vlevo) a po transformaci (vpravo), popsané duálními kvaterniony.

B Obsah přiloženého CD

K této práci je přiloženo CD, které obsahuje

- Zdrojové texty programu.
- Text práce ve formátu PDF.