

# Projektivní zobrazení a jejich aplikace

Zbyněk Šír

MÚ MFF UK

# Projektivní zobrazení = kolineace = homografie

Je zobrazení indukované lineárním zobrazením na vektorových prostorech. Tedy

$$H : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$$

je projektivní zobrazení právě tehdy, když existuje lineární zobrazení  $L$  takové, že pro všechny vektory platí

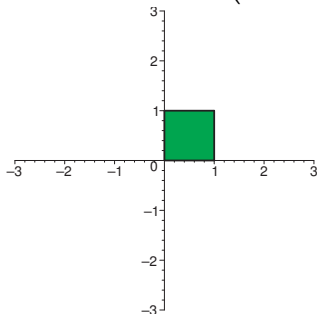
$$H(\langle \vec{v} \rangle) = \langle L(\vec{v}) \rangle.$$

Projektivní zobrazení je pak dáno násobením  $(x_0, x_1, x_2)$  libovolnou regulární maticí. V obvyklých souřadnicích se jedná o lomená lineární zobrazení:

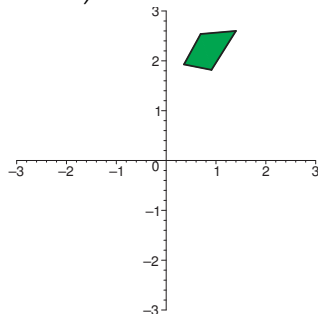
$$\begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1,1}x + h_{1,2}y + h_{1,3} \\ h_{2,1}x + h_{2,2}y + h_{2,3} \\ h_{3,1}x + h_{3,2}y + h_{3,3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{h_{1,1}x + h_{1,2}y + h_{1,3}}{h_{3,1}x + h_{3,2}y + h_{3,3}} \\ \frac{h_{2,1}x + h_{2,2}y + h_{2,3}}{h_{3,1}x + h_{3,2}y + h_{3,3}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Příklad

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 2 \\ -0.1 & 0.3 & 1.1 \end{pmatrix}$$



→



# Projekce jsou projektivními zobrazeními.

V  $\mathbb{R}^3$  definujeme dvě roviny  $\pi : y = 0$  a  $\rho : x = 0$ . Napište analytické vyjádření projekce se středem  $[-1, 1, 0]$  z roviny  $\pi$  do roviny  $\rho$ . Uvědomte si, že se jedná o lineární lomené zobrazení. Dále ztotožňeme souřadnici  $x$  roviny  $\pi$  se souřadnicí  $y$  roviny  $\rho$  (geometricky se jedná o sklopení) a popište zmíněnou projekci jako projektivní zobrazení z roviny do roviny. Napište jeho matici.

Pomocí jednoduché prostorové geometrie zjistíme, že projekce z  $\pi$  do  $\rho$  má vyjádření

$$[x, 0, z] \rightarrow \left[ 0, \frac{x}{x+1}, \frac{z}{x+1} \right],$$

po ztotožnění obou rovin můžeme toto zobrazení chápat jako zobrazení z roviny do sebe s vyjádřením

$$[u, v] \rightarrow \left[ \frac{u}{u+1}, \frac{v}{u+1} \right],$$

kterému odpovídá projektivní matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spočtěte matici projektivního zobrazení  $H : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  tak, aby:

$$H(2, 0, 1) = (1, 3, -2)$$

$$H(1, 1, 2) = (1, -4, 1)$$

$$H(1, 2, 3) = (-2, 6, -1)$$

$$H(1, 0, 0) = (2, 2, -2)$$

a spočtěte obraz bodu  $(1, 1, 1)$  a vzor bodu  $(1, 2, 3)$ .

Nechť  $A, B, C, D$  jsou čtyři navzájem různé body, které leží na projektivní přímce a pro jejich vektorové zástupce platí

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} \\ \vec{d} &= \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}.\end{aligned}$$

Pak číslo

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}$$

nazveme *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů  $A, B, C, D$ .

**Věta** Dvojpoměr je dobře definován (nezávisí na výběru vektorových reprezentantů) a jedná se o projektivní invariant, tedy pro libovolné projektivní zobrazení  $H$  platí

$$(A, B, C, D) = (H(A), H(B), H(C), H(D)).$$

# Afinní zobrazení mezi projektivními

- Která projektivní zobrazení zachovávají konečné body v konečnu?
- Pro každé  $x, y$  máme

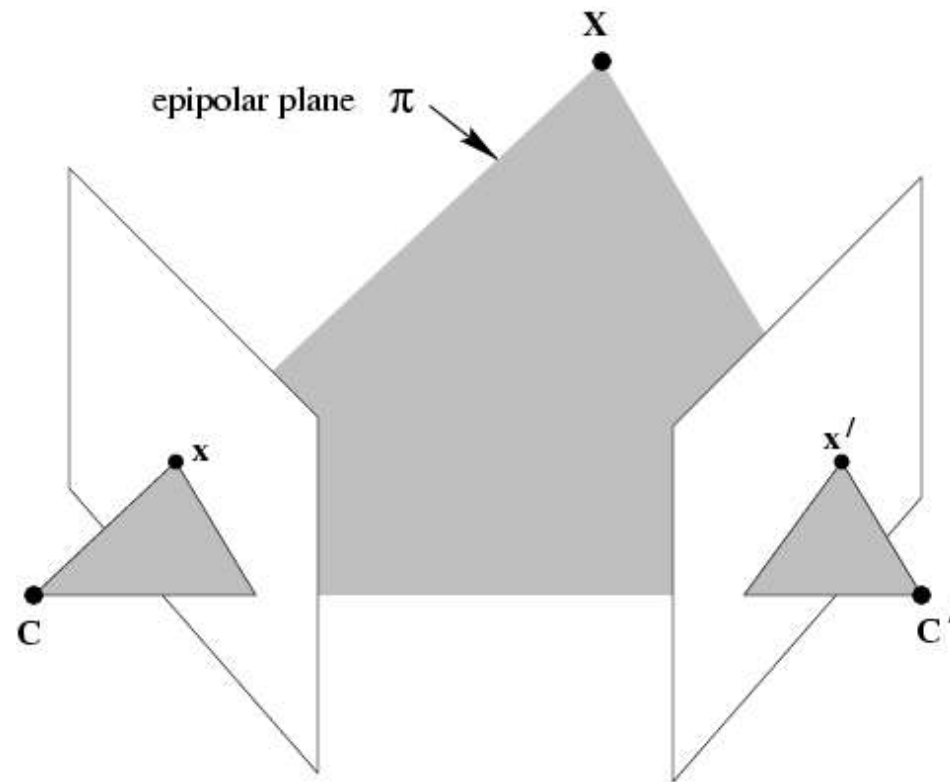
$$\begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Tedy  $h_{3,1} = h_{3,2} = 0$  a můžeme i klást  $h_{3,3} = 1$ . Tím dostáváme *afinní zobrazení*. Pokud je navíc matice

$$\begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} \\ h_{2,1} & h_{2,2} \end{pmatrix}$$

ortonormální, tak se jedná o *shodné* zobrazení.

# Vícesnímková geometrie



# Materialy

Kniha:

Multiple View Geometry in Computer Vision  
by Richard Hartley and Andrew Zisserman  
Cambridge University Press

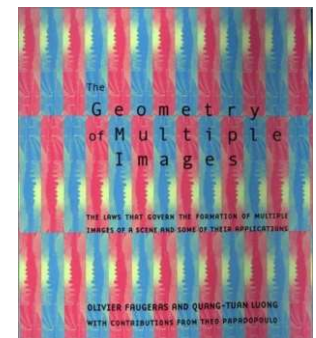
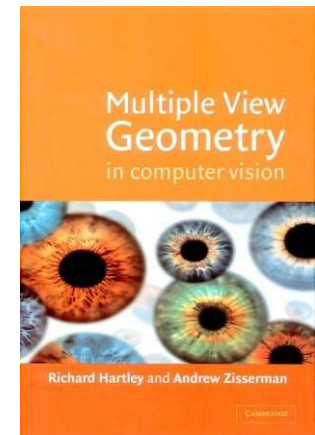
Kniha:

The Geometry from Multiple Images  
by Olivier Faugeras and Quan-Tuan Luong  
MIT Press

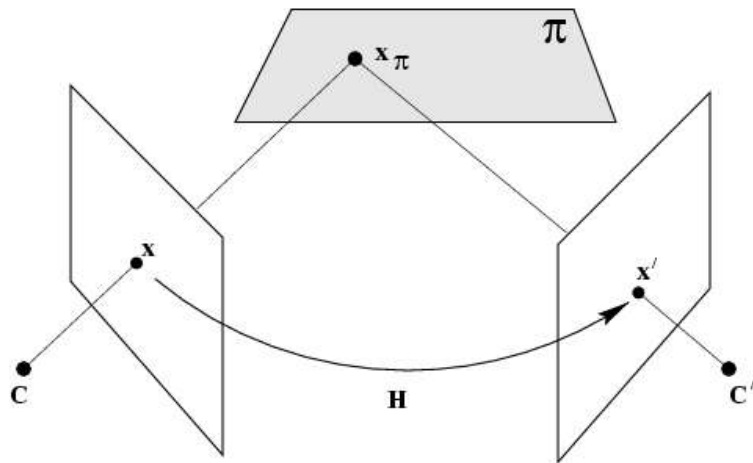
On-line:

<http://www.cs.unc.edu/~marc/tutorial.pdf>

<http://www.cs.unc.edu/~marc/tutorial/>



# Korespondence mezi dvěma fotografiemi

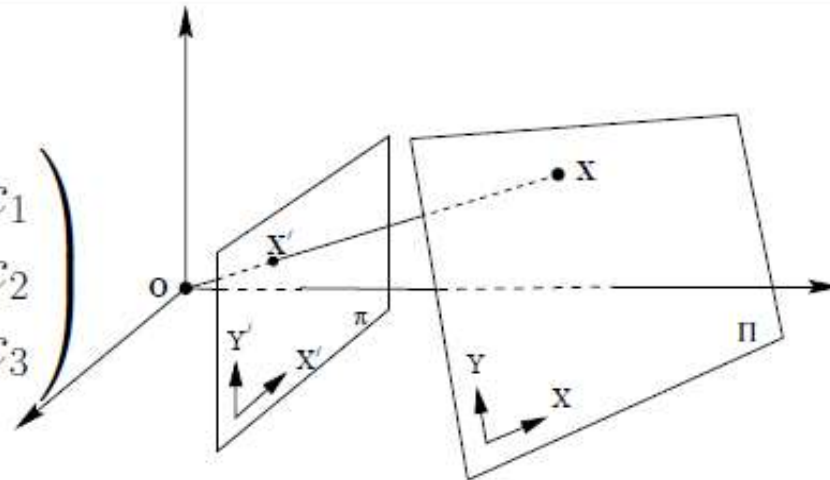


- Obecně se jedná o složitou nelineární transformaci
- Pouze dva případy vedou na projektivní transformaci: společný střed projekce, nebo rovinný objekt



V tomto kontextu se projektivní zobrazení  
nazývá homografie

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



or  $\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x}$ , where  $\mathbf{H}$  is a  $3 \times 3$  non-singular homogeneous matrix.

Je zvykem za homogenizující souřadnici brát tu poslední  
( $x_3=1$ )

# Výpočet matice homografie

Na obou snímcích máme dány odpovídající body  $[x, y] \leftrightarrow [x', y']$  a hledáme matici  $H$  tak, aby  $H(x, y, 1)^T = k(x', y', 1)^T$ .

Ekvivalentně lineární závislost vyjádříme vektorovým součinem

$$H(x, y, 1)^T \times (x', y', 1)^T = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -xy' & -yy' & -y' \\ -x & -y & -1 & 0 & 0 & 0 & xx' & x'y & x' \\ xy' & yy' & y' & -xx' & -x'y & -x' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Třetí rovnice je lineární kombinací prvních dvou.

# Výpočet matice homografie

Na obou snímcích máme dány odpovídající body

$$[x_i, y_i] \leftrightarrow [x'_i, y'_i]$$

a hledáme matici  $H$  tak, aby

$$H (x_i, y_i, 1)^T = k_i (x'_i, y'_i, 1)^T.$$

Za každý bod tedy dvě rovnice.

$$\begin{bmatrix} -x_1 & -y_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & -y_1 & -1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & -y_n & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n \\ 0 & 0 & 0 & -x_n & -y_n & -1 & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Řeší se přesně nebo přibližně pomocí SVD

# Singular Value Decomposition

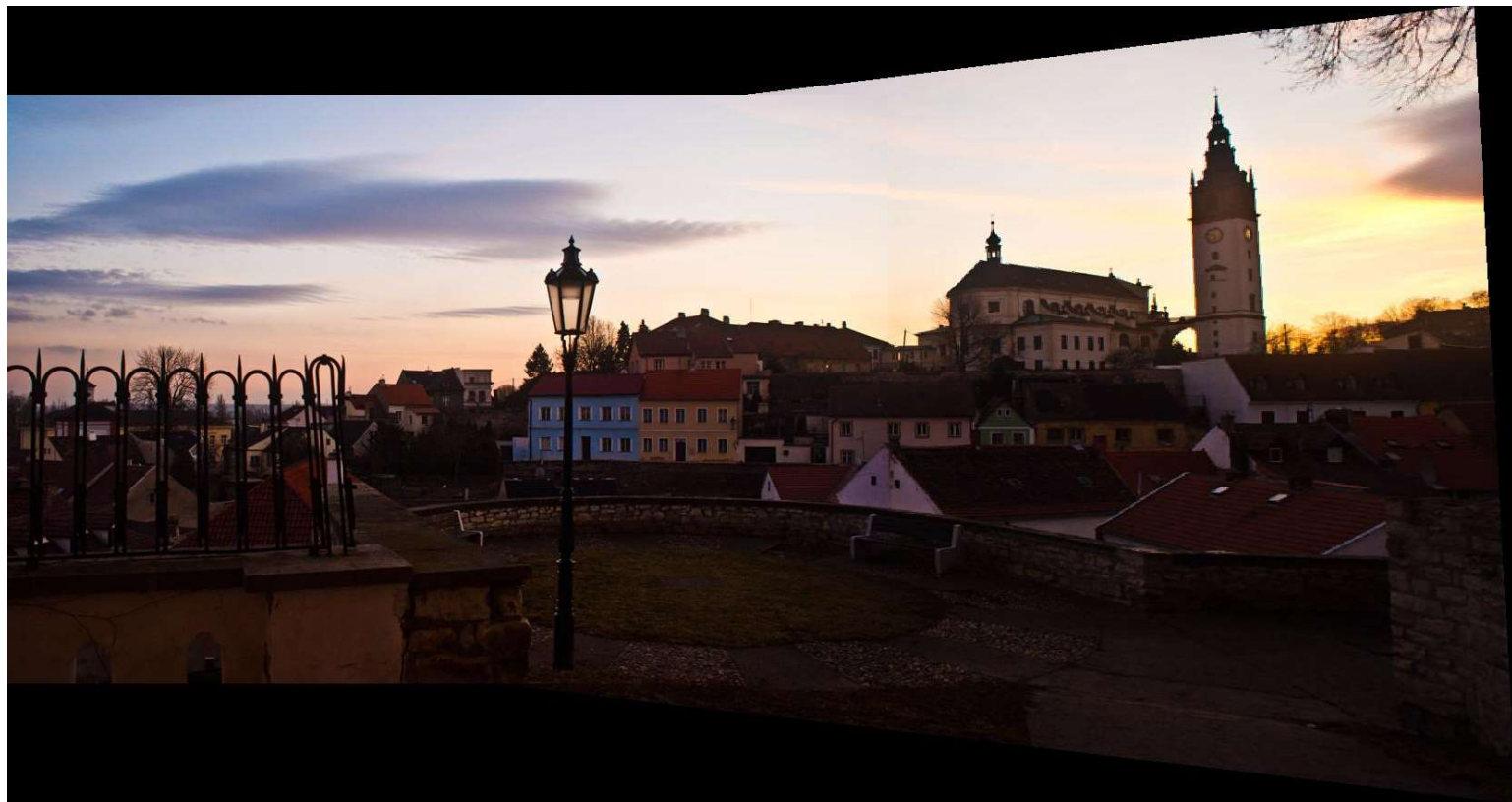
$A =$  (orthonormální) (diagonalní) (orthonormální)

$$A = U \Sigma V^T$$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix} & V^T \end{bmatrix}$$

Sloupec  $V$  odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu  
je řešením rovnice  $AX = 0$

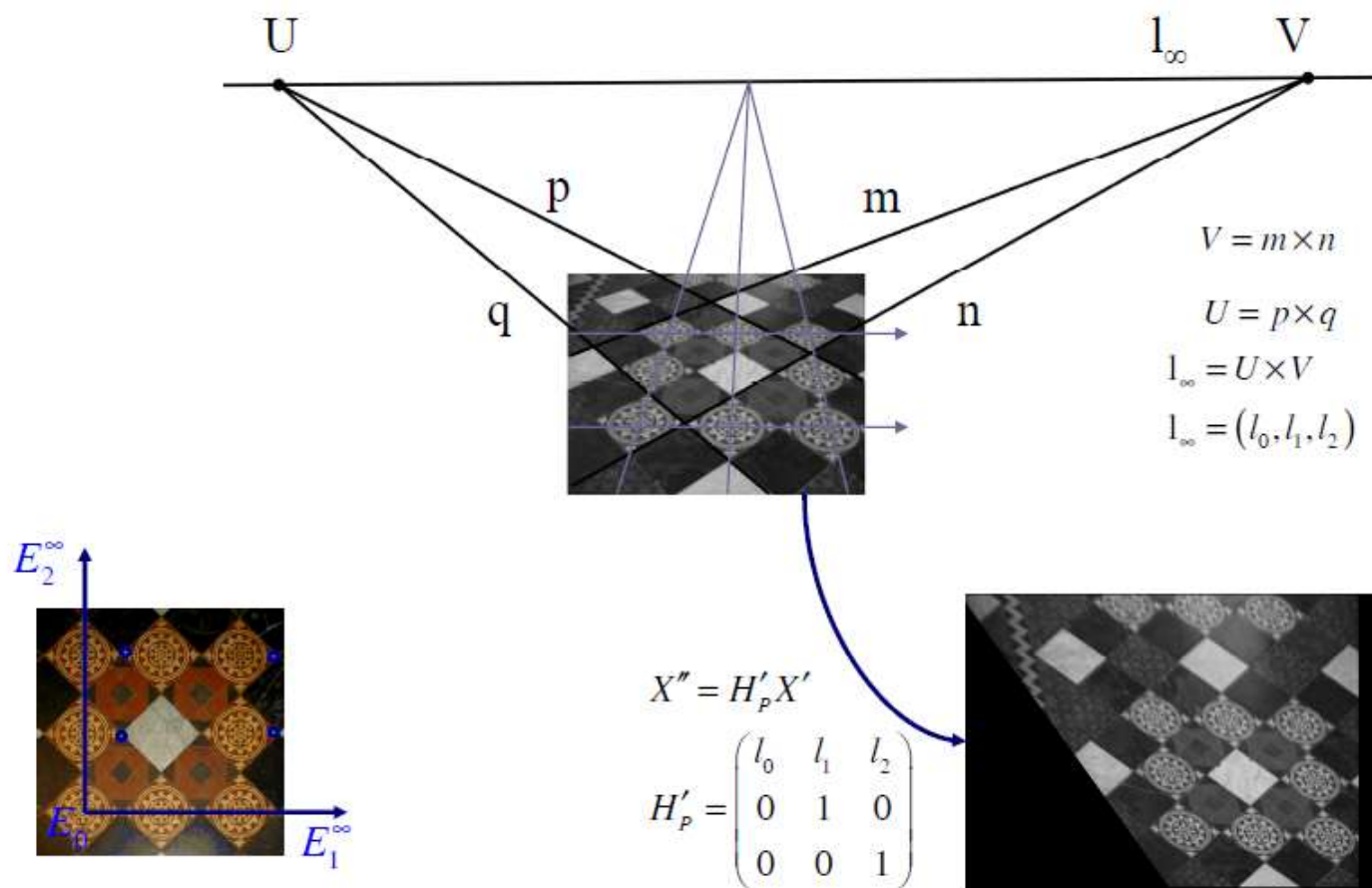




# Nalezení matice Homografie

- Řada numerických problémů, proto je nutná normalizace snímků: Těžiště nalezených bodů má souřadnice  $[0,0]$  a jejich střední rozptyl je  $\text{Sqrt}[2]$ .
- Algoritmus lze vylepšovat přidáním korespondence přímek, případně kuželoseček.
- Lze přidat iterativní optimalizace (Golden Standard).

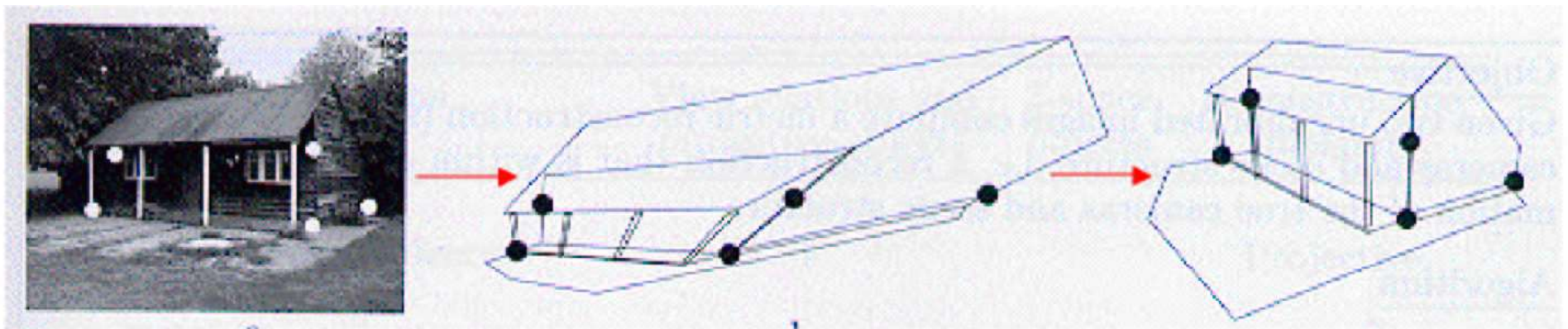
## Afinní rektifikace



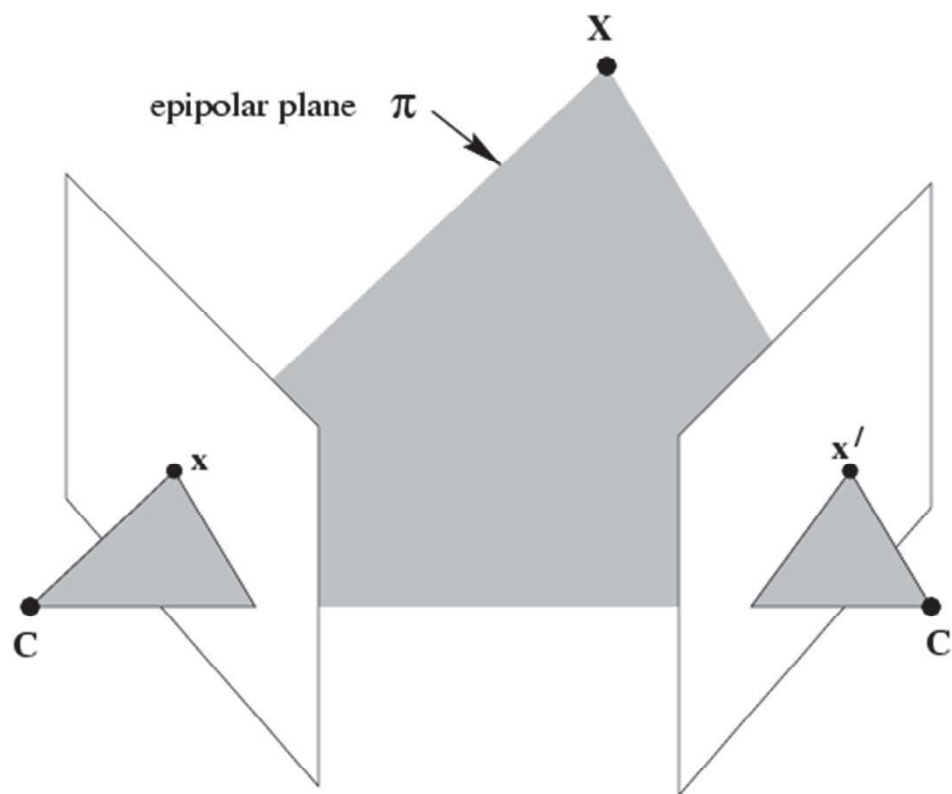
Snadno projektivně zobrazíme snímek tak, aby byl afinně, nebo i Eukleidovsky “správně”.

# 3D rekonstrukce

- Z několika snímků zrekonstruovat 3D model. Musíme něco vědět o objektu, nebo o přesné poloze fotoaparátů.

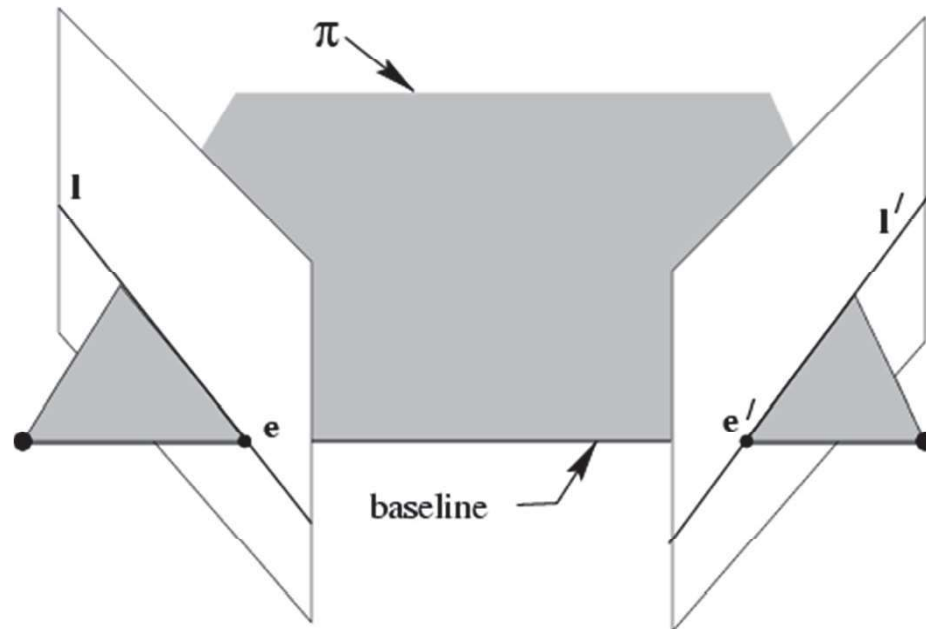


# Epipolární geometrie



$C$ ,  $C'$ ,  $x$ ,  $x'$  a  $X$  jsou v jedné rovině

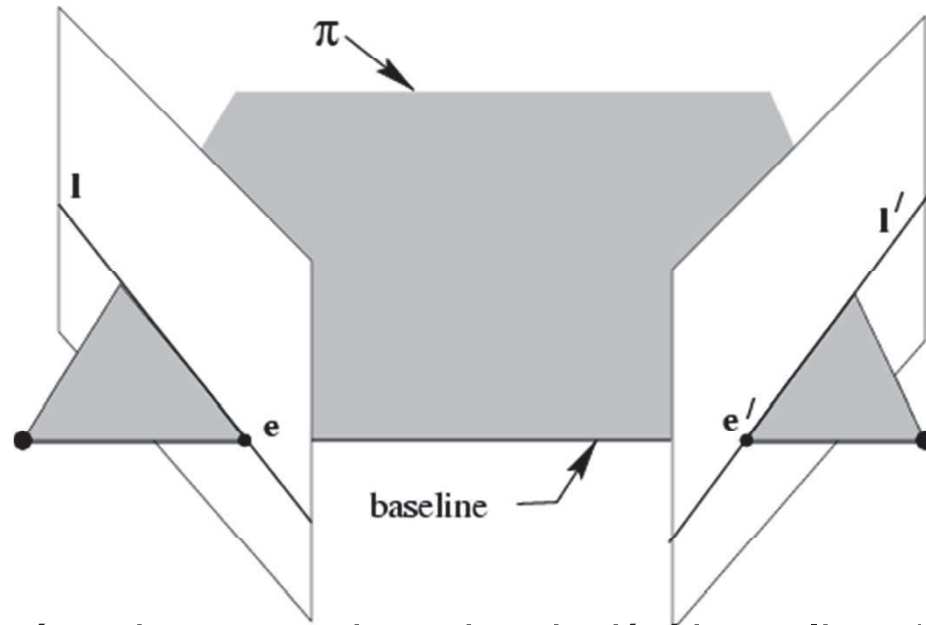
# Epipolární geometrie



Všechny body  $\pi$  se promítnou na  $l$  a  $l'$

# Epipóly

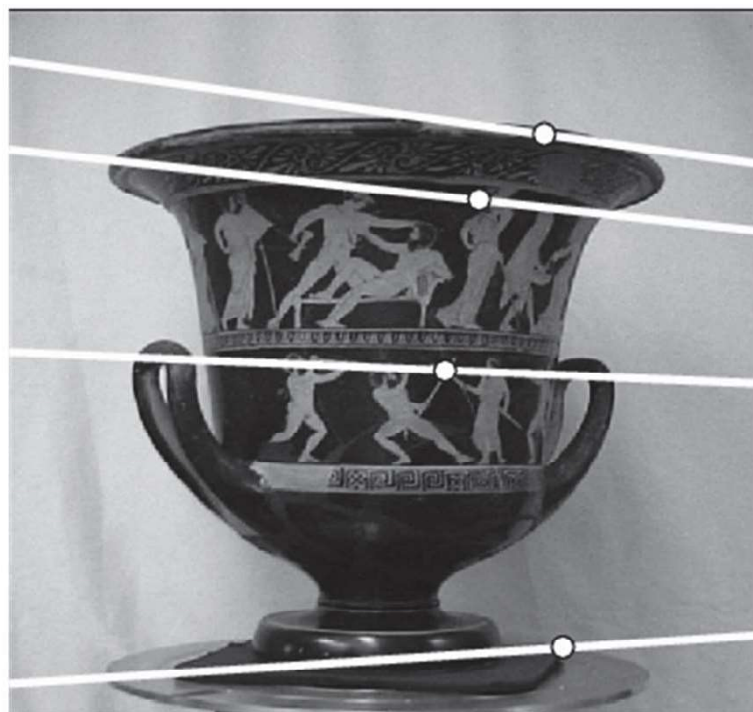
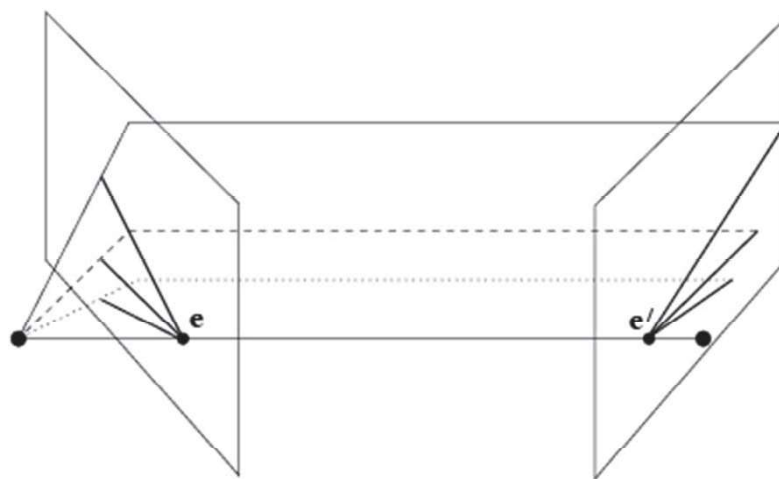
epipóly  $e, e'$   
= průsečík spojnice středů se snímky



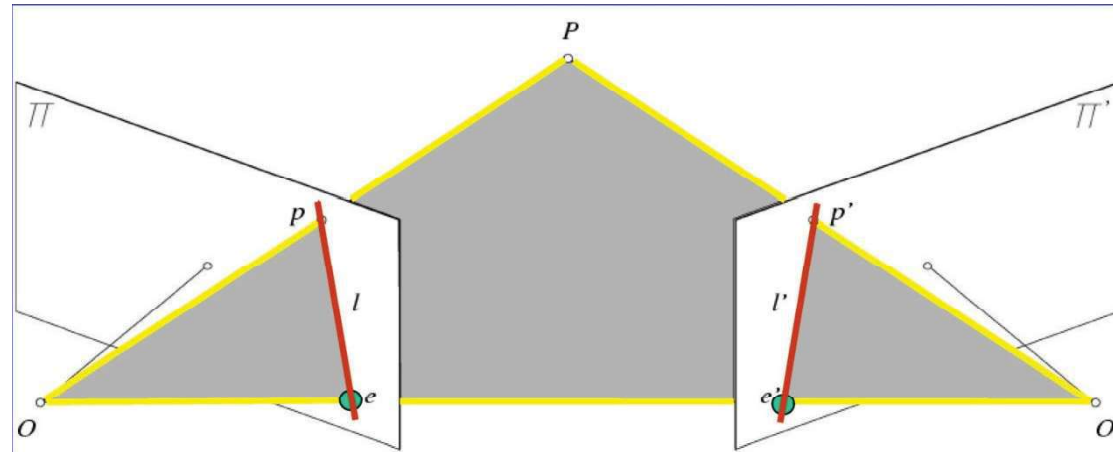
Epipolární roviny = roviny obsahující baseline (1-D family)

Epipolární přímky = průsečík epipolárních rovin se snímky  
(odpovídající dvojice)

# Příklad



# Fundamentální matice



$$p'^T F p = 0$$

**Dosazením bodu dostáváme epipolární přímky:**

$$l' = F p \quad l = F^T p'$$

**Epipóly jsou řešením homogenní soustavy:**

každá epipolární přímka prochází epipólem a tedy  $Fe = 0$  a  $F^T e' = 0$

# Fundamentální matice

- $F$  má hodnotu 2
- Má 7 stupňů volnosti ... 9 prvků, ale až na násobek a navíc  $\det F = 0$

# Computing Fundamental Matrix from Point Correspondences

- The fundamental matrix is defined by the equation  $\mathbf{x}_i'^T \mathbf{F} \mathbf{x}_i = 0$  for any pair of corresponding points  $\mathbf{x}_i$  and  $\mathbf{x}_i'$  in the 2 images
- The equation for a pair of points  $(x, y, 1)$  and  $(x', y', 1)$  is:  $x'x f_{11} + x'y f_{12} + x'f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y'f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0$
- For  $n$  point matches:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0$$

## Vynucení singularity matice $F$

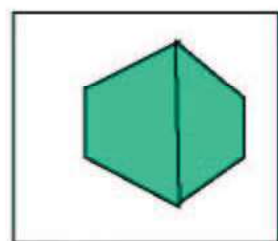
- musí platit  $\det F=0$ , což ale kvůli nepřesnostem nevyjde
- provede se oprava pomocí SVD: v matici  $\Sigma$  se nejmenší singulární hodnota nahradí 0

$$F = U \Sigma V^T$$

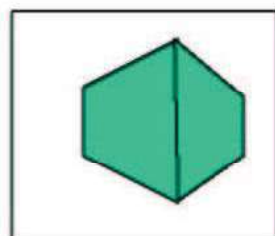
## K čemu se hodí fundamentální matice $\mathbf{F}$ ?

- Máme-li dostatek odpovídajících si bodů  $\mathbf{x}_i$  and  $\mathbf{x}_i'$ , pak můžeme spočítat jednoznačně  $\mathbf{F}$ .
- Projekční matice  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}'$  mohou být vypočteny z  $\mathbf{F}$  (trochu složitější teorie matic, používá se opět SVD)
- Nejsou nalezeny jednoznačně, až na projektivní transformaci prostoru, tj. existuje matice  $4 \times 4$  taková, že

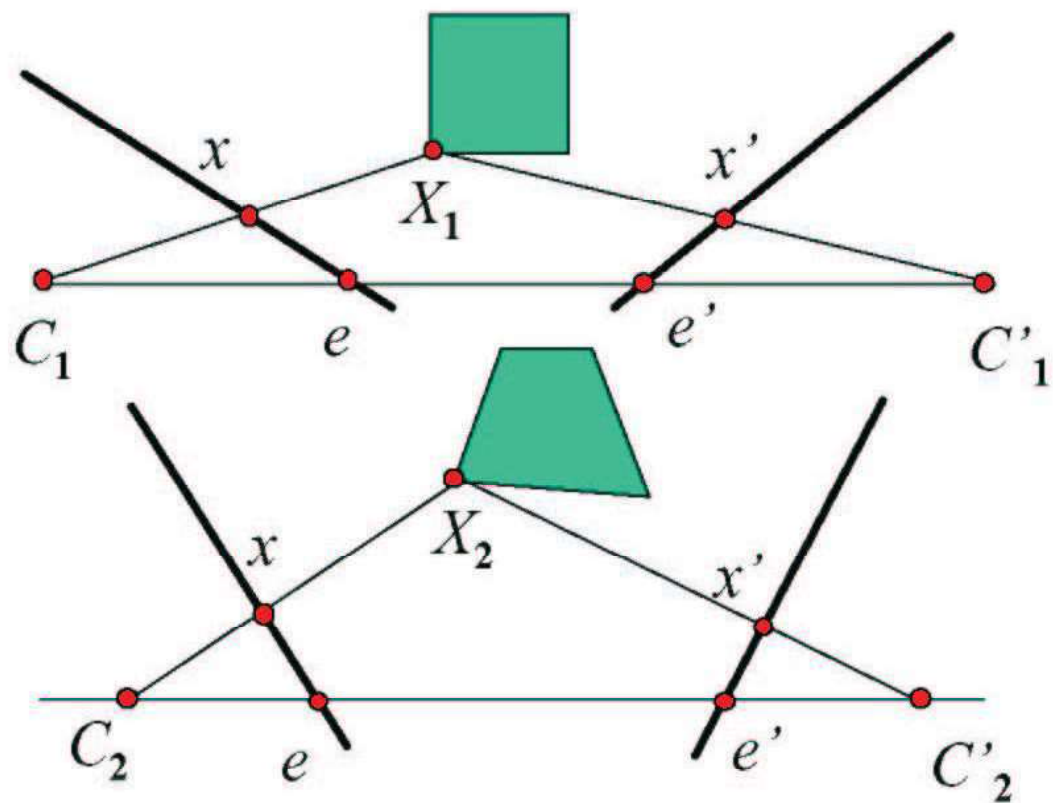
$$\mathbf{X}_{2,i} = \mathbf{H}\mathbf{X}_{1,i}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1\mathbf{H}^{-1} \quad \mathbf{M}'_2 = \mathbf{M}'_1\mathbf{H}^{-1}$$



*Image*



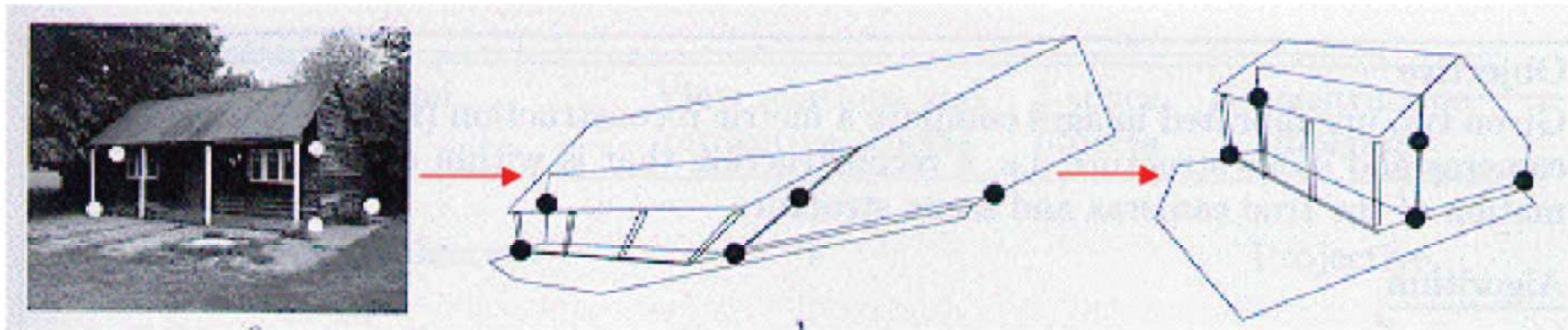
*Same Image*



# Metrická rekonstrukce

- Vypočti homografii  $H$  tak aby  $X_{Ei}=HX_i$  pro alespoň 5 bodů  $X_{Ei}$  se známou Eukleidovskou polohou
- Metrická rekonstrukce pak je

$$M_M = MH^{-1} \quad M'_M = M'H^{-1} \quad X_{M,i} = HX_i$$



## Shrnutí: jaké projektivní transformace se hodí

| použití                                          | zobrazení        | matice       |
|--------------------------------------------------|------------------|--------------|
| panoramatické lepení snímků                      | $z R_2$ do $R_2$ | $3 \times 3$ |
| spojování snímků roviny (např. podlahy)          | $z R_2$ do $R_2$ | $3 \times 3$ |
| výpočet projekční matice kamery (kalibrace)      | $z R_3$ do $R_2$ | $3 \times 4$ |
| korespondence mezi snímky (fundamentální matice) | Bilineární       | $3 \times 3$ |
| metrická rektifikace                             | $z R_3$ do $R_3$ | $4 \times 4$ |
|                                                  |                  |              |