Geometrie pro počítačovou grafiku

Příklad 1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky $p : x + 2y + 3 = 0$.

Definice 2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

Lemma 3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $||g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))|| = ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in Im(f)$, pak nalezneme $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$||f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{P} - \mathbf{Q}|| = ||f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

  Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

$\square$

Věta 4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Důkaz. (NEBUDE SE ZKOUŠET, JEN PRO ZAJÍMAVOST)
Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)^T =\in \mathbb{R}^n$ platí

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| &= ||\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})|| = ||\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})|| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}|| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}+\mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0,0,\dots,0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ pro $i \in \{1,\dots n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$||\mathbf{f}_i|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{O}|| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))|| = ||f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)|| = ||\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j|| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = ||\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j||^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)\cdot(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j\cdot\mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé.

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1|\cdots|\mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}+\mathbf{p}$, které je podle prvním části důkazu shodné a pro jeho invers platí $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i. Definujme konečně $h = g^{-1}\circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz $h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))$. Pak platí

$$||h(\mathbf{Y}) - h(O)||^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{O}||^2,$$

$$\begin{aligned} ||h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)||^2 = ||h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i||^2 &= h_1^2(\mathbf{Y}) + \cdots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \cdots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \cdots + (y_i - 1)^2 + \cdots + y_n^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i||^2. \end{aligned}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1,2,\dots,n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}+\mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že $\mathbb{R}^n$ je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. □

Důsledek 5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{p}), \quad (g\circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Věta 6. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 7. Zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice nazýváme posunutí a tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří ortonormální podgrupu označovanou $\mathbb{ON}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin).

Jeho body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme samodružné body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Věta 8. Každá přímá shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ je identita nebo posunutí nebo otočení.

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p} \right)$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům $\mathbf{A}$. Jestliže je f, přímé, pak $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p} \right)$ nemá řešení).

- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos\alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné $\mathbf{p}$ a tey f má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. Lze psát

  $$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

  takže jde o otočení kolem $\mathbf{S}$. Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě $\mathbf{A}$ nemá žádné vlastní vektory, tedy f nemá samodružné směry.

□

Definice 9. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojité zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ (tedy má spojité derivace všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Definice 10. Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ hladká regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ hladké bijektivní zobrazení $\tilde{I}$ na I s vlastní a všude nenulovou derivací (tzv. *difeomorfismus*), je

$$\tilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$$

regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako $\mathbf{c}$. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Poznámka 11. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Definice 12. Délku křivky $\mathbf{c}(t)$ na intervalu $I = (a, b)$ definujeme jako

$$\int_a^b ||\mathbf{c}'(t)||dt,$$

kterýžto integrál nezávisí na změně parametru.

Definice 13. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.

Věta 14. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Důkaz. Přímým výpočtem získáme $\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi}\mathbf{c}'$ a také $\ddot{\mathbf{c}} = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + \dot{\phi}^2\mathbf{c}''$ a můžeme dále počítat

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{||\dot{\mathbf{c}}||} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{||\dot{\phi}\mathbf{c}'||} = \text{sign}(\dot{\phi})\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'(t)||} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t).$$

Dále platí

$$\mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{n}_*(t).$$

Konečně

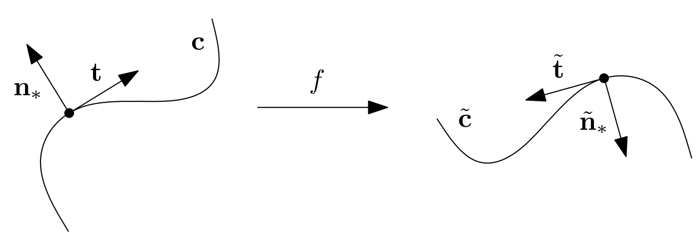
$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{||\dot{\mathbf{c}}||^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')\begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}\right]}{||\dot{\phi}\mathbf{c}'||^3} = \text{sign}(\dot{\phi})\frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3} = \text{sign}(\dot{\phi})\kappa_z(t).$$

□

Věta 15. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})A\mathbf{n}_*$.

Důkaz. Uvědomme si, že $\det A = \pm 1$. Navíc platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t).$$



Tedy

- $$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{||\tilde{\mathbf{c}}'||^3} = \frac{\det(A\mathbf{c}', A\mathbf{c}'')}{||A\mathbf{c}'||^3} = \frac{\det(A)\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3} = (\det A)\kappa_z,$$

  neboť pro libovolný vektor $||v|| = \sqrt{v^T v} \Rightarrow ||Av|| = \sqrt{(Av)^T Av} = \sqrt{v^T A^T A v} = \sqrt{v^T v} = ||v||$.

- $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{||\tilde{\mathbf{c}}'||} = \frac{A\mathbf{c}'}{||A\mathbf{c}'||} = A(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}) = A\mathbf{t}$

- $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\mathbf{t} = \det(A) A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \det(A) A \mathbf{n}_*.$

$\square$

Definice 16. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}_*(t)\}$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{|\kappa_z(t)|}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)} \mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Poznámka 17. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic). Navíc, jestliže označíme $N(t)$ normálovou přímku v bodě t, pak v každém neinflexním bodě $\mathbf{c}(t_0)$ platí

$$S(t_0) = \lim_{t->t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

Definice 18. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

Věta 19 (Frenetovy vzorce)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = ||\mathbf{c}'||\kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = ||\mathbf{c}'||(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}), \qquad \mathbf{b}' = -||\mathbf{c}'||\tau\mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = ||\mathbf{c}'||(\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Definice 20. O ortonormálním repéru $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ řekneme, že je to pro křivku $\mathbf{c}$ repér s minimální rotací (RMF) jestliže pro každou hodnotu parametru platí

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}, \quad \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Takový repér je vždy k dispozici a je velmi užitečný pro aplikace.