

Projektivní geometrie

Zbyněk Šír

MÚ MFF UK

Projektivní prostor

bud V^{n+1} vektorový prostor nad tělesem T dimenze $n + 1$.
Množinu $\mathbb{P}^n$ všech jednorozměrných vektorových podprostorů
prostoru V^{n+1} , tj.

$$\mathbb{P}^n = \{ \langle \vec{v} \rangle : \vec{v} \in V^{n+1}, \vec{v} \neq \vec{0} \}$$

nazýváme projektivní prostor dimenze n nad tělesem T a jeho
prvky nazýváme body.

$\vec{v}$ nazýváme *vektorovým zástupcem* bodu $\langle \vec{v} \rangle$. Označme

$$\pi : (V^{n+1} - \vec{0}) \rightarrow \mathbb{P}^n,$$

které nenulovému vektoru $\vec{v}$ přiřadí bod $\langle \vec{v} \rangle$.

Důležitý příklad $T = \mathbb{R}$ a $n = 2$, tedy projektivní rovina.

Podprostory a incidence

Množinu $\pi(V^{k+1})$, kde V^{k+1} je $k + 1$ dimensionální podprostor V^{n+1} , nazýváme k -rozměrným podprostorem $\mathbb{P}^n$.

Speciálně pro $k = 1$ jej nazýváme projektivní přímkou, pro $k = 2$ projektivní rovinou, pro $k = n - 1$ projektivní nadrovinou.

V projektivní geometrii máme jedinou základní vlastnost **incidenci** $\in$. Jestliže $\vec{v} \in V^{k+1}$, pak $\langle \vec{v} \rangle \in \pi(V^{k+1})$. Přirozeně pak můžeme definovat incidenci podprostorů.

V projektivní rovině zjevně každými dvěma body prochází právě jedna přímka a každé dvě přímky se protnou právě v jednom bodě.

Homoenní (projektivní) souřadnice

Nechť $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_n$ je báze V^{n+1} . Zobrazení, které každému bodu $V \in \mathbb{P}^n$ přiřazuje $n + 1$ tici

$$(x_0, \dots, x_n)$$

takové, že

$$V = \langle x_0 \vec{v}_0 + x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_n \vec{v}_n \rangle$$

se nazývá *homogenní soustava souřadnic*.

Tyto souřadnice jsou definovány až na nenulový násobek. Zcela přesně se nejedná o jednoznačné zobrazení do $(n + 1)$ -tic, ale o bijektivní projektivní zobrazení z prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$ do „aritmetického“ projektivního prostoru $\mathbb{P}(T^{n+1})$. báze $\alpha \vec{v}_0, \alpha \vec{v}_1, \dots, \alpha \vec{v}_n$ dává stejné homogenní souřadnice.

V projektivní rovině jsou tedy body trojice čísel, brány až na násobek.

Věta o volbě souřadnic

bodů $V_0, \dots, V_k$ nazveme lineárně nezávislé, jestliže jsou lineárně nezávislí jejich vektoroví zástupci $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_k$.

Věta: Mějme $n + 2$ bodů $V_0, \dots, V_{n+1}$, z nichž každých $n + 1$ je lineárně nezávislých. Pak existuje právě jedna soustava homogenních souřadnic taková, že

$$V_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$V_1 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\dots = \dots$$

$$V_n = (0, 0, \dots, 1)$$

$$V_{n+1} = (1, 1, \dots, 1)$$

V projektivní rovině si tedy můžeme zvolit souřadnice 4 bodů v obecné poloze.

Princip duality

Projektivní nadroviny jsou prvky duálního projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1*})$. Každý n -dimensionální podprostor je totiž nulová množina lineární formy

$$V^n = \{ \vec{v} = x_0 \vec{v}_0 + x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_n \vec{v}_n : x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0 \}.$$

$(n+1)$ -tici

$$(y_0, y_1, \dots, y_n)^*$$

chápeme jako homogenní souřadnice nadroviny.

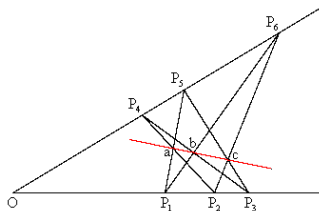
V projektivní rovině jsou tedy body i přímky trojice čísel brané až na násobek.

jak se počítá v projektivní rovině?

Kolinearita tří bodů se testuje determinantem. Průnik dvou přímek se počítá vektorovým součinem. Spojnice dvou bodů rovněž.

Pappova věta

V konstrukci na obrázku body a, b, c vždy leží v přímce.



Důkaz: podle předchozí věty zvolíme homogenní souřadnice tak, aby $O = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_4 = (0, 0, 1)$, $a = (1, 1, 1)$.

To nám umožňuje dopočítat

$$\overrightarrow{P_1 a} = (1, 0, -1)^*, \quad \overrightarrow{P_4 a} = (1, -1, 0)^*, \\ P_2 = (1, 1, 0) \text{ a } P_5 = (1, 0, 1).$$

Pokud předpokládáme, že $P_3 \neq P_1$, $P_6 \neq P_1$ můžeme dále vyjádřit

$$P_3 = (1, s, 0), P_6 = (1, 0, t),$$

kde s, t jsou reálné parametry a postupně dopočítáme

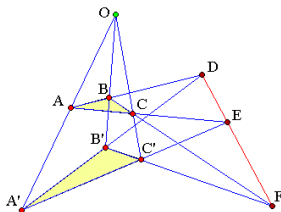
$$\overrightarrow{P_1 P_6} = (t, 0, -1)^*, \quad \overrightarrow{P_3 P_4} = (s, -1, 0)^*, \quad \overrightarrow{P_2 P_6} = (-t, t, 1)^*, \quad \overrightarrow{P_3 P_5} = (-s, 1, s)^*$$

$$b = (1, s, t), c = (st - 1, st - s, st - t).$$

a, b, c jsou zjevně kolineární, protože v souřadnicích $c = (st)a - b$.

Desarguesova věta

Za podmínky, že trojúhelníky A, B, C a A', B', C' jsou nedegenerované platí, že body D, E, F leží na přímce právě tehdy, když přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem.



Důkaz: body A, B, C, A', B', C' uvažujeme v neoptimalizovaných homogenních souřadnicích, například $A = (a_0, a_1, a_2)$. Podmínka, že body D, E, F leží na přímce je pomocí počítače přímočaře vyjádřena velkou rovnicí níže (pouze několik vektorových součinů a determinant). Nulovost prvních dvou závorek odpovídá degeneraci trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ (determinant trojice bodů). Poslední závorka odpovídá podmínce pro sbíhání přímk AA', BB', CC' do bodu (opět přímo vypočítáno).

$$(a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 - a_1 b_0 c_2 + a_1 b_2 c_0 + a_2 b_0 c_1 - a_2 b_1 c_0) \cdot$$

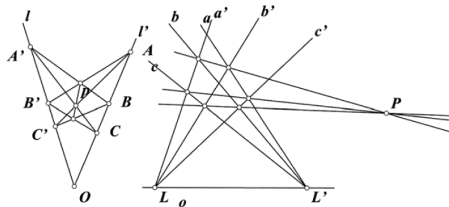
$$(a'_0 b'_1 c'_2 - a'_0 b'_2 c'_1 - a'_1 b'_0 c'_2 + a'_1 b'_2 c'_0 + a'_2 b'_0 c'_1 - a'_2 b'_1 c'_0) \cdot$$

$$\begin{aligned} & (-a_0 a'_1 b_0 b'_2 c_1 c'_2 + a_0 a'_1 b_0 b'_2 c_2 c'_1 + a_0 a'_1 b_1 b'_2 c_0 c'_2 - a_0 a'_1 b_1 b'_2 c_2 c'_0 + a_0 a'_1 b_2 b'_0 c_1 c'_2 - a_0 a'_1 b_2 b'_0 c_2 c'_1 \\ & - a_0 a'_1 b_2 b'_1 c_0 c'_2 + a_0 a'_1 b_2 b'_1 c_2 c'_0 + a_0 a'_2 b_0 b'_1 c_1 c'_2 - a_0 a'_2 b_0 b'_1 c_2 c'_1 - a_0 a'_2 b_1 b'_0 c_1 c'_2 + a_0 a'_2 b_1 b'_0 c_2 c'_1 \\ & - a_0 a'_2 b_1 b'_2 c_0 c'_1 + a_0 a'_2 b_1 b'_2 c_2 c'_0 + a_0 a'_2 b_2 b'_1 c_0 c'_1 - a_0 a'_2 b_2 b'_1 c_2 c'_0 + a_1 a'_0 b_0 b'_2 c_1 c'_2 - a_1 a'_0 b_0 b'_2 c_2 c'_1 \\ & - a_1 a'_0 b_1 b'_2 c_0 c'_2 + a_1 a'_0 b_1 b'_2 c_2 c'_0 - a_1 a'_0 b_2 b'_0 c_1 c'_2 + a_1 a'_0 b_2 b'_0 c_2 c'_1 + a_1 a'_0 b_2 b'_1 c_0 c'_2 - a_1 a'_0 b_2 b'_1 c_2 c'_0 \\ & - a_1 a'_2 b_0 b'_1 c_0 c'_2 + a_1 a'_2 b_0 b'_1 c_2 c'_0 + a_1 a'_2 b_0 b'_2 c_0 c'_1 - a_1 a'_2 b_0 b'_2 c_2 c'_0 + a_1 a'_2 b_1 b'_0 c_0 c'_2 - a_1 a'_2 b_1 b'_0 c_2 c'_0 \\ & - a_1 a'_2 b_2 b'_0 c_0 c'_1 + a_1 a'_2 b_2 b'_0 c_2 c'_0 - a_2 a'_0 b_0 b'_1 c_1 c'_2 + a_2 a'_0 b_0 b'_1 c_2 c'_1 + a_2 a'_0 b_1 b'_0 c_1 c'_2 - a_2 a'_0 b_1 b'_0 c_2 c'_1 \\ & + a_2 a'_0 b_1 b'_2 c_0 c'_1 - a_2 a'_0 b_1 b'_2 c_2 c'_0 - a_2 a'_0 b_2 b'_1 c_0 c'_1 + a_2 a'_0 b_2 b'_1 c_2 c'_0 + a_2 a'_1 b_0 b'_1 c_0 c'_2 - a_2 a'_1 b_0 b'_1 c_2 c'_0 \\ & - a_2 a'_1 b_0 b'_2 c_0 c'_1 + a_2 a'_1 b_0 b'_2 c_2 c'_0 - a_2 a'_1 b_1 b'_0 c_0 c'_2 + a_2 a'_1 b_1 b'_0 c_2 c'_0 + a_2 a'_1 b_2 b'_0 c_0 c'_1 - a_2 a'_1 b_2 b'_0 c_2 c'_0) \end{aligned}$$

$$= 0$$

Princip duality

Jestliže v projektivní rovině platí věta, ve které se vyskytují pouze přímky, body, jejich průsečíky, spojení a vlastnost "ležet na", pak platí i věta duálnní, t.j. ve které nahradíme přímky body, body přímkami, průsečík spojení, spojení průsečíkem a "ležet na" nahradíme "procházet".



Úloha o tarotech

Nalezni 5 různých rozdělení (kol) 16 hráčů do 4 skupin (stolů) tak, aby každý hráč potkal každého hráče u právě jednoho stolu.

Hint: uvažuj afinní a projektivní rovinu nad čtyřprvkovým tělesem.

Vnoření eukleidovského prostoru do afinního

Eukleidovskou rovinu $[x, y]$ vnoříme do projektivní roviny (x_0, x_1, x_2) pomocí vztahu

$$[x, y] \rightarrow (x, y, 1)$$

a k němu inverznímu

$$(x_0, x_1, x_2) = \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}, 1\right) \rightarrow \left[\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right].$$

Podobně v ostatních dimenzích. Incidence (ležet na) se správným způsobem přetransformuje.

Přímky se převedou na přímky, ale ke každé se přidá jeden (tzv. nevlastní) bod. celkově se přidá přímka v nekonečnu $x_0 = 0$. bod $(x_0, x_1, 0)$ leží na přímce, která má afinní směr (x_0, x_1) . Směrové vektory se tedy zobrazí na projektivní body pomocí vztahu

$$[v_x, v_y] \rightarrow (v_x, v_y, 0)$$