Kapitola 1

Teorie křivek

Definice 1.1 Nechť I je otevřený interval v $\mathbb{R}$.

1. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je hladké zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ (tedy na I existují spojité derivace všech řádů).

2. Vektor $\mathbf{c}'(t) \equiv \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *tečný vektor* k parametrizované křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$.

3. Řekneme, že parametrizovaná křivka $\mathbf{c}$ je *regulární v bodě* $t_0 \in I$, pokud $\mathbf{c}'(t_0) \neq \vec{0}$. Řekneme, že parametrizovaná křivka $\mathbf{c}$ je *regulární*, pokud je regulární v každém bodě I.

4. Množina hodnot $\mathbf{c}(I)$ se nazývá *obraz parametrizované křivky* a značí se $\langle \mathbf{c} \rangle$.

Definice 1.2 (obsahuje i drobná tvrzení) Nechť $\mathbf{c}$ je parametrická křivka na $I \subset \mathbb{R}$ a $\varphi : \tilde{I} \to I$ difeomorfismus mezi otevřenými intervaly.

1. Parametrizovaná křivka $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) := \mathbf{c}(\varphi(\tilde{t}))$ na $\tilde{I}$ s nazývá *reparametrizací* parametrizované křivky $\mathbf{c}$. Takovéto dvě křivky mají zřejmě tentýž obraz.

2. "Býti reparametrizací"je relace ekvivalence na množině všech parametrizovaných křivek. *Křivkou* budeme nazývat třídu této ekvivalence.

3. Řekneme, že reparametrizace zachovává orientaci parametrické křivky, pokud $\forall t \in \tilde{I}$: $\varphi'(t) > 0$. Také "býti reparametrizací zachovávající orientaci"je relace ekvivalence na množině všech parametrizovaných křivek a příslušné třídy ekvivalence budeme nazývat *orientované křivky.* Na každou křivku připadají dvě orientované křivky.

Poznámka. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem křivka (případně orientovaná křivka) často označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz.

Definice 1.3 Délku křivky $\mathbf{c}(t), t \in I = (\alpha, \beta)$ definujeme jako určitý integrál

$$\int_\alpha^\beta |\mathbf{c}'(t)| dt,$$

který nezávisí na parametrizaci.

Definice 1.4 Nechť $\mathbf{c}(t)$ je křivka parametrizovaná na I. Řekneme, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná obloukem, pokud platí

$$|\mathbf{c}'(t)| = 1$$

pro všechna $t \in I$.

Věta 1.5 Křivka $\mathbf{c}(t), t \in I$ je regulární, právě když ji lze reparametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(s)$ jedna parametrizace obloukem, pak každá jiná parametrizace obloukem $\mathbf{c}(\tilde{s})$ se získá pomocí reparametrizace tvaru $s = \pm\tilde{s} + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Definice 1.6 Pro orientovanou křivku $\mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem označujeme v každém bodě její jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s)$. Množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s) \rangle$ nazýváme *tečná přímka.*

Definice 1.7 Nechť $\mathbf{c}(s)$ je křivka parametrizovaná obloukem. Pak její *křivost* v bodě $\mathbf{c}(s)$ definujeme jako $\kappa(s) = |\mathbf{c}''(s)| = |\mathbf{t}'(s)|$. Tato hodnota nezávisí na tom, kterou parametrizaci obloukem pro danou křivku zvolíme. Regulární bod křivky, v němž je křivost nulová se nazývá *inflexní bod.*

Lemma 1.8 Pro každé dvě bodové funkce $\mathbf{a}(s), \mathbf{b}(s)$ platí

1. $(\mathbf{a}(s) \cdot \mathbf{b}(s))' = \mathbf{a}'(s) \cdot \mathbf{b}(s) + \mathbf{a}(s) \cdot \mathbf{b}'(s)$.
2. $(\mathbf{a}(s) \times \mathbf{b}(s))' = \mathbf{a}'(s) \times \mathbf{b}(s) + \mathbf{a}(s) \times \mathbf{b}'(s)$.

Definice 1.9 Nechť $\mathbf{c}(s)$ je orientovaná křivka parametrizovaná obloukem. V každém jejím bodě, který není inflexní, pro křivku definujeme

- její *normálový* a *binormálový vektor*

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)}, \qquad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

- ortonormální *Frenetův repér* jako uspořádanou trojici $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$,
- její *poloměr křivosti* jako $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$,
- její *střed křivosti* jako bod $\mathbf{c}(s) + R(s)\,\mathbf{n}(s)$,
- její *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$,
- její *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$,
- její *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$.

Věta 1.10 (Frenetovy vzorce) Předpokládejme, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak existuje právě jedna hladká funkce $\tau(s)$ nazývaná *torze* tak, že v každém bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Věta 1.11 Nechť $f > 0, g$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost jediná hladká křivka $\mathbf{c}(s)$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(s) = f(s), \quad \tau(s) = g(s).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky.*

Poznámka. Nadále budeme používat zkrácený zápis reparametrizací a budeme psát například $t(s)$ namísto $t = \varphi(s)$ a v důsledku i $s(t)$ namísto $s = \varphi^{-1}(t)$. Dále budeme psát $\mathbf{c}(s)$ namísto $\tilde{\mathbf{c}}(s)$, či $\mathbf{c}(\varphi(s))$, a podobně. Konečně kvůli zjenodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, tečka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a čárka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 1.12 Pro dvě parametrizace téže křivky $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$ platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'' \\ \mathbf{c}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & 0 & 0 \\ t'' & (t')^2 & 0 \\ t''' & 3t't'' & (t')^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \\ \dddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix}.$$

Věta 1.13 (Počítání v obecné parametrizaci) Pro regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obecným parametrem (ne nutně obloukem) v každém bodě platí

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}}|}, \quad \kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}$$

a v neinflexních bodech navíc platí

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}, \quad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}) \cdot \dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

Rovinné křivky. V této části podrobněji prozkoumáme vlastnosti křivek, které leží v rovině. Tuto rovinu si zvolíme (bez újmy na obecnosti) tak, že to bude $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, zadané rovnicí $x_3 = 0$, a křivka bude parametrizována jako $\mathbf{c}(s) = [c_1(s), c_2(s)] \in \mathbb{R}^2$ neboli $\mathbf{c}(s) = [c_1(s), c_2(s), 0] \in \mathbb{R}^3$.

Definice 1.14 Mějmě v rovině dánu orientaci. Nechť $\mathbf{c}$ je regulární rovinná parametrizovaná obloukem. Pak definujeme znaménkovou křivost jako

$$\kappa_z = \mathit{signum}(\det[\mathbf{c}', \mathbf{c}''])\kappa.$$

Platí tedy, že $\kappa_z = \pm\kappa$ v závislosti na tom, zda $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ tvoří kladně nebo záporně orientovanu bazi. V inflexních bodech je $\kappa_z = \kappa = 0$.

Věta 1.15 Nechť $\mathbf{c}$ je rovinná křivka parametrizovaná obloukem. Zvolme pevně jednotkový vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ a označme symbolem $\varphi(s)$ úhel od $\mathbf{a}$ k $\mathbf{t}(s)$ orientovaný proti směru hodinových ručiček. Pak

$$\kappa_z(t) = \varphi'(s).$$

Znaménková křivost je tedy změnou (derivací) směru (úhlu) tečného vektoru.

Definice 1.16 Regulární parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ se nazývá uzavřená, jestliže je ji možno hladce rozšířit do bodů α, β a pak $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta)$ a rovněž všechny derivace zprava v α se rovnají příslušným derivacím zleva v β. Řekneme, že taková křivka je jednoduchá, jestliže $\mathbf{c}$ je prosté zobrazení (křivka sama sebe neprotíná).

Definice 1.17 (Křivkové integrály) Nechť $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in (\alpha, \beta)$ je rovinná parametrizovaná křivka a $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ spojité funkce dvou proměnných definované v bodech křivky. Pak definuji křivkový integrál 1. druhu jako

$$\int_{\mathbf{c}} h(x, y)\mathrm{d}s := \int_{\alpha}^{\beta} h(x(t), y(t))|\dot{\mathbf{c}}(t)|\mathrm{d}t$$

a křivkový integrál 2. druhu jako

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\mathrm{d}x + g(x, y)\mathrm{d}y := \int_{\alpha}^{\beta} [f(x(t), y(t))\dot{x}(t) + g(x(t), y(t))\dot{y}(t)]\mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál 1. druhu se nemění při reparametrizaci a křivkový integrál 2. druhu se nemění při reparametrizaci zachovávajíci orientaci a při opačné orientaci mění znaménko.

Věta 1.18 (Greenova věta) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast (t.j. jednoduše souvislá omezená otevřená množina), jejíž hranice $\partial\Omega$ je kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) jednoduchá uzavřená rovinná křivka. Nechť $f(x, y)$ a $g(x, y)$ jsou hladké funkce definované na nějakém okolí $\bar{\Omega}$. Pak

$$\int_{\partial\Omega} f(x, y)\mathrm{d}x + g(x, y)\mathrm{d}y = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Důsledek 1.19 Nechť $\mathbf{c}(t) = [x(t), y(t)]$ je jednoduchá rovinná uzavřená křivka parametrizovaná libovolným parametrem proti směru hodinových ručiček. Pak pro plochu A oblasti uzavřené křivkou platí

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\dot{y}(t)\mathrm{d}t = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

Věta 1.20 (Isoperimetrická nerovnost) Pro délku l jednoduché uzavřené rovinné křivky a jí ohraničenou plochu A platí

$$l^2 \geq 4\pi A$$

a rovnost nastává právě pro kružnici.

Kapitola 2

Sférická geometrie

Definice 2.1 (Sférická geometrie)

- Množinou bodů jsou body jednotkové sféry $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^2$.
- Množinou přímek jsou hlavní kružnice, tedy průsečíky sféry s libovolnou rovinou, která prochází jejím středem S.
- Délky křivek na sféře měříme běžným způsobem jako délky křivek v $\mathbb{R}^3$.
- Úsečky jsou úseky přímek, které mají délku nejvýše π.
- Lze ukázat, že úsečka je nejkratší spojnicí krajních bodů. Její délka je rovna příslušnému úhlu při středu sféry.
- Sférický trojúhelník je definován třemi body na sféře, které neleží na jedné přímce. Jeho hrany jsou tvořeny úsečkami, spojujícími příslušné tři body. Za vnitřek trojúhelníku považujeme menší z obou částí, na něž hrany trojúhelníka sféru rozdělí. Každý trojúhelník se zjevně vejde do nějaké polosféry ohraničené nějakou hlavní kružnicí.

Věta 2.2 Jestliže vnitřní úhly u vrcholů sférického trojúhelníka A, B, C postupně označíme α, β, γ, pak pro velikost $|ABC|$ plochy trojúhelníka ABC platí

$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Poznámka. Jsou-li $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$, $\bar{\beta} = \pi - \beta$, $\bar{\gamma} = \pi - \gamma$ vnější úhly trojúhelníka, pak zjevně platí

$$|ABC| = 2\pi - (\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}).$$

Obecněji uvažujme na sféře uzavřenou jednoduchou orientovanou lomenou čáru $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1$. V každém vrcholu A_i lomené čáry uvažujme úhel $\bar{\alpha}_i \in (-\pi, \pi)$, jako orientovaný úhel změny tečného vektoru (měřený proti směru hodinových ručiček). Lomená čára rozdělí sféru na dva sférické mnohoúhelníky. Pro velikost plochy mnohoúhelníka, který leží po levé straně všech orientovaných úseček pak platí

$$|A_1 A_2 \ldots A_n| = 2\pi - \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i.$$

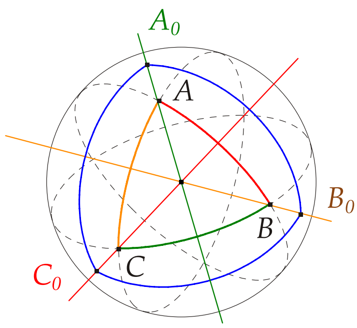
Tato celková úhlová odchylka $2\pi - \sum_{i=0}^{n} \bar{\alpha}_i$ se nazývá *holonomie* a je možno ji definovat pro každou uzavřenou křivku na libovolné ploše.

Definice 2.3 (Polarita) Pro každý bod A na sféře definujeme jeho polární přímku (poláru) $p(A)$ jako průsečík sféry a roviny procházející jejím středem S a kolmé na AS. A nazýváme pólem $p(A)$. Každá přímka má právě dva póly. Pro každé dva body A, B zjevně platí

$$B \in p(A) \Leftrightarrow A \in p(B).$$

Rovněž platí, že A i B leží ve stejné polosféře vymezené přímkou $p(A)$ právě tehdy, když leží ve stejné polosféře vymezené přímkou $p(B)$.

Definice 2.4 (Polární trojúhelník) Mějme sférický trojúhelník A, B, C, jeho úhly označme postupně α, β, γ a délky protilehlých stran označme postupně a, b, c. Nechť A_0 je pól přímky určené body B, C, který leží na stejné polosféře jako bod A. Analogicky získáme i body B_0, C_0. Trojúhelník A_0, B_0, C_0 nazýváme polární k trojúhelníku ABC.



Zjevně je pak i ABC polární k A_0, B_0, C_0. Pro úhly $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ a délky stran a_0, b_0, c_0 trojúhelníku A_0, B_0, C_0 platí

$$\alpha_0 = (\pi - a),\ \beta_0 = (\pi - b),\ \gamma_0 = (\pi - c),\ a_0 = (\pi - \alpha),\ b_0 = (\pi - \beta),\ c_0 = (\pi - \gamma).$$

Věta 2.5 (Sinová a cosinová věta) Úhly při vrcholech sférického trojúhelníku A, B, C označíme postupně α, β, γ a délky stran protilehlých úhlům α, β, γ označíme postupně a, b, c. Pak platí

1.
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

2.
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

3.
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Důsledek 2.6 (Pythagorova věta) Jako důsledek pro pravoúhlý troúhelník ($\gamma = \pi/2$) dostaneme

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Kapitola 3

Teorie ploch

Definice 3.1 Nechť $\mathcal{O}$ je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$.

1. *Parametrická regulární plocha* v $\mathbb{R}^3$ je hladké regulární zobrazení $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$, tedy takové, že hodnost Jacobiho matice $\mathbf{p}$ je ve všech bodech rovna 2. Ekvivalentně, vektory parciálních derivací $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ musí být v každém bodě lineárně nezávislé.

2. Množinu $\mathbf{p}(\mathcal{O})$ nazveme obrazem mapy, někdy ji budeme značit $\langle \mathbf{p} \rangle$.

3. Regulární param. plocha $\mathbf{p}$ se nazývá *mapa*, pokud je $\mathbf{p}$ navíc homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $\langle \mathbf{p} \rangle$.

Lemma 3.2 Nechť $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$ je mapa a $f : \mathbb{R}^n\Omega \to \mathbb{R}^3$ hladké zobrazení, jehož obraz je podmnožinou $\langle \mathbf{p} \rangle$. Pak i zobrazení $\mathbf{p}^{-1} \circ f$ je hladké.

Věta 3.3 Je-li $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^3$ mapa a $\phi : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ difeomeorfismus otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$, pak je také $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \phi$ mapou. Naopoak, jsou-li $\mathbf{p}$ a $\tilde{\mathbf{p}}$ dvě mapy takové, že $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle$, pak existuje difeomorfismus ϕ takový, že $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \circ \phi$.

Definice 3.4 Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^3$ je hladká plocha, pokud pro každý bod $s \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Soubor map, které pokrývají celou plochu S se nazývá atlas plochy S.

Jsou-li $\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}$ dvě mapy na S, pak budeme zobrazení $\phi = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ \mathbf{p}$ nazývat (tam kde je definované) přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.

Věta 3.5

1. Graf hladké funkce $z = f(x, y)$ je hladká plocha.

2. Jestliže $F(x, y, z)$ je hladká funkce, pak definuji $S = \{[x, y, z] : F(x, y, z) = 0\}$. Jestliže $\nabla F = (F_x, F_y, F_z) \neq 0$ na celé množině S, pak S je hladká plocha.

Definice 3.6 Řekneme, že vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ je tečný vektor k ploše S v bodě $s \in S$, pokud existuje křivka $\mathbf{c}$ taková, že $\langle \mathbf{c} \rangle \subset S$ a $\mathbf{c}(t_0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{w}$. Množina všech tečných vektorů v bodě $s \in S$ se nazývá tečný prostor k ploše S v bodě s a značí se T_sS.

Věta 3.7 Tečný prostor v libovolném bodě T_sS je vektorovým podprostorem $\mathbb{R}^2$. Jestliže $\mathbf{p}$ je mapa na S a $s = \mathbf{p}(u_0, v_0)$, pak

$$T_sS = \langle \mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0)\rangle.$$

Poznámka 3.8 Vektory $\mathbf{p}_u$, $\mathbf{p}_v$ parciálních derivací v bodě $[u_0, v_0]$ tedy tvoří bázi tečného prostoru T_sS a tento prostor je ztotožněn s $\mathbb{R}^2$ prostřednictvím totálního diferenciálu k $\mathbf{p}$ v bodě $[u_0, v_0]$, který má tvar

$$D\mathbf{p} : (a, b) \to a\mathbf{p}_u + b\mathbf{p}_v.$$

Definice 3.9 Je-li $\mathbf{p}$ mapa na S, pak v každém bodě definuji jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

Dvě mapy pro tentýž bod mají stejnou jednotkovou normálu právě když determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě je kladný. V tom případě nazýváme tyto mapy souhlasně orientovanými. Atlas plochy nazveme orientovaným atlasem, pokud jsou všechny jeho mapy po dvou souhlasně orientované.

Definice 3.10 Je-li S plocha a $s \in S$ její bod, pak na T_sS definujeme skalární součin jako restrikci kanonického Eukleidovského skalárního součinu na $\mathbb{R}^3$

$$I_s(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) := \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2.$$

Tato symetrická bilineární forma se nazývá *první fundamentální forma* plochy S v bodě $s \in S$.

Věta 3.11 Je-li $\mathbf{p}(u, v)$ mapa, pak je první fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

Poznámka. První fundamentální formu na ploše můžeme chápat rovněž jako kvadratickou formu, která se tradičně zapisuje jako $g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$. Někdy se pro koeficienty první fundamentální formy používá označení $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ a $g_{22} = G$. Vzhledem k Poznámce 3.8 můžeme první fundamentální formu chápat zároveň jako kvadratickou či bilineární symetrickou formu v prostoru $\mathbb{R}^2$.

Věta 3.12 Nechť $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa na ploše S a $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ křivka na ploše. Pak délka $\mathbf{c}(t)$ je rovna

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{u}, \dot{v})G(\dot{u}, \dot{v})^T}\,\mathrm{d}\,t.$$

Jestliže navíc $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{p}(\tilde{u}(\tilde{t}), \tilde{v}(\tilde{t}))$ je další křivka na ploše S, která má s $\mathbf{c}(t)$ společný bod, pak úhel křivek $\mathbf{c}(t), \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$ v jejich společném bodě definujeme jako úhel jejich tečných vektorů v tomto bodě a jeho cosinus vypočítáme jako

$$\frac{(\dot{u}, \dot{v})G(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})^T}{\sqrt{(\dot{u}, \dot{v})G(\dot{u}, \dot{v})^T}\sqrt{(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})G(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}})^T}}.$$

Definice 3.13 Je-li f hladká funkce na ploše S a je-li S pokryto jedinou mapou $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$, pak definujeme integrál prvního druhu z f přes plochu S vzorcem

$$\int_S f \,\mathrm{d}S := \int_{\mathcal{O}} f|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \int_{\mathcal{O}} f\sqrt{\det G} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v,$$

který se nemění při reparametrizaci.

Poznámka 3.14 Předpokládejme, že plochu S je možné napsat jako disjunktní sjednocení

$$S = \langle \mathbf{p}_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle \mathbf{p}_j \rangle \cup \langle \mathbf{c}_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle \mathbf{c}_l \rangle \cup \{B_1, \ldots, B_m\},$$

kde $\mathbf{p}_i$ jsou mapy na plochách $S_i = \langle \mathbf{p}_i \rangle, i = 1, \ldots, k$ a $\mathbf{c}_i, i = 1, \ldots, l$ jsou regulární křivky a $B_i, i = 1, \ldots, m$ jsou body. Pak definujeme

$$\int_S f \, dS = \sum_1^k \int_{S_i} f \,\mathrm{d}S.$$

Integrál $\int_S f\, dS$ nezávisí ani na rozkladu plochy S, ani na volbě parametrizací $\mathbf{p}_i$.

Definice 3.15 Velikost plochy definujeme jako

$$\int_S 1 \,\mathrm{d}S.$$

Definice 3.16 Zobrazení $f : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami se nazývá hladké, jestliže pro každé dvě mapy $\mathbf{p}_1 : \mathcal{O}_1 \to S_1$, $\mathbf{p}_2 : \mathcal{O}_2 \to S_2$ je zobrazení

$$\mathbf{p}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{p}_1$$

hladkým zobrazením otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$.

Definice 3.17 Hladké zobrazení $f : S_1 \to S_2$ se nazývá *isometrické*, pokud zachovává délku křivek, tedy délka každého $\mathbf{c}(t)$ je stejná jako délka $f(\mathbf{c}(t))$. Řekneme, že dvě plochy jsou isometrické, pokud existuje isometrický difeomorfismus mezi nimi. Podobně řekneme, že toto zobrazení je *konformní*, pokud zachovává úhly mezi křivkami, tedy pro každé dvě křivky je úhel mezi $\mathbf{c}(t)$ a $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$ stejný jako úhel mezi $f(\mathbf{c}(t))$ a $f(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}))$. Řekneme, že f *zachovává velkosti ploch*, pokud je velikost každé plochy $\tilde{S} \subset S_1$ stejná jako velikost plochy $f(\tilde{S})$.

Věta 3.18 Mějme zobrazení $f : S_1 \to S_2$, mapu $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S_1$ s maticí první fundamentální formy G a mapu $\tilde{\mathbf{p}} = f \circ \mathbf{p}$ na S_2 s maticí první fundamentální formy $\tilde{G}$. Pak

1. f je isometrické, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí $G = \tilde{G}$,

2. f je konformní, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí $G = \lambda\tilde{G}$, kde λ je kladná funkce na $\mathcal{O}$,

3. f zachovává velikosti ploch, právě tehdy když pro každou takovou mapu platí $\det G = \det \tilde{G}$.

Příklad 3.19 Sféra a válec

$$f([x,y,z]) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right].$$

Definice 3.20 Nechť S je orientovaná plocha, $s \in S$ a $\mathbf{N}_s$ jednotková normála v bodě s. *Druhá fundamentální forma* II_s plochy S v bodě s je kvadratická forma definovaná na tečném prostoru T_sS následujícím způsobem. Nechť $\mathbf{w} \in T_sS$ a $\mathbf{c}(t)$ libovolná křivka na ploše S taková, že $\mathbf{c}(t_0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{w}$. Pak definujeme

$$II_s(\mathbf{w}) := \ddot{\mathbf{c}}(t_0) \cdot \mathbf{N}_s.$$

Důsledek 3.21 Je-li $\mathbf{p}(u,v)$ mapa, pak je druhá fundamentální forma v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Druhá fundamentální forma se tradičně zapisuje jako $h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$. Někdy se pro koeficienty první fundamentální formy používá označení $h_{11} = L$, $h_{12} = g_{21} = M$ a $h_{22} = N$. Vzhledem k Poznámce 3.8 můžeme první fundamentální formu chápat zároveň jako kvadratickou formu v prostoru $\mathbb{R}^2$.

Poznámka 3.22 Nechť $s \in S$, $\mathbf{N}_s$ orientovaná normála, $\mathbf{w} \in T_sS$ jednotkový tečný vektor a křivka $\mathbf{c}$ normálový řez (tedy průnik plochy S s rovinou $s + \langle \mathbf{N}_s, \mathbf{w} \rangle$) parametrizovaný obloukem. Pak křivost c v bodě s je rovna $II_s(\mathbf{w})$.

Definice 3.23 Mějme orientovanou plochu S, bod na ploše s a nenulový tečný vektor $\mathbf{w} \in T_sS$. Pak definujeme normálovou křivost plochy S v bodě s ve směru $\mathbf{w}$ jako

$$\kappa_n(\mathbf{w}) := \frac{II(\mathbf{w})}{I(\mathbf{w})}.$$

Důsledek 3.24 (Meusnierova věta) Nechť $\mathbf{c}(t)$ je křivka na ploše a κ její křivost. Pak v každém jejím bodě

$$\kappa \cos \beta = \kappa_n(\dot{\mathbf{c}}),$$

kde β je úhel, který svírají vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{N}$.

Definice 3.25 Minimum κ_1 a maximum κ_2 normálové křivosti se nazývají *hlavní křivosti* a odpovídající směry se nazývají *hlavní směry.*

Věta 3.26 (Eulerova formule) V každém bodě $s \in S$ existují dva navzájem kolmé hlavní směry $\langle \mathbf{w}_1 \rangle$ (s minimální normálovou křivostí κ_1) a $\langle \mathbf{w}_2 \rangle$ (s maximální normálovou křivostí). Pro normálovou křivost v libovolném jimém směru $\mathbf{w} \in T_sS$ platí

$$\kappa_n(\mathbf{w}) = \cos^2(\alpha)\kappa_1 + \sin^2(\alpha)\kappa_2,$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\mathbf{w}$ a $\mathbf{w}_1$.

Definice 3.27 V každém bodě definujeme Gaussovu křivost K a střední křivost H jako

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Poznámka. Bohužel se používá stejné písmeno H pro střední křivost i pro matici druhé fundamentální formy. Nenechejme se tím zmást!

Definice 3.28 Bod plochy se nazývá

1. *eliptický*, jestliže v něm platí $K > 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2$ nazývá se *kruhový.*
2. *parabolický*, jestliže v něm platí $K = 0$; jestliže navíc $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ nazývá se *planární.*
3. *hyperbolický*, jestliže v něm platí $K < 0$.

Věta 3.29 (Výpočty v mapě.) Jesliže $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa na ploše a G, H příslušné matice první a druhé fundamentální formy, pak

1. hlavní křivosti a hlavní směry vyjádřené v souřadnicích vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ nalezneme jako řešení rovnice

$$(H - \lambda G)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

   s neznámými λ a $(a, b)^T$, tedy jako jakási zobecněná vlastní čísla a vektory.

2. Pro Gaussovu křivost platí

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G}.$$

3. Pro střední křivost platí

$$H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Definice 3.30 Křivku $\mathbf{c}(t)$ na ploše nazveme *hlavní*, jestliže pro každé t je $\dot{\mathbf{c}}(t)$ hlavním směrem. Křivku nazveme *asymptotickou*, jestliže pro každé t je $\kappa_n(\dot{\mathbf{c}}(t)) = 0$.

Věta 3.31 Pro křivku vyjádřenou v mapě jako $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ platí, že je

1. hlavní, právě když splňuje diferenciální rovnici

$$\det \begin{pmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = 0$$

2. asymptotická, právě když splňuje diferenciální rovnici

$$h_{11}(\dot{u})^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}(\dot{v})^2 = 0.$$

Definice 3.32 Nechť $\mathbf{c}$ je křivka na orientované ploše S a $\mathbf{c}(s)$ její parametrizace obloukem. *Geodetickou křivost* křivky $\mathbf{c}$ definujeme jako

$$\kappa_g = \mathbf{c}'' \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{c}') = \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \mathbf{N}),$$

kde $\mathbf{N}$ je normála plochy v příslušném bodě.

Věta 3.33 Pro každou regulární křivku $\mathbf{c}$ na orientované ploše S platí

$$\kappa^2 = \kappa_n(\mathbf{t})^2 + \kappa_g^2$$

a v jejích neinflexních bodech navíc platí

$$\kappa\mathbf{n} = \kappa_n(\mathbf{T})\mathbf{N} + \kappa_g(\mathbf{N} \times \mathbf{t}).$$

Definice 3.34 Křivka na orientované ploše se nazývá *geodetika*, jesliže má v každém svém bodě nulovou geodetickou křivost.

Důsledek 3.35 Křivka na orientované ploše je geodetika právě tehdy když v každém jejím neinflexním bodě je $\mathbf{n}$ kolmé na plochu, tedy $\mathbf{n} = \pm\mathbf{N}$.

Kapitola 4

Riemannova a neeukleidovská geometrie

Definice 4.1 Předpokládejme, že S je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Riemannova metrika* na S přiřazuje každému bodu $s \in S$ skalární součin g_s na tečném prostoru T_sS takový, že pro každou mapu $\mathbf{p}(u_1, u_2)$ na S jsou funkce

$$g_{ij}(u_1, u_2) := g_{\mathbf{p}(u_1,u_2)}\left(\mathbf{p}_{u_i}, \mathbf{p}_{u_j}\right), \quad i, j \in 1, 2$$

hladké. Symbolicky tuto Riemannovu metriku (ve zvolených souřadnicích) zapisujeme jako výraz

$$ds^2 := g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2.$$

Poznámka 4.2 Všechny definice a věty 3.12 - 3.18 dávají smysl a platí, když matici první formy plochy nahradíme maticí Riemannovy metriky g.

Definice 4.3 Budeme uvažovat vektorový prostor $M^3 = \{\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2] | x_i \in \mathbb{R}\}$ s kvadratickou formou $Q(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ s Minkowského signaturou $(1, 2)$. Kvadratická forma Q zadává dvoulistý hyperboloid $\{\mathbf{x} \in M^3 | Q(\mathbf{x}) = -1\}$. Jeho horní list označíme H_2, tedy

$$H_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in M^3 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}.$$

V každém bodě definujeme Riemannovu metriku jako zúžení formy Q na tečný prostor.

Definice 4.4 Přímky na H_2 definujeme jako průniky rovin procházejících počátkem s H_2. Úsečky definujeme jako souvislé omezené úseky přímek.

Věta 4.5 Grupa $SO(2, 1)$, kterou definujeme jako podgrupu všech regulárních matic generovanou maticemi tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \quad a \quad \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří grupu přímých izometrií plochy H_2 s Riemannovou metrikou.

Definice 4.6 Množina U spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2+dv^2)$$

se nazývá Poincarého model hyperbolické roviny.

Věta 4.7 Zobrazení

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}, \frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2},\right)$$

je stereografickou projekcí mezi diskem U a hyperboloidem H_2 a je isometrií vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám.

Definice 4.8 Množina $H_+ = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2).$$

se nazývá polorovinový Poincarého model hyperbolické roviny.

Věta 4.9 Zobrazení, které bodu $z = x + iy \in H_+$ přiřazuje bod $\zeta = u + iv \in U$, pro který platí

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}$$

je isometrií mezi H_+ a U vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám a jeho inverze má tvar

$$z = \frac{i(1+\zeta)}{1-\zeta}.$$

Věta 4.10 Zobrazení tvaru

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc = 1$$

tvoří grupu přímých isometrií H_+.

Věta 4.11 Jsou-li $P = [0,a], Q = [0,b]$, $a < b$ dva body v hyperbolické rovině a $c(t) = (0,t), t \in \langle a,b \rangle$ úsečka, která je spojuje, pak má křivka c nejkratší délku mezi všemi regulárními křivkami v H, které začínají v bodě P a končí v bodě Q.

Věta 4.12 V libovolném modelu hyperbolické geometrie je plocha hyperbolického trojúhelníka s úhly α, β, γ rovna

$$\pi - (\alpha+\beta+\gamma).$$

Kapitola 5

Hlubší výsledky o plochách.

Definice 5.1 Řekneme, že křivka $\mathbf{c}(t)$ na ploše S je *parametrizovaná geodetika*, jestliže v každém jejím bodě platí

$$\ddot{\mathbf{c}}(t) \perp T_{\mathbf{c}(t)}S.$$

Věta 5.2 Křivka $\mathbf{c}(t)$ je parametrizovaná geodetika na ploše S právě tehdy, když $\mathbf{c}$ je geodetika na ploše S a parametrizace parametrem t má konstatní rychlost $|\dot{\mathbf{c}}(t)|$.

Věta 5.3 (Soustava rovnic pro geodetiky) Křivka v mapě $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ je parametrizovaná geodetika právě tehdy, když jsou splněny rovnice

$$\frac{d}{dt}(g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v}) = \frac{1}{2}([g_{11}]_u\dot{u}^2 + 2[g_{12}]_u\dot{u}\dot{v} + [g_{22}]_u\dot{v}^2),$$

$$\frac{d}{dt}(g_{12}\dot{u} + g_{22}\dot{v}) = \frac{1}{2}([g_{11}]_v\dot{u}^2 + 2[g_{12}]_v\dot{u}\dot{v} + [g_{22}]_v\dot{v}^2),$$

kde $G = \{g_{i,j}\}$ je matice první fundamentální formy plochy.

Věta 5.4 Pro daný bod $s \in S$ a nenulový vektor $\mathbf{w} \in T_s$ existuje $\epsilon > 0$ a právě jedna parametrizovaná geodetika $\mathbf{c} : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ taková, že $\mathbf{c}(0) = s$ a $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{w}$.

Věta 5.5 Pro každý bod s na ploše S existuje mapa $\mathbf{p}(u, v)$ taková, že $\mathbf{p}(0, 0) = s$ a matice první fundamentální formy plochy vůči mapě p má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.6 (Euler-Lagrangeovy rovnice) Nechť $F(t, u_1, v_1, u_2, v_2)$ je hladká funkce na $\langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}^4$. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^2$ jsou dva pevně zvolené body. Pro libovolnou křivku

$$\mathbf{c}(t) = [u(t), v(t)] : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^2$$

takovou, že $\mathbf{c}(\alpha) = A$, $\mathbf{c}(\beta) = B$ definujeme funkcionál

$$\Phi(\mathbf{c}) = \int_\alpha^\beta F(t, u, v, \dot{u}, \dot{v})dt.$$

Jestliže křivka $\mathbf{c}$ je globálním minimem funkcionálu Φ pak pro $\mathbf{c}$ platí pro každou hodnotu t následující rovnice

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}(t,u,v,\dot{u},\dot{v})\right) &= \frac{\partial F}{\partial u_1}(t,u,v,\dot{u},\dot{v}),\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial v_2}(t,u,v,\dot{u},\dot{v})\right) &= \frac{\partial F}{\partial v_1}(t,u,v,\dot{u},\dot{v}).\end{aligned}$$

Věta 5.7 Jestliže je křivka na ploše nejkratší spojnicí svých krajních bodů, pak je geodetikou.

Věta 5.8 (Theorema egregium.) Gaussovu křivost K lze vypočítat pomocí koeficientů matice první fundamentální formy G a jejich derivací.

Poznámka. Přesný vzorec pro K má poměrně komplikovaný tvar

$$\frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(g_{11})_{vv}+(g_{12})_{uv}-\frac{1}{2}(g_{22})_{uu} & \frac{1}{2}(g_{11})_u & (g_{12})_u-\frac{1}{2}(g_{11})_v \\ (g_{12})_v-\frac{1}{2}(g_{22})_u & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_v & g_{12} & g_{22}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(g_{11})_v & \frac{1}{2}(g_{22})_u \\ \frac{1}{2}(g_{11})_v & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}(g_{22})_u & g_{12} & g_{22}\end{vmatrix}}{(\det G)^2}.$$

Definice 5.9 Řekneme, že křivka $\mathbf{c}(t)$ na ploše je jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka, jestliže existuje mapa $\mathbf{p}: \mathcal{O} \to S$ taková, že $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{c}}(t))$, kde $\tilde{\mathbf{c}}(t) = [u(t), v(t)]$ je jednoduchá, uzavřená křivka v rovině (viz Def. 1.16), kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) a navíc $\mathit{Int}\,\tilde{\mathbf{c}} \subset \mathcal{O}$. Označme $\mathit{Int}\,\mathbf{c} = \mathbf{p}(\mathit{Int}\,\tilde{\mathbf{c}})$.

Věta 5.10 Nechť $\mathbf{c}(s)$ jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka na ploše S. Pak

$$\int_{\mathit{Int}\,\mathbf{c}} K\,dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} k_g\,ds,$$

kde k_g je geodetická křivost křivky $\mathbf{c}$ a K je Gaussova křivost plochy $\mathbf{p}$.

Definice 5.11 (Křivočarý mnohoúhelník na ploše) Řekneme, že $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{c}}(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená, kladně orientovaná křivka na ploše pokud splňuje všechny podmínky definice 5.9 kromě hladkosti $\mathbf{c}(t)$ v konečně mnoha bodech $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, ve kterých je pouze spojitá a existují jednostranné nenulové derivace $\mathbf{c}'_-(t_i)$ a $\mathbf{c}'_+(t_i)$ pro všechna $i = 0, \ldots, n$,.

Množinu $\mathcal{M} = \mathbf{c} \cup \mathit{Int}(\mathbf{c})$ budeme nazývat křivočarý mnohoúhleník, body $\mathbf{c}(t_i)$ se nazývají vrcholy tohoto mnohoúhleníka a křivka $\mathbf{c}$ zúžená na dílčí intervaly dělení se nazývá hranou mnohoúhelníka. Křivka $\mathbf{c}$ se nazývá obvod mnohoúhleníka. Orientovaný (proti směru hodinových ručiček) úhel $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$ mezi vektrory $\mathbf{c}'_-(t_i)$ a $\mathbf{c}'_+(t_i)$ se nazývá vnější úhel mnohoúhelníka u vrcholu $\mathbf{c}(t_i)$.

Věta 5.12 Nechť $\mathbf{c}(t)$ je obvod křivočarého mnohoúhelníka na ploše S s vnějšími orientovanými úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ u svých vrcholů. Pak

$$\int_{\mathit{Int}\mathbf{c}} K\,dS = 2\pi - \int_{\mathbf{c}} k_g\,ds - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Důsledek 5.13 Předpokládejme, že **c** je křivočarý trojúhelník **p** s vnitřními úhly α, β, γ u svých vrcholů a že jeho hrany jsou jsou geodetiky. Pak

$$\int_{Int\,\mathbf{c}} K\,dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Definice 5.14 (Triangulace a Eulerova charakteristika plochy) Nechť S je kompaktní plocha. Její triangulace je soubor křivočarých mnohoúhelníků $\mathcal{M}_i, i = 1, \ldots, k$ na S s následujícími vlastnostmi:
(1) existuje atlas na S takový, že každý mnohoúhelník $\mathcal{M}_i$ se vejde i se svým obvodem do některé mapy tohoto atlasu;
(2) $S = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{M}_i$;
(3) pro $i \neq j$ je $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ buď prázdná množina, nebo společná hrana, nebo společný vrchol;
(4) Každá hrana triangulace je hrana právě dvou mnohoúhelníků.

Eulerova charakteristika plochy S je číslo, určené následujícím způsobem: zvolme trinagulaci S a označme V počet všech vrcholů, H počet všech hran, a S počet všech mnohoůhelníků (stěn). Pak Eulerova charakteristika χ se definuje vztahem

$$\chi = V - H + S.$$

Věta 5.15 Nechť S je kompaktní plocha, pak

$$\int_S K\,dS = 2\pi\chi,$$

kde K je Gaussova křivost a χ je Eulerova charakteristika S.

Důsledek 5.16 Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace. $\int_S K\,dS$ se nemění při hladké deformaci kompaktní plochy.