

Geometrie pro počítačovou grafiku

Eukleidovské shodnosti v rovině

Zbyněk Šír

Matematický ústav UK



Eukleidovské shodnosti

- **Definice:** Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

- **Lemma:** Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.
- **Věta:** Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a \mathbf{A} je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Souřadnice bodů i vektorů bude psát jako sloupcové vektory.

Důsledky předchozí věty

- Všechny shodnosti prostoru \mathbb{R}^n tvoří grupu $\mathbb{E}(n)$. Její dimenze (počet stupňů volnosti) je $n(n+1)/2$.
- Lineární zobrazení **vektorového** prostoru \mathbb{R}^n do sebe dané maticí **A** se nazývá asociované lineární zobrazení k f .
- Bodům, které se zobrazí na sebe říkáme samodružné body $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Vlastním směrům asociovaného zobrazení říkáme samodružné směry.
- Shodné zobrazení nazveme přímé, když $\det \mathbf{A} = 1$ a nepřímé, když $\det \mathbf{A} = -1$.
- Reálná vlastní čísla matice A mohou být jen ± 1 .
- Přímé shodnosti tvoří podgrupu.
- Shodná zobrazení, kde $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ tvoří podgrupu posunutí, což je vlastně vektorový prostor \mathbb{R}^n .
- Shodná zobrazení, kde $\mathbf{p} = 0$ tvoří podgrupu isometrií vektorového prostoru \mathbb{R}^n , která se označuje $ON(n)$ a nazývá se ortonormální grupa.

Skládání shodných zobrazení

- Jak se shodná zobrazení vlastně skládají? Mějme $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$ a $g(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{q}$, pak

$$g \circ f(\mathbf{x}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}).$$

Tedy grupová operace mezi dvojicemi má tvar

$$(\mathbf{B}, \mathbf{q}) \circ (\mathbf{A}, \mathbf{p}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{p}).$$

- Jedná se o klasický příklad semidirektního součinu

$$E(n) = ON(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

- Namísto $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}$ můžeme psát

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Skládání a inverze funguje tak jak má.

- Jedná se o vnoření $E(n)$ do grupy regulárních matic $GL(n+1)$.

Každá přímá shodnost v \mathbb{R}^2 má tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & p_x \\ b & a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

a každá nepřímá shodnost má tvar

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & p_x \\ b & -a & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $a^2 + b^2 = 1$. **Důkaz:** snadný

Jak parametrizovat tuto grupu?

Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$.

Jak parametrizovat tuto grupu?

Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

Jak parametrizovat tuto grupu?

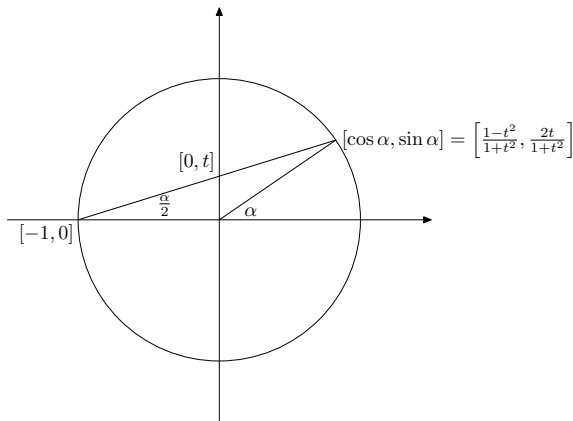
Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad b = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$

Jak parametrizovat tuto grupu?

Kružnice $a^2 + b^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

$$a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad b = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$



Příklady

- Ověřte, že následující zobrazení je shodnost reálné roviny a určete samodružné body a směry.

$$x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2. \quad (2)$$

- Nalezněte všechny shodnosti, pro které je bod $[4, 0]$ a směry $\langle(1, 1)\rangle$ a $\langle(1, -1)\rangle$ samodružné.
- Rovnoměrně animujte přesun objektu v rovině z jedné polohy do druhé.
- Analyzujte a vykreslete kuželosečku s rovnicí

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 - 280x + 290y + 325 = 0.$$

- Napište v prostoru rovnice osové souměrnosti podle přímky o parametrickém vyjádření $x = 1 + t$, $y = 2 - t$ a $z = 3t$.

Věta: Každá přímá shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ je identita nebo posunutí nebo otočení.