2 Diferenciální geometrie křivek

Příklad 2.1. *Uvažujme v* $\mathbb{R}^2$ *jednotkovou kružnici* $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *bez bodu* $(-1, 0)$. *Tuto množinu parametrizujme jako* $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ *pro* $t \in (-\pi, \pi)$ *a uvažujme reparametrizaci* $t = 2 \arctan s$ *pro* $s \in (-\infty, \infty)$. *Nová parametrizace má tvar*

$$\mathbf{c}(s) = \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2} \right), \qquad s \in (-\infty, \infty).$$

Definice 2.2. *Buď* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval (případně neomezený), spojité zobrazení* $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ *se nazývá* parametrická křivka *v* $\mathbb{R}^n$. *Množina* $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ *se nazývá* obraz křivky. *Parametrická křivka se nazývá* hladká, *jestliže* $\mathbf{c}$ *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *(tedy má spojité derivace všech řádů) a* regulární, *jestliže* $\mathbf{c}$ *je regulární, tedy* $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)^T$ *pro každé* $t \in I$.

Poznámka 2.3.

1. *Je-li* I *uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na* I *restrikci na* I *hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.*

2. *Parametrická křivka je popsána n-ticí funkcí* $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))^T$ *jedné proměnné definovaných na* I.

3. *Její derivace je lineární zobrazení (totální diferenciál), které vyjádříme sloupcovým vektorem (maticí* $n \times 1$*) a budeme ho chápat jako (tečný) vektor* $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^n$*, který závisí na parametru. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti* $||\mathbf{c}'(t)||$*, která je hladká a kladná.*

4. *Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy* $\mathcal{C}^\infty$*), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti.*

Definice 2.4. *Je-li* $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ *regulární parametrická křivka a* $\phi : \tilde{I} \to I$ *hladký difeomorfismus intervalu* $\tilde{I}$ *na* I *(tedy hladká bijekce s hladkým inverzním zobrazením), je* $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ *regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako* c. *Difeomorfismus* ϕ *pak nazýváme změnou parametru a* $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. *Je-li navíc* $\phi' > 0$ *na* $\tilde{I}$, *nazveme* $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci.*

Definice a lemma 2.5. *Být reparametrizací je relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme* křivka. *Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme* parametrizací *této křivky. Být reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme* orientovaná křivka.

Důkaz. *Difeomorfismus je zobrazení* $\phi : \tilde{I} \to I$ *které je bijekce, hladké* C^∞ *a* $\phi' \neq 0$ *všude. Z toho plyne, že* ϕ^{-1} *je také difeomorfismus.*

- *Tranzitivita: složení difeomorfismů je difeomorfismus, tedy (*$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi$ *a* $\tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \psi$*)* $\Rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{c} \circ (\phi \circ \psi)$

- *Symetrie: inverze defeomorfismu je difeomorfismus, tedy když* $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi \Rightarrow \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \phi^{-1}$
- *Reflexivita: identita je difeomorfismus a tedy* $\mathbf{c} = \mathbf{c} \circ id$
- *Orientace: složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy*

$$(id' > \ 0);\ (\phi' > \ 0) \Rightarrow (\phi^{-1})' > 0;\ (\phi' > 0 \,\&\, \psi' > 0) \Rightarrow (\phi \circ \psi)' > 0.$$

$\square$

Poznámka 2.6. *Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem* křivka *(případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz. V diferenciální geometrii studujeme právě takové vlastnosti křivek, které se nemění při reparametrizaci.*

Poznámka 2.7. *V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku* $\mathbf{c}(t)$ *budeme její reparametrizaci* $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ *označovat jednoduše* $\mathbf{c}(s)$*. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například* $\mathbf{c}'$ *místo* $\mathbf{c}'(t)$ *a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci* $\frac{d}{dt}$ *a tečka derivaci* $\frac{d}{ds}$.

Lemma 2.8. *Pro derivace dvou parametrizací* $\mathbf{c}(t)$ *a* $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ *téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí*

$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\,\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. *Přímý výpočet derivace složené funkce,*

1.
$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{d}{ds}\mathbf{c}(\phi(s)) = \frac{d}{dt}\mathbf{c}(t)\frac{d\phi}{ds} = \dot\phi\mathbf{c}'.$$

2.
$$\dot{\mathbf{c}} = \dot\phi\mathbf{c}' \qquad |\ \frac{d}{ds}$$
$$\ddot{\mathbf{c}} = \ddot\phi \cdot \mathbf{c}' + \dot\phi \cdot \dot\phi \cdot \mathbf{c}'' = \ddot\phi \cdot \mathbf{c}' + (\dot\phi)^2 \cdot \mathbf{c}''$$

3.
$$\dddot{\mathbf{c}} = \dddot\phi \cdot \mathbf{c}' + \ddot\phi \cdot \dot\phi \cdot \mathbf{c}'' + 2\dot\phi \cdot \ddot\phi \cdot \mathbf{c}'' + (\dot\phi)^2 \cdot \dot\phi \cdot \mathbf{c}''' = \dddot\phi \cdot \mathbf{c}' + 3\dot\phi \cdot \ddot\phi \cdot \mathbf{c}'' + (\dot\phi)^3 \cdot \mathbf{c}'''$$

$\square$

2.1 Rovinné křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této kapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v $\mathbb{R}^2$.

Definice 2.9. *V každém bodě hladké regulární parametrické křivky* $\mathbf{c}(t)$ *v* $\mathbb{R}^2$ *definujeme* jednotkový tečný vektor

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme inflexní.

Věta 2.10. *Při reparametrizaci křivky v* $\mathbb{R}^2$ *zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.*

Důkaz. *S využitím lemmatu 2.8*

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{||\dot{\mathbf{c}}||} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{||\dot{\phi}\mathbf{c}'||} = sign(\dot{\phi})\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'(t)||} = sign(\dot{\phi})\mathbf{t}(t).$$

Dále platí

$$\mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} sign(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = sign(\dot{\phi})\mathbf{n}_*(t).$$

Konečně

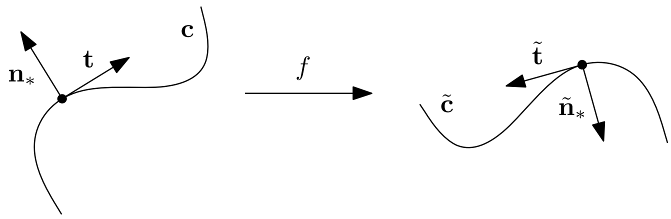
$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{||\dot{\mathbf{c}}||^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')\begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}\right]}{||\dot{\phi}\mathbf{c}'||^3} = sign(\dot{\phi})\frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3} = sign(\dot{\phi})\kappa_z(t).$$

$\square$

Věta 2.11. *Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem* $\mathbb{R}^2$*. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru* $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$*, parametrickou křivku* $\mathbf{c}(t)$ *a v jejím libovolném bodě veličiny* κ_z*,* $\mathbf{t}$*,* $\mathbf{n}_*$*. Pak křivka* $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ *má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost* $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$*, tečný vektor* $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$ *a normálový vektor* $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})A\mathbf{n}_*$.

Důkaz. *Uvědomme si, že* $\det A = \pm 1$. *Navíc platí, že*

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t).$$



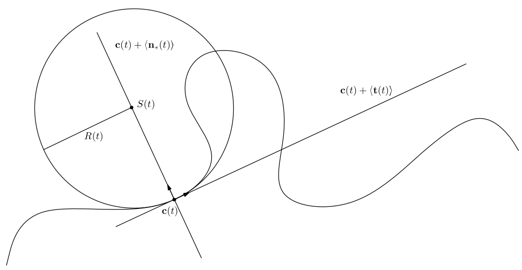
Tedy

- $$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{||\tilde{\mathbf{c}}'||^3} = \frac{\det(A\mathbf{c}', A\mathbf{c}'')}{||A\mathbf{c}'||^3} = \frac{\det(A)\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3} = (\det A)\kappa_z,$$

  neboť pro libovolný vektor $||v|| = \sqrt{v^T v} \Rightarrow ||Av|| = \sqrt{(Av)^T Av} = \sqrt{v^T A^T A v} = \sqrt{v^T v} = ||v||$.
- $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{||\tilde{\mathbf{c}}'||} = \frac{A\mathbf{c}'}{||A\mathbf{c}'||} = A(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}) = A\mathbf{t}$
- $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\mathbf{t} = \det(A) A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \det(A) A\mathbf{n}_*.$

□

Definice 2.12. *Pro každou křivku* $\mathbf{c}$ *definujeme v každém bodě její* tečnou přímku *jako množinu* $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ *a* normálovou přímku *jako množinu* $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}_*(t) \rangle$. *Dále v každém neinflexním bodě definujeme její* orientovaný poloměr křivosti *jako* $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$, *její* střed křivosti *jako bod* $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$ *a kružnici se středem* $S(t)$ *a poloměrem* $R(t)$ *nazýváme* oskulační kružnice *v bodě* $\mathbf{c}(t)$.



Věta 2.13. *Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic).*

Důkaz. *Kontaktem myslíme nejvyšší možnou shodu derivace ve vhodné parametrizaci. Uvažujme tedy dvě křivky a nějakým způsobem sjednocené parametrizace (například obě obloukem)* $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ *a zajímá nás jejich kontakt v bodě* t_0

- *kontakt 0. řádu* $\rightarrow \mathbf{c}_1(t_0) = \mathbf{c}_2(t_0)$
- *kontakt 1. řádu* $\rightarrow \mathbf{c}_1'(t_0) = \mathbf{c}_2'(t_0)$
- *kontakt 2. řádu* $\rightarrow \mathbf{c}_1''(t_0) = \mathbf{c}_2''(t_0)$

Díky lineární reparametrizaci postačí tuto vlastnost studovat v bodě $t = 0$ *a díky shodnosti můžeme navíc předpokládat, že* $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ *a* $\mathbf{c}'(0) = (c_x'(0), 0)$*, kde* $c_x'(0) > 0$*. Máme tedy* $\mathbf{t}(0) = (1, 0)$ *a* $\mathbf{n}_*(0) = (0, 1)$*. V tomto bodě uvažujme Taylorův rozvoj křivky*

$$\mathbf{c}(t) = \left(c_x'(0)t + \frac{1}{2}c_x''(0)t^2 + o(t^2), \frac{1}{2}c_y''(0)t^2 + o(t^2) \right).$$

Dosazením do obecné rovnice přímky $Ax + By + C = 0$*, pro* $A \neq 0$ *nebo* $B \neq 0$ *dostáváme:*

$$C + Ac_x'(0)t + \left[\frac{1}{2}Ac_x''(0) + \frac{1}{2}Bc_y''(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Odtud vyvodíme, že pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit $C = 0$ *a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí navíc platit* $A = 0$*, čímž dostáváme* $By = 0$*, tedy osu* x *a tím tečnou přímku a* B *musí být nenulové. Kontakt vyššího řádu není možný, neboť pro kontakt řádu 2 by* $c_y''(0) = 0 \Rightarrow \kappa_z(0) = 0$*, což je spor s předpokladem neinflexního bodu.*

Dosazením do obecné rovnice kružnice $(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 - R^2 = 0$ *dostáváme:*

$$(S_x^2 + S_y^2 - R^2) - 2S_x c_x'(0)t + \left[c_x'(0)^2 - 2S_x \frac{1}{2}c_x''(0) - 2S_y \frac{1}{2}c_y''(0) \right] t^2 + o(t^2) = 0$$

Tedy pro kontakt řádu 0 (jednonásobný průsečík) musí platit $R^2 = S_x^2 + S_y^2$ *a pro kontakt řádu 1 (dvojnásobný průsečík) musí platit* $S_x = 0$*. Pro kontakt řádu 2 (trojnásobný průsečík) pak* $S_y = c_x'(0)^2 / c_y''(0) = 1/\kappa_z(0)$*, neboť*

$$\kappa_z(0) = \frac{\begin{vmatrix} c_x'(0) & c_x''(0) \\ 0 & c_y''(0) \end{vmatrix}}{|c_x'(0)|^3} = c_y''(0)/c_x'(0)^2,$$

čímž dostáváme oskulační kružnici. Kontakt vyššího řádu není obecně možný, neboť jsme vyčerpali všechny volné parametry. Může nastal pouze v případě, že $\kappa_z'(0) = 0$*, tedy v kritickém bodě křivosti, například v jejím maximu.* □

Věta 2.14. *Pro hladkou regulární parametrickou křivku* $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ *platí*

$$\mathbf{t}'(t) = ||\mathbf{c}'(t)|| \kappa_z(t) \mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ *splňující* $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ *pro* $t \in I$ *a pro znaménkovou křivost pak platí*

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$*, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.*

Důkaz. *Uvědomme si, že* $||\mathbf{c}'|| = \sqrt{c' \cdot c'}$. *Derivováním a úpravami dostaneme*

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}\right)' = \frac{\sqrt{c' \cdot c'} \cdot c'' - \frac{1}{2}\frac{2 \cdot c' \cdot c''}{\sqrt{c' \cdot c'}} \cdot c'}{c' \cdot c'} = \frac{||\mathbf{c}'||^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||^3}.$$

Skalárním součinem předchozí rovnice získáme $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{t}' = 0$ *a proto je* $\mathbf{t}'$ *násobkem* $\mathbf{n}_*(t)$, *tedy* $\mathbf{t}' = K\mathbf{n}_*(t)$. *Z rovností*

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K\mathbf{n}_*(t)) = K \underbrace{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*(t))}_{=1} = K$$

a

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det\left(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}, \frac{||\mathbf{c}'||^2\mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||^3}\right) = \det\left(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}, \frac{||\mathbf{c}'||^2\mathbf{c}''}{||\mathbf{c}'||^3}\right) - \underbrace{\det\left(\frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||}, \frac{(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||^3}\right)}_{0} =$$

$$\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \cdot \frac{1}{||\mathbf{c}'||^2} = \underbrace{\frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}'||^3}}_{\kappa_z} \cdot \underbrace{||\mathbf{c}'||}_{=r}$$

dostaneme, že $K = r\kappa_z$.
Funkce θ *je spojitou verzí argumentu funkce* $\mathbf{t}(t)$ *a její existence a diferencovatelnost je známá z komplexní analýzy.* $\mathbf{t}'(t) = \theta(t)' \underbrace{(-\sin\theta(t), \cos\theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$ *z předchozí části máme* $\theta'(t) = r(t)\kappa_z(t)$.

□

Věta 2.15. *Na otevřeném intervalu* I *budiž zadány dvě hladké reálné funkce* $f(t)$, $r(t)$, *přičemž* $r(t) > 0$ *pro* $t \in I$. *Pak existuje až na přímou shodnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka* $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, *pro kterou platí*

$$||\mathbf{c}'(t)|| = r(t), \qquad \kappa_z(t) = f(t).$$

Důkaz. *Zafixujme* $t_0 \in I$ *libovolné a definujeme funkci* $\theta(t)$ *aby platilo*

- $\theta'(t) = ||\mathbf{c}'(t)|| \cdot \kappa_z(t) = r(t) \cdot f(t)$, *tedy* θ *nalezneme jako primitivní funkci k* $r(t) \cdot f(t)$, *která jistě existuje, protože* $r(t) \cdot f(t)$ *je hladká,*
- $\theta(t_0) = \theta_0$, *kde* θ_0 *je libovolná konstanta.*

Nyní položíme

$$\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)).$$

Zřejmě $||\mathbf{t}(t)|| = 1$ *a můžeme tedy konečně definovat*

$$\mathbf{c}'(t) = ||\mathbf{c}'(t)|| \cdot \mathbf{t}(t) = r(t) \cdot (\cos\theta(t), \sin\theta(t)).$$

$\mathbf{c}(t)$ *nalezneme jako primitivní funkci k* $\mathbf{c}'(t)$, *což lze, protože* $\mathbf{c}'(t)$ *je hladká funkce. Zvolíme* $X, Y \in \mathbb{R}$ *libovolná a nechť* $\mathbf{c}_x(t_0) = X$ *a* $\mathbf{c}_y(t_0) = Y$.

V průběhu konstrukce funkce $\mathbf{c}(t)$ *jsem volili polohu bodu* $\mathbf{c}(t_0) = [X, Y]$ *a směr tečného vektoru* $\mathbf{t}(t_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, *čímž jsme určili křivku jednoznačně až na přímou podobnost.*

□

2.2 Prostorové křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této kapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v $\mathbb{R}^3$.

Definice 2.16. *V každém bodě hladké regulární parametrické křivky* $\mathbf{c}(t)$ *v* $\mathbb{R}^3$ *definujeme* jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}(t)$ *a* křivost $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová se nazývá inflexní bod. *V každém neinflexním bodě dále definujeme* jednotkový binormálový vektor $\mathbf{b}(t)$, jednotkový normálový vektor $\mathbf{n}(t)$ *a* torzi $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ *tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi* $\mathbb{R}^3$*, která se nazývá* Frenetův repér.

Věta 2.17. *Při reparametrizaci křivky v* $\mathbb{R}^3$ *zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.*

Důkaz. *Využijeme lemmatu 2.8 a označíme*

$$M = \begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix}.$$

Dále spočítáme

$$\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}} = (\dot\phi \cdot \mathbf{c}') \times (\ddot\phi\mathbf{c}' + \dot\phi^2\mathbf{c}'') = (\dot\phi \cdot \mathbf{c}') \times (\ddot\phi\mathbf{c}') + (\dot\phi \cdot \mathbf{c}') \times (\dot\phi^2\mathbf{c}'') = 0 + \dot\phi^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'').$$

Nyní už máme vše potřebné k důkazu věty, a počítáme

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{||\dot{\mathbf{c}}||} = \frac{\dot\phi\mathbf{c}'}{|\dot\phi| \cdot ||\mathbf{c}'||} = \mathit{sign}(\dot\phi) \cdot \mathbf{t}(t),$$

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{||\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}||} = \frac{\dot\phi^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{|\dot\phi^3| \cdot ||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||} = \mathit{sign}(\dot\phi) \cdot \mathbf{b}(t),$$

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \mathit{sign}(\dot\phi)\mathbf{b}(t) \times \mathit{sign}(\dot\phi)\mathbf{t}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t) = \mathbf{n}(t),$$

$$\kappa(s) = \frac{||\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}||}{||\dot{\mathbf{c}}||^3} = \frac{|\dot\phi^3| \cdot ||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||}{|\dot\phi|^3 \cdot ||\mathbf{c}'||^3} = \kappa(t),$$

$$\tau(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}})}{||\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}||^2} = \frac{\det(M) \cdot \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{\dot\phi^6 \cdot ||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||^2} = \tau(t).$$

□

Věta 2.18. *Křivost, tečný a normálový vektor jsou equivariantní vůči shodnostem* $\mathbb{R}^3$*. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru* $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$*, parametrickou křivku* $\mathbf{c}(t)$ *a v jejím libovolném bodě veličiny* κ*,* $\mathbf{t}$ *a v neinflexním bodě navíc* τ*,* $\mathbf{n}$*,* $\mathbf{b}$*. Pak křivka* $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ *má v odpovídajícím bodě křivost* $\tilde{\kappa} = \kappa$ *a tečný vektor* $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$*. V neinflexních bodech má navíc torzi* $\tilde{\tau} = (\det \mathbf{A})\tau$*, normálový vektor* $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{An}$ *a binormálový vektor* $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{Ab}$*.*

Důkaz. *Dokažme nejprve, že pro ortonormální matici* A *a libovolné vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *platí* $A\mathbf{x} \times A\mathbf{y} = \det(A)A(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$*. Skutečně,* $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *dostáváme*

$$\mathbf{z} \cdot (A\mathbf{x} \times A\mathbf{y}) = \det(\mathbf{z}, A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \det(A)\det(A^T\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(A)(A^T\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) =$$

$$\det(A)(\mathbf{z} \cdot A(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{z} \cdot (\det(A)A(\mathbf{x} \times \mathbf{y})).$$

Nyní už snadno ověříme dokazované vztahy. Platí totiž, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = A\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = A\mathbf{c}''(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'''(t) = A\mathbf{c}'''(t).$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{||\tilde{\mathbf{c}}'||} = \frac{A\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||} = A\mathbf{t},$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''}{||\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''||} = \frac{\det(A)A(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||} = \det(A)A\mathbf{b},$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{b}} \times \tilde{\mathbf{t}} = \det(A)(A\mathbf{b} \times A\mathbf{t}) = A(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = A\mathbf{n},$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{||\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''||}{||\tilde{\mathbf{c}}'||^3} = \frac{|\det(A)| \cdot ||A(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')||}{||A\mathbf{c}'||^3} = \frac{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||}{||\mathbf{c}'||^3} = \kappa$$

a konečně

$$\tilde{\tau} = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}'|\tilde{\mathbf{c}}''|\tilde{\mathbf{c}}''')}{||\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''||^2} = \frac{\det(A) \cdot \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||^2} = \det(A) \cdot \tau.$$

□

Definice 2.19. *Pro hladkou regulární křivku* $\mathbf{c}(t)$ *v* $\mathbb{R}^3$ *definujeme v každém bodě* tečnou přímku *jako množinu* $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$ *a dále v každém neinflexním bodě definujeme*

- oskulační rovinu *jako množinu* $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle$,
- rektifikační rovinu *jako množinu* $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$,
- normálovou rovinu *jako množinu* $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$.

Definice a lemma 2.20. *O hladké parametrizované křivce* $\mathbf{c}(t)$ *řekneme, že je* parametrizovaná obloukem *nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna* $t \in I$ *platí* $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$*. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li* $\mathbf{c}(t)$ *nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací* $t = \phi(s)$*,* $\phi(s) = \pm s + s_0$*, kde* s_0 *je libovolná konstanta.*

Důkaz. *Mějme libovolnou hladkou regulární křivku* $\mathbf{c}(t)$. *Pak platí, že* $||\mathbf{c}'(t)|| > 0$, *což je jistě hladká funkce, a tudíž můžeme definovat*

$$\psi(t) = \int ||\mathbf{c}'(t)||dt.$$

Pak tedy platí vztah $\psi(t)' = ||\mathbf{c}'(t)||$. ψ *je prostá, tudíž definujeme* $\phi = \psi^{-1}$.
Definujeme nyní $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, *z čehož plyne*

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi} \cdot \mathbf{c}' = \frac{1}{\psi'} \cdot \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||} = \mathbf{t}.$$

Z toho ovšem plyne, že $||\dot{\mathbf{c}}|| = 1$, *tedy jsme nalezli parametrizaci obloukem.*
Předpokládejme nyní, že máme křivku $\mathbf{c}(t)$ *parametrizovanou obloukem a její obloukovou reparametrizaci* $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$. *Pak*

$$1 = ||\dot{\mathbf{c}}|| = ||\mathbf{c}'|| \cdot |\dot{\phi}| = 1 \cdot |\dot{\phi}|,$$

tedy nutně $|\dot{\phi}| = 1 \Rightarrow \dot{\phi} = \pm 1 \Rightarrow \phi = \pm s + s_0$.
Naopak, měli bychom křivku $\mathbf{c}(t)$ *parametrizovanou obloukem, pak takovou reparametrizací* $\phi(s) = \pm s + s_0$ *opět dostaneme parametrizaci obloukem z výpočtu výše.* □

Lemma 2.21. *Pro křivku hladkou* $\mathbf{c}(t)$ *v* $\mathbb{R}^3$ *parametrizovanou obloukem v každém bodě platí* $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ *a v každém neinflexním bodě navíc platí* $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}''(t)||}$ *a* $\kappa(t) = ||\mathbf{c}''(t)|| = ||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||$.

Důkaz. *Mějme* $\mathbf{c}(t)$ *parametrizovanou obloukem. Zřejmě platí* $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$.
Ze vztahu $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$ *odvodíme*

$$\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 1 \qquad |\frac{d}{dt}$$

$$2\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) = 0,$$

tedy $\mathbf{c}'(t) \perp \mathbf{c}''(t)$, *čehož plyne, že* $||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|| = ||\mathbf{c}'|| \cdot ||\mathbf{c}''|| = ||\mathbf{c}''||$.
Nyní snadno spočítáme, že v neinflexních bodech

$$\kappa = \frac{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||}{||\mathbf{c}'||^3} = ||\mathbf{c}''||$$

a užitím Lemátka máme

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||} \times \frac{\mathbf{c}'}{||\mathbf{c}'||} = \frac{1}{||\mathbf{c}''||} \cdot ((\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \times \mathbf{c}') = \frac{-1}{||\mathbf{c}''||} \cdot (\mathbf{c}' \times (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')) =$$

$$\frac{-1}{||\mathbf{c}''||} \cdot ((\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}'') = \frac{\mathbf{c}''}{||\mathbf{c}''||}.$$

□

Věta 2.22 (Frenetovy vzorce)**.** *Je-li* $\mathbf{c}(t)$ *hladká křivka v* $\mathbb{R}^3$ *parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí*

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = (\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ *jako*

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Důkaz. *Uvažme tři vektory* $(\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t))$*, které závisí na parametru a pro jeho libovolnou hodnotu* $t \in I$ *tvoří ON bázi* $\mathbb{R}^3$*. Libovolný vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *lze (pro pevné* t*) vyjádřit jako*

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_1})\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_2})\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_3})\mathbf{v}_3.$$

Tedy speciálně pro každé pevné t *platí*

$$\mathbf{v}_i' = (\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v_1})\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v_2})\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v_3})\mathbf{v}_3, \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Zřejmě lze psát

$$(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3') = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)M,$$

kde M *je matice* 3×3 *s položkami* $m_{ji} = \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_j$*.*

Protože platí $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$*, derivováním podle* t *dostáváme rovnost* $\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_j' \cdot \mathbf{v}_i = 0$*, čili* $\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_j = -\mathbf{v}_j' \cdot \mathbf{v}_i$ *a tedy* M *musí být antisymetrická*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A & -B \\ A & 0 & -C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}.$$

V našem případě, kdy N$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ *a* t *odpovídá parametrizaci obloukem platí podle Lemma 2.21*

$$\mathbf{t}' = \mathbf{c}'' = ||\mathbf{c}''|| \cdot \frac{\mathbf{c}''}{||\mathbf{c}''||} = \kappa\mathbf{n},$$

a tedy dostáváme $A = \kappa, B = 0$*. Snadno nahlédneme, že* $C = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b}$*, a tedy počítáme*

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{c}''}{||\mathbf{c}''||}\right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||} = \left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \frac{\kappa\mathbf{c}''' - \kappa'\mathbf{c}''}{\kappa^2} \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} =$$

$$\frac{1}{\kappa^2} \cdot [\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')] = \frac{\det(\mathbf{c}'''|\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{\kappa^2} = \frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{||\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''||^2} = \tau.$$

Tudíž

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále přímým výpočtem za užití výše dokázaných vztahů mezi vektory Frenetova repéru a jejich derivacemi máme

$$\mathbf{d} \times \mathbf{t} = (\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}) \times \mathbf{t} = \kappa\mathbf{b} \times \mathbf{t} = \kappa\mathbf{n} = \mathbf{t}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{n} = (\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t} = \mathbf{n}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{b} = (\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\tau\mathbf{n} = \mathbf{b}'.$$

□

Poznámka 2.23. *Vidíme tedy, že v parametrizaci obloukem (kdy se poloha bodu mění jednotkovou rychlostí) křivost vyjadřuje rychlost okamžité změny tečného vektoru (a tím i tečné přímky) a torze rychlost okamžité změny binormálového vektoru (a tím i oskulační roviny). Rovněž můžeme okamžitou změnu celého Frenetova repéru chápat jako rotaci kolem Darbouxova vektoru, jejíž rychlost je daná jeho délkou, tedy $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, které se někdy říká celková křivost.*

Věta 2.24. *Nechť $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že*

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají přirozené rovnice křivky.

Věta 2.25. *Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.*

Důkaz.

- ($\Longrightarrow$) *Leží-li $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ v nějaké rovině, existují $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ taková, že $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ a pro všechna $t \in I$ je $pc_x(t)+qc_y(t)+rc_z(t) = s$, tedy $\mathbf{c}\cdot(p, q, r) = s$. Postupným derivováním podle t dostaneme*

  $$\mathbf{c}' \cdot (p, q, r) = 0,$$
  $$\mathbf{c}'' \cdot (p, q, r) = 0,$$
  $$\mathbf{c}''' \cdot (p, q, r) = 0.$$

  Vektory $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}''$, $\mathbf{c}'''$ všechny leží v prostoru $\langle(p, q, r)\rangle^\perp$ dimenze dva, takže jsou lineárně závislé. Z toho plyne rovnost $\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') = 0$ a tedy i $\tau = 0$.

- ($\Longleftarrow$) *BÚNO uvažujme* $\mathbf{c}$ *parametrizovanou obloukem. Je-li* $\tau(t) = 0$ *pro všechna* $t \in I$*, potom* $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} = \mathbf{o}$*, tedy* $\mathbf{b}$ *je konstatní. Zvolme* $t_0 \in I$ *libovolné a definujme*

$$\mathbf{h}(t) = (\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t),\ t \in I.$$

Platí $\mathbf{h}(t_0) = 0$ *a* $\mathbf{h}' = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$*, takže* $\mathbf{h} = 0$*, neboli* $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}(t_0) \cdot \mathbf{b}$*. Křivka tedy leží v rovině* $\mathbf{c}(t_0) + \langle \mathbf{b} \rangle^{\perp}$*.* □

Věta 2.26. *Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku* $c : I \to \mathbb{R}^2$ *vnořenou do* $\mathbb{R}^3$ *zobrazením* $(x, y) \to (x, y, 0)$ *platí* $\kappa = |\kappa_z|$ *a v neinflexních bodech* $\mathbf{n} = sign(\kappa_z)\mathbf{n}_*$*.*

Důkaz. *Nechť* $\mathbf{c} = (c_x, c_y) \equiv (c_x, c_y, 0)$*. Snadno spočteme*

$$\kappa_z = \frac{\det \begin{pmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{pmatrix}}{(\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2})^3},$$

$$\kappa = \frac{\|(c_x', c_y', 0) \times (c_x'', c_y'', 0)\|}{(\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2 + 0^2})^3} = \frac{\left\| \left(0, 0, \det \begin{pmatrix} c_x' & c_y' \\ c_x'' & c_y'' \end{pmatrix}\right) \right\|}{(\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2})^3} = |\kappa_z|.$$

Dále v neinflexních bodech označme $\mathbf{t} = (t_x, t_y, 0)$*. Dostáváme*

$$\mathbf{n}_* = (-t_y, t_x, 0),$$
$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = (0, 0, sign(\kappa_z)),$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = sign(\kappa_z)(-t_y, t_x, 0) = sign(\kappa_z)\mathbf{n}_*.$$

□

2.3 Křivkový integrál

Definice 2.27. *Mějme hladkou parametrickou křivku* $\mathbf{c}(t)$*,* $t \in (\alpha, \beta)$ *v* $\mathbb{R}^n$ *a reálnou funkci* f *definovanou na* $\langle \mathbf{c} \rangle$*. Pak definujeme* Křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} f \mathrm{d}s := \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t))||\mathbf{c}'(t)||\mathrm{d}t,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesqueův integrál.

Věta 2.28. *Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.*

Důkaz. *Ať* $\mathbf{c}(t), t \in (\alpha, \beta)$ *je hladká parametrická křivka v* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s)), s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ *je její reparametrizace a* f *je reálná funkce definovaná na* $\langle \mathbf{c} \rangle$*.*

Rozlišíme dva případy a počítáme: