

Cvičení k přednášce Geometrie 1

verze 28. září 2025

Tento dokument obsahuje dvanáct sad úloh k jednotlivým cvičením z předmětu Geometrie 1. V závěrečné části dokumentu (za všemi zadáními) jsou uvedeny výsledky, návody a případně i kompletní postupy řešení úloh. Úlohy označené **(Z)** jsou považovány za základní, v početní části zkouškové písemky lze očekávat úlohy srovnatelné obtížnosti. Ostatní úlohy jsou ale také velmi důležité, protože pomáhají pochopit přednášenou látku a rozvíjet geometrické porozumění matematice.

1 Shodná zobrazení v rovině

Úloha 1.1. (Z) Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20, y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1, y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3, y' = -y$

Úloha 1.2. (Z) Pomocí zobrazení z úlohy 1.1, a) zobrazte

a) bod $[2, -3]$

b) přímku $[1, 1] + t(1, 2)$

c) přímku $x + y - 3 = 0$

d) parabolu $y - x^2 = 0$

Úloha 1.3. (Z) Nalezněte rovnici otočení v rovině se středem $[1, 3]$ o úhel α .

Úloha 1.4. (Z) Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.5. (Z) Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.6. (Z) Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $\mathbf{X} = [2, 5]$ na bod $\mathbf{X}' = [-6, 3]$.

Úloha 1.7. (Z) Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, pro které je přímka $3x + 4y - 1 = 0$ samodružná a zároveň její bod $[3, -2]$ je samodružný.

Úloha 1.8. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v $\mathbb{R}^2$ taková, že $f : [3, 0] \mapsto [1, 4]$, $f : [1, 2] \mapsto [3, p]$, $f : [-1, 2] \mapsto [1 + p, -q]$. Tuto shodnost analyzujte.

Úloha 1.9. Nalezněte všechny shodnosti, které zachovávají čtverec s vrcholy $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[2, 0]$ a $[1, 1]$. Popište grupu, kterou tvoří.

Úloha 1.10. Konstrukčně i početně nalezněte všechny pětiúhelníky (ne nutně konvexní), jestliže jsou zadány (popořadě) středy jeho stran $S_1 = [3, -2]$, $S_2 = [6, 0]$, $S_3 = [3, 2]$, $S_4 = [-2, 1]$, $S_5 = [-1, -2]$.

Úloha 1.11. Nalezněte shodnost v rovině, která zobrazí kuželosečku s implicitní rovnicí $20x - 9x^2 - 15y - 24xy - 16y^2 = 0$ na kuželosečku, která nemá smíšený člen xy . Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná.

Úloha 1.12. Nalezněte shodnost v rovině, kterou lze složit ze tří osových souměrností, ale ne z menšího počtu. Dokažte!

2 Shodná zobrazení v prostoru

Úloha 2.1. (Z) Vypočtěte součin $q_1 q_2$ jednak přímo z definice a druhak geometricky pomocí formule s vektorovým a skalárním součinem. Rovněž k těmto kvaternionům nalezněte kvaterniony inverzní.

$$\begin{aligned}q_1 &= 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \\q_2 &= 1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Úloha 2.2. (Z) Nalezněte otočení vektoru $(0, 0, 1)$ kolem vektoru $(1, 2, 2)$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném směru. Pokuste se úlohy vyřešit jak pomocí Rodriguesovy formule tak pomocí kvaternionů.

Úloha 2.3. (Z) Vyjádřete středovou souměrnost v $\mathbb{R}^3$ se středem $[1, 2, 3]$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 2.4. Nalezněte vyjádření rovinové souměrnosti v $\mathbb{R}^3$, která zobrazuje bod $[1, 0, -2]$ na bod $[3, 2, 0]$.

Úloha 2.5. Nalezněte vyjádření osové souměrnosti v prostoru podle přímky s parametrickým vyjádřením $[1, 0, -1] + t(1, 2, 3)$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 2.6. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3,\end{aligned}$$

popisují přímou shodnost $\mathbb{R}^3$. Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete je jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

Úloha 2.7. Nalezněte všechny jednotkové kvaterniony, které odpovídají rotaci, která převádí vektor $(1, 0, 0)$ na vektor $(0, 1, 0)$.

Výsledky, návody a řešení

1.1 Zapište zobrazení maticově jako $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ a rozhodněte, zda $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Pro samodružné body je třeba řešit soustavu $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Samodružné směry jsou vlastní podprostory matice $\mathbf{A}$. Samodružná přímka nemusí být tvořena samodružnými body, ale její směr samodružný být musí. Její libovolný bod najdeme tak, že jej zobrazení posune o vektor, který je v samodružném směru zobrazení. Inverz a skládání viz vzorečky v seznamu vět z přednášky.

- a) otočení se středem v bodě $[-\frac{3}{2}, -2]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{11}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$
- b) osová souměrnost, samodružná přímka $-5x+y+52=0$, samodružné směry $(1, 5)$, $(5, -1)$, inverzní zobrazení $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$
- c) není shodné
- d) otočení, samodružný bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) středová souměrnost, samodružný bod $[\frac{1}{2}, 1]$, všechny směry samodružné s vlastním číslem -1 , inverzní zobrazení $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$.
- f) posunutá osová souměrnost, žádný samodružný bod, samodružné směry $(1, 0)$, $(0, 1)$, inverzní zobrazení $x' = x + 3$, $y' = -y$

1.2 Přímku v parametrickém tvaru lze zobrazit přímým dosazením (jakoby po bodech). Pro křivku zadanou implicitní rovnicí je třeba vyjádřit z výrazu $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ předpis pro $\mathbf{X} = (x, y)^T$ a tedy využít inverzní zobrazení (promyslete).

- a) $[-\frac{1}{5}, -\frac{27}{5}]$,
- b) $[\frac{12}{5}, -\frac{11}{5}] + t(11, 2)$,
- c) $7x' - y' - 24 = 0$,
- d) $9x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 86x' + 73y' + 111 = 0$.

1.3 Složte posunutí do počátku, otočení o α kolem počátku a posunutí zpět do bodu $[1, 3]$.
 $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha - \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 1$, $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3$.

1.4 Složením dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost, osy jsou různoběžné, půjde tedy o otočení. $x' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 15)$ $y' = \frac{1}{13}(5x - 12y - 55)$.

1.5 Opět půjde o přímou shodnost, osy jsou rovnoběžné, půjde tedy o posunutí. $x' = x + \frac{16}{13}$, $y' = y + \frac{24}{13}$.

1.6 Rozlište dva případy, kdy je shodnost přímá nebo nepřímá. Každý z nich umíme popsat v obecném tvaru a pouze budeme vyžadovat aby $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Také lze využít grupy všech zobrazení, která mají počátek $[0, 0]$ jako samodružný bod, a tedy mají nulové posunutí, označme si tutu grupu jako G_0 . Jestliže f je posunutí o vektor $(-2, -5)$ a f' je posunutí o vektor $(-6, 3)$, pak řešením úlohy jsou právě zobrazení tvaru $f' \circ g \circ f$, kde $g \in G_0$ (dokažte).

$$\begin{aligned} \text{Přímé shodnosti: } & \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha - 6 \\ -2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha + 3 \end{pmatrix}, \\ \text{nepřímé shodnosti: } & \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha - 6 \\ -2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.7 Bývalý DU, nutno doplnit řešení.

1.8 Aby f byla shodnost, musí platit $\|X - Y\| = \|f(X) - f(Y)\|$. Vyřešte rovnice pro p, q .

Jedna z možností je určit p, q ze vzdáleností vybraných bodů. Druhou možností je i s parametry zobrazení ve tvaru $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Sestavíme soustavu rovnic a vyjde nám, že

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2-p}{2} & \frac{4-p}{2} \\ \frac{p+q}{2} & \frac{2p+q-4}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4+3p}{2} \\ \frac{8-3p-3q}{2} \end{pmatrix}$$

První řádek matice má normu 1 pro $p = 2$ nebo $p = 4$. Norma prvního sloupce pak bude 0 pro $q = 0$ resp. $q = -4$. Pouze první volba dává ortogonální matici, zobrazení pak je

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To je posunutá osová souměrnost s osou $-x + y = 0$ a posunutím o vektor $(1, 1)$.

1.9 Grupa D_8 , identita, otočení se středem v bodě $[1, 0]$ o $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, osové symetrie s osami $y = 0, x - 1 = 0, -x + y + 1 = 0$ a $x + y - 1 = 0$.

$$\text{otočení o } \frac{\pi}{2}: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{otočení o } \pi: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{otočení o } \frac{3\pi}{2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou } y = 0: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

osová souměrnost s osou o $x - 1 = 0$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

osová souměrnost s osou o $-x + y + 1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

osová souměrnost s osou o $x + y - 1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.10 První vrchol pětiúhelníku dostaneme jako samodružný bod zobrazení složeného z pěti středových souměrností se středy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 . Durhý vrchol získáme jako obraz prvního ve středové symetrii se středem S_1 atd.

Také je možné zapsat středy jako $S_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $S_2 = \frac{1}{2}(A_2 + A_3)$ atd. a vyřešit příslušnou soustavu rovnic, tj. $A_1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$ atd.. Vyjde $A_1 = [1, -3]$, $A_2 = [5, -1]$, $A_3 = [7, 1]$, $A_4 = [-1, 3]$, $A_5 = [-3, -1]$.

1.11 Stačí uvažovat přímou shodnost tvaru $X' = AX + p$. Zobrazte kuželosečku pomocí tohoto zobrazení. Výsledná kuželosečka má koeficient 0 u smíšeného členu xy a navíc ji toto zobrazení může posunout tak, aby procházela počátkem, a tedy měla nulový i absolutní člen.

Zobrazení

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

převeďte rovnici na tvar $-y' - x'^2 = 0$. Je to tedy parabola, která vznikne z paraboly $y = -x^2$ otočením se středem v počátku o $\arctan(\frac{4}{3})$.

1.12 Složením tří (lichého počtu) osových souměrností vznikne vždy nepřímá shodnost. Nepřímé shodnosti jsou buď samy osové souměrnosti nebo posunuté osové souměrnosti.

Posunutá osová souměrnost je nepřímá shodnost, musí být tedy složena z jedné nebo tří osových souměrností a jedna to jistě není, protože nemá samodružné body.

2.1 $q_1 q_2 = -17 + 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

2.2 otočený vektor je $\frac{1}{6}(2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}, 1)$

2.3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.4 Nepřímá shodnost

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

2.5 Přímá shodnost

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

2.6 Samodružná je přímka $[0, \frac{1}{2}, 2] + t(1, 0, 1)$. Shodnost je možno vyjádřit jako rotaci kolem této přímky o úhel $\arccos(-1/3)$ složenou s posunutím o její směrový vektor $(2, 0, 2)$.

2.7 Takovou rotaci o realizuje s nejmenším rotačním úhlem $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$ a s největším rotačním úhlem $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Všechny ostatní takové rotace jsou dány $q = (\cos \alpha)q_1 + (\sin \alpha)q_2$.