GEOMETRIE V $\mathbb{R}^2$ A $\mathbb{R}^3$ (& DOKONČENÍ ORTOGONÁLNÍ DIAGONALIZACE)

– DOKONČENÍ KAP 11 VE SKRIPTECH

– T 11.33: BUĎ V KONEČNĚ GENEROVANÝ REÁLNÝ VEKTOROVÝ PROSTOR SE $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
BUĎ $f: V \times V \to \mathbb{R}$ SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA.
PAK EXISTUJE ORTONORMÁLNÍ (VZHLEDEM K $\langle\cdot,\cdot\rangle$) BÁZE B, KTERÁ JE ZÁROVEŇ f-ORTOGONÁLNÍ (TJ. $[f]_B$ JE DIAGONÁLNÍ).

– Dk: – VEZMEME SI NEJPRVE NĚJAKOU ORTONORMÁLNÍ BÁZI C PROSTORU V

– POLOŽME $A = [f]_C$, TJ. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SYMETRICKÁ (KDE $n = \dim V$)

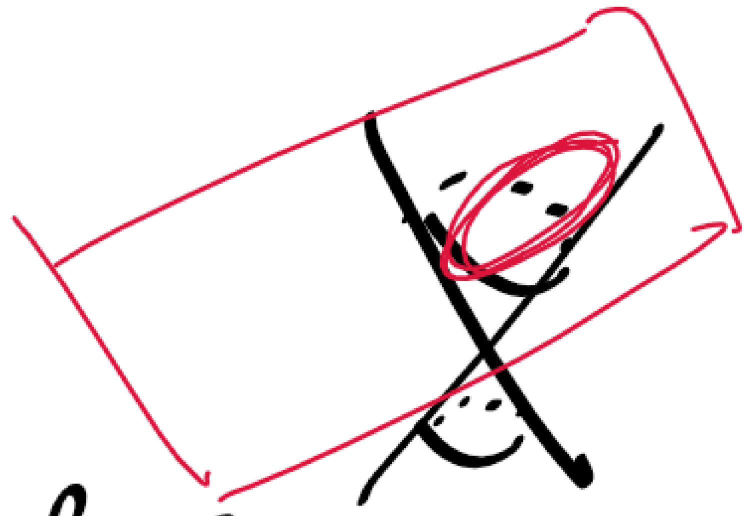
– PAK $\exists\, U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ORTOGONÁLNÍ ($U^T U = I_n = U U^T$) TAKOVÁ, ŽE
$$U^T A U = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\text{VLASTNÍ ČÍSLA } A})$$

– ZVOLÍME BÁZI $\underset{(v_1,\dots,v_n)}{B}$ TAKOVOU, ŽE $U = [f]^B_C$, TJ. $U = \left([v_1]_C \middle| [v_2]_C \middle| \dots \right)$

– TJ. $[f]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (ČILI B JE f-ORTOGONÁLNÍ)
A PROTOŽE C JE ORTONORMÁLNÍ (VZHLEDEM K $\langle\cdot,\cdot\rangle$) A U JE ORTOGONÁLNÍ, JE I B ORTONORMÁLNÍ (VZHLEDEM K $\langle\cdot,\cdot\rangle$). $\square$

– KUŽELOSEČKY:

– POINTA: CHCEME SE VYZNAT V ŘEŠENÍ ROVNIC TYPU



$$\underbrace{ax^2+bxy+cy^2}_{\substack{g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ \text{KVADRATICKÁ FORMA}\\ \text{DANÁ MATICÍ } A_2=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & c\end{pmatrix}}}+\underbrace{dx+ey}_{\substack{h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ \text{LIN. FORMA,}\\ [h]^{K_2}=\begin{pmatrix} d\\ e\end{pmatrix}}}+\underbrace{f}_{\in\mathbb{R}}=0$$

$|\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$

x,y PROMĚNNÉ

$a\neq 0 \vee b\neq 0 \vee c\neq 0$

(MŮŽEME ZMĚNIT ZNAMÉNKA VŠECH KOEFICIENTŮ ⇝ STEJNÉ ŘEŠENÍ)

– OBECNÝ POSTUP:

(1) NAJDEME ORTONORMÁLNÍ BÁZI $\mathbb{R}^2$ (VZHLEDEM KE STD. SKAL. SOUČINU) TAKOVOU, ŽE $[g]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

(NAPŘ. PRO $\underbrace{3x^2+2xy+3y^2}_{g}+5x-y-1=0$ JE g DÁNO $A_2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

A PRO $B=\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ JE $[g]_B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$)

(2) PAK DOPLNÍME NA ÚPLNÉ ČTVERCE ⇝ DOSTANEME STANDARDNÍ ROVNICI KUŽELOSEČKY

$$\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0}_{\text{(ELIPSA / KRUŽNICE)}} \quad \text{NEBO} \quad \underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-1=0}_{\text{(HYPERBOLA)}} \quad \text{NEBO} \quad \underbrace{kx^2+ly+m=0}_{\text{(PARABOLA)}} \quad \text{NEBO} \quad ?$$

DEGEN. PŘÍPADY ??

(PŘ: V SOUŘ. VZHL. K B MÁ KUŽELOSEČKA TVAR

$$2\tilde{x}^2+4\tilde{y}^2+3\sqrt2\tilde{x}+2\sqrt2\tilde{y}-1=0$$

$$2\left(\tilde{x}^2+\tfrac{3}{\sqrt2}\tilde{x}\right)+4\left(\tilde{y}^2+\tfrac{1}{\sqrt2}\tilde{y}\right)-1=0$$

$$2\left(\tilde{x}+\tfrac{3}{2\sqrt2}\right)^2+4\left(\tilde{y}+\tfrac{1}{2\sqrt2}\right)^2-2\cdot\tfrac{3}{8}-4\cdot\tfrac{1}{8}-1=0$$

- KDY JE ŘEŠENÍM $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ OPRAVDU KUŽELOSEČKA?

⇝ ROVNICI PŘEPÍŠEME VE TVARU

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0}_{k(x,y,1)=0}, \text{ KDE } A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \end{matrix} & f \end{pmatrix}$$

(boxed block $= A_2$)

$k(x,y,1)=0$, KDE

$k: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ JE KVADRATICKÁ FORMA

$(x,y,z) \mapsto ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$

- <u>TVRZENÍ</u>: ROVNICE URČUJE KUŽELOSEČKU $\iff$ (1) A_3 JE REGULÁRNÍ &
(2) A_3 ANI $-A_3$ NEJSOU POZITIVNĚ DEFINITNÍ

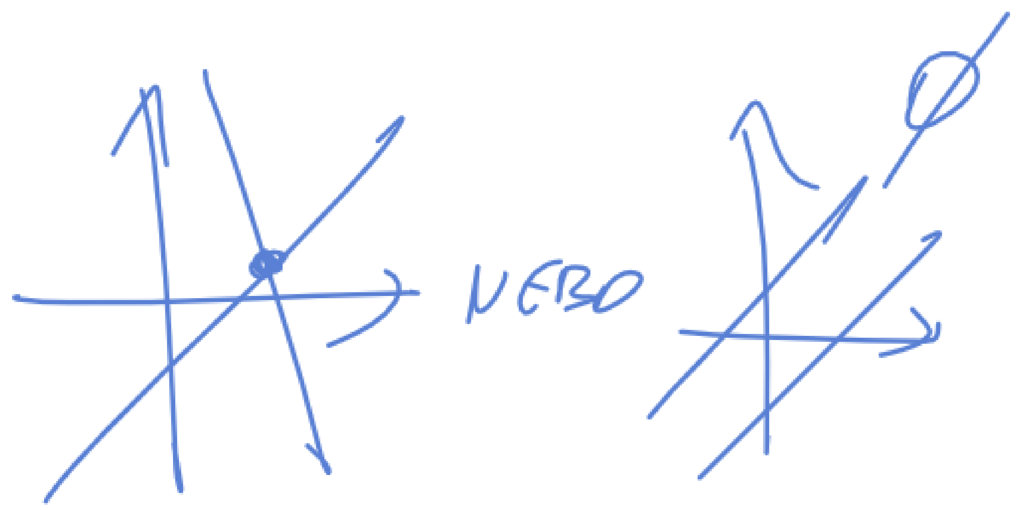
- <u>TOTIŽ</u>: KDYŽ A_3 JE POZITIVNĚ DEF., PAK $k(x,y,1)>0 \ \forall x,y\in\mathbb{R}$
— " — $-A_3$ ——— " ———, ——— " ——— <0 — " —

- <u>ČILI</u>: POKUD NENÍ SPLNĚNA (2), PAK ROVNICE $ax^2+bxy+\dots$ NEMÁ V $\mathbb{R}^2$ ŘEŠENÍ

- DÁLE PŘEDP. (2)

- UVAŽUJEME ROVNICI:

(*) $$\underbrace{(x\ \ y\ \ 1)\, A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0}_{k(x,y,1)=0}, \quad \text{KDE} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{matrix}}^{\,A_2} & \begin{matrix} \frac{d}{2} \\ \frac{e}{2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \end{matrix} & f \end{pmatrix}$$



$k(x,y,1)=0$, KDE

$k: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ JE KVADRATICKÁ FORMA

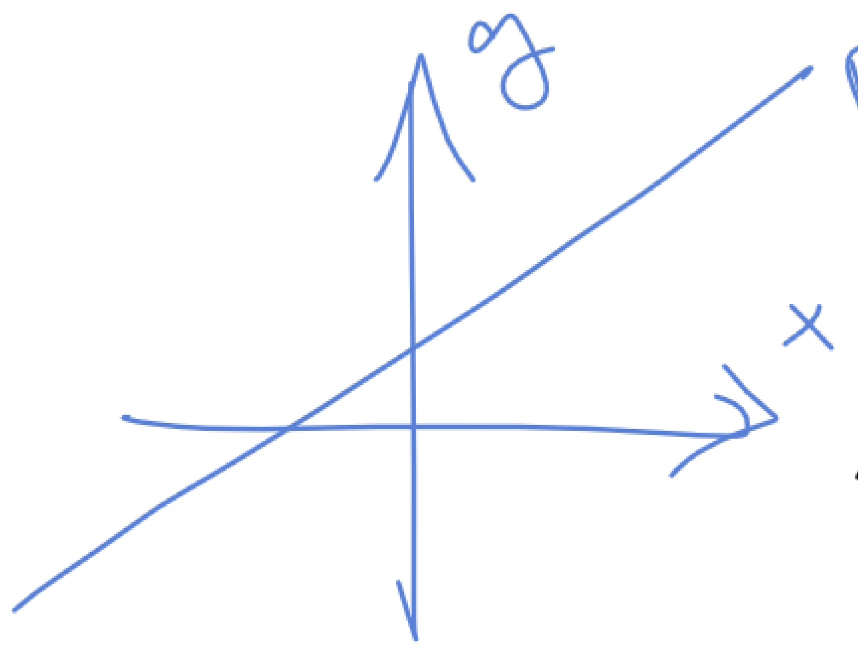
$(x,y,z) \mapsto ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$

- **CO KDYŽ $\operatorname{rank}(A_3) = 1$:** PAK $\exists P$ REGULÁRNÍ TAKOVÁ, ŽE $D = \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$D = P^T A_3 P$, TJ. $A_3 = (P^{-1})^T \cdot \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

$(P^{-1})^T = (v \,|\, ? \,|\, ?)$

$\pm v \cdot v^T$



$P = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : v_1 x + v_2 y + v_3 = 0 \}$

$\Rightarrow$ ROVNICE MÁ TVAR $\pm\left((x\ \ y\ \ 1)\, v\right)\left(v^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (v_1 x + v_2 y + v_3)^2 = 0$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

- **CO KDYŽ $\operatorname{rank} A_3 = 2$:** $\Rightarrow \exists\ A_3 = \underbrace{Q}_{\text{REG.}}{}^T \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & \pm1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q = \pm v^T v \pm w^T w$

$\leadsto$ ROVNICI (PO PŘÍP. ZMĚNĚ $A_3 \leadsto -A_3$) DO TVARU BUĎ $(v_1 x + v_2 y + v_3)^2 + (w_1 x + w_2 y + w_3)^2 = 0$,

NEBO $(v_1 x + v_2 y + v_3)^2 - (w_1 x + w_2 y + w_3)^2 = 0$

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V $\mathbb{R}^n$

- UVAŽUJME $\mathbb{R}^n$ SE STD. SKALÁRNÍM SOUČINEM
- BODY $\mathbb{R}^2$ $\leftrightarrow$ JEJICH POLOHOVÉ VEKTORY

$\rightsquigarrow$ EUKLEIDOVSKÁ NORMA: $\|-\|^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (POZIT. DEF. KV. FORMA)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

- DEF: ([ŠÍR, 1.2]) ZOBRAZENÍ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ JE SHODNÉ ZOBRAZENÍ (TÉŽ SHODNOST), POKUD

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$$

- PŘ: (1) ORTOGONÁLNÍ LIN. ZOBRAZENÍ, TJ. $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u \longmapsto Au$, A ORTOG. MATICE (T8.82, 8.83)

(2) POSUNUTÍ: $p \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u \longmapsto u + p$ (NENÍ LIN. PRO $p \neq 0$)

- POZOROVÁNÍ: $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SHODNOSTI $\Rightarrow$ $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SHODNOST

– <u>V ([ŠÍR, 1.4])</u>: ZOBRAZENÍ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ JE SHODNOST, PRÁVĚ KDYŽ g JE DÁNO PŘEDPISEM $g(u) = Au + p$, KDE $p \in \mathbb{R}^n$ A $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE ORTOGONÁLNÍ MATICE

– <u>DŮSL</u>: g SHODNOST $\Rightarrow$ g JE BIJEKCE A g^{-1} JE SHODNOST

$$\left(g(u) = Au + p \quad \rightsquigarrow \quad g^{-1}(v) = A^{-1}(v-p) = A^T(v-p) = A^T v - A^T p \right)$$

– <u>DK</u>: <u>$\forall u: g(u) = Au + p \Rightarrow g$ SHODNOST</u> : CVIČENÍ

<u>g SHODNOST $\Rightarrow \exists A, p \ \forall u: g(u) = Au + p$</u> :

– POLOŽÍME $p := g(0) \in \mathbb{R}^n$

– UVAŽUJME SHODNOST: $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$u \longmapsto g(u) - p$$
$$0 \longmapsto 0$$

– CHCEME UKÁZAT, ŽE h JE ORTOGONÁLNÍ (LINEÁRNÍ!) ZOBRAZENÍ

– <u>UKÁŽEME</u>: • $\forall u: \ \|h(u)\| = \|h(u) - h(0)\| = \|u - 0\| = \|u\|$

• $\forall u, v: \ h(u) \cdot h(v) = \frac{1}{2}\left(\|h(u)\|^2 + \|h(v)\|^2 - \|h(u) - h(v)\|^2 \right)$
$= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \right) = u \cdot v$

$\Rightarrow (h(e_1), \dots, h(e_n))$ ORTONORMÁLNÍ BÁZE $\mathbb{R}^n$

- DK: POKRAČOVÁNÍ: h SHODNOST, $h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$0 \longmapsto 0$$
$$e_i \longmapsto v_i$$

$B = (v_1, \dots, v_n)$ ORTONORM. BÁZE.

- POLOŽME: $A = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right)$ (NUTNĚ ORTOGONÁLNÍ MATICE)

- MUSÍME UKÁZAT, ŽE $h = f_A$, JINÝMI SLOVY, ŽE $\underbrace{(f_A)^{-1} \circ h}_{k} = id$

- CO VÍME O k?

$k: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, SHODNOST

$$0 \longmapsto 0$$
$$e_i \longmapsto e_i \quad \forall i$$

- DÁLE $\forall u: \ \|k(u)\| = \|u\|$

- VEZMEME $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, POLOŽME $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = k(u)$, CHCEME DK.: $u = v$

- VÍME: $\|v\| = \|u\|$, TJ: $v_1^2 + \dots + v_n^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2$

- $\forall i: \ \|\underbrace{v - e_i}_{k(u)-k(e_i)}\| = \|u - e_i\|$, TJ: $v_1^2 + \dots + (v_i - 1)^2 + \dots + v_n^2 = u_1^2 + \dots + (u_i - 1)^2 + \dots + u_n^2$

$\Rightarrow \ \forall i: \quad 2v_i - 1 = 2u_i - 1$

$\Rightarrow \ \forall i: \quad v_i = u_i \quad \Rightarrow v = u \ \square$

SHODNÁ ZOBRAZENÍ, VEKTOROVÝ SOUČIN A ROTACE V $\mathbb{R}^3$

- **PŘIPOMENUTÍ:**

  - V ([ŠÍR, 1.4]) : ZOBRAZENÍ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ JE SHODNOST, PRÁVĚ KDYŽ g JE DÁNO PŘEDPISEM $g(u) = Au + p$, KDE $p \in \mathbb{R}^n$ A $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JE ORTOGONÁLNÍ MATICE.

- POZOROVÁNÍ ([ŠÍRA, V1.8]): JE-LI g SHODNOST, PAK $\exists$ ORTOGONÁLNÍ MATICE $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ A $p \in \mathbb{R}^n$ TAKOVÉ, ŽE $\forall\, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$g(u) = \left.\left(\begin{array}{c|c} A & p \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\right\}{\scriptstyle n+1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

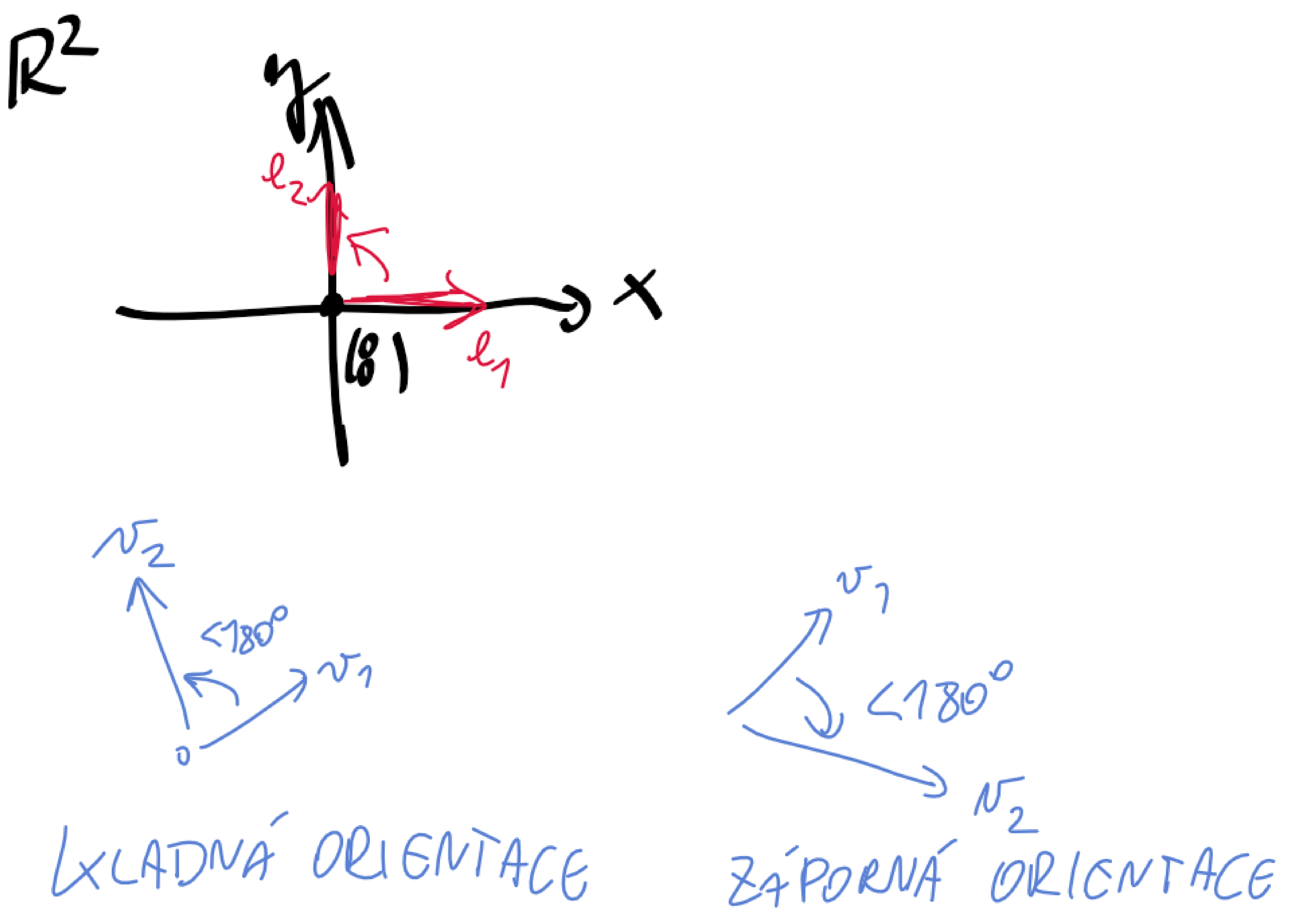
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n+1}$$

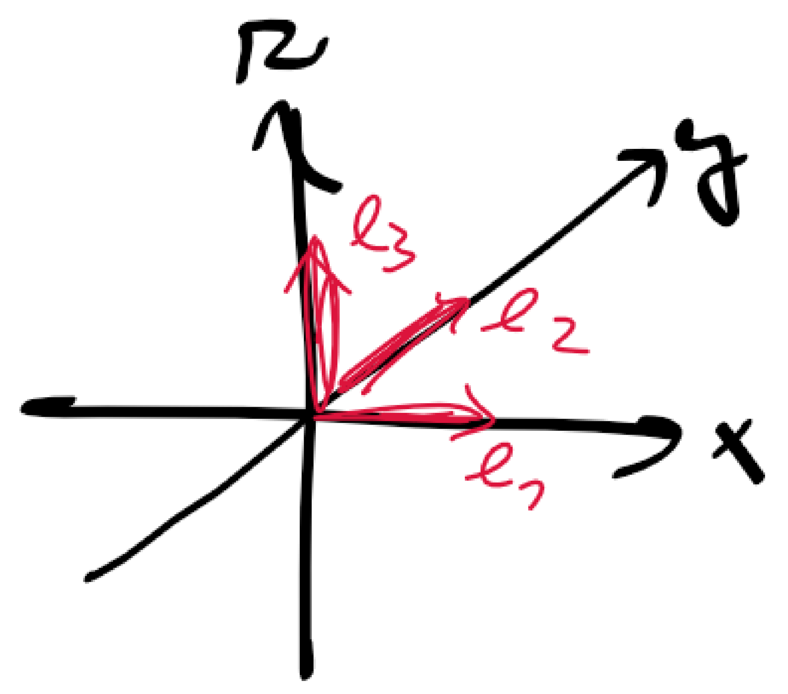
- VÍME: $\{\text{SHODNOSTI } g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\} \xleftrightarrow{\text{bij}} \{(A, p) : A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ ORTOG}, p \in \mathbb{R}^n\}$

- ORIENTACE BÁZE $\mathbb{R}^n$: $B = (v_1, \dots, v_n)$ BÁZE $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ B JE KLADNĚ (RESP. ZÁPORNĚ) ORIENTOVANÁ, POKUD PRO $M = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n\right)$ PLATÍ $\det M > 0$ (RESP. $\det M < 0$)

- POZN: KANONICKÁ BÁZE V $\mathbb{R}^n$, TJ. $B=(e_1,\dots,e_n)$, JE KLADNĚ ORIENTOVANÁ.

- ZAKRESLENÍ V $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$





ORIENTACE ⇝ PRAVIDLO PRAVÉ RUKY

- DEF ([ŠÍR, 1.7]): BUĎ $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SHODNOST, $g: u \mapsto Au + p$.
PAK g JE <u>PŘÍMÁ</u>, POKUD $\det A > 0$,
g JE <u>NEPŘÍMÁ</u>, POKUD $\det A < 0$.

($\det A = \pm 1$ A ORTOGONÁLNÍ)

- PŘIPOMEŇME SI, JAK VYPADAJÍ ORTOGONÁLNÍ ZOBRAZENÍ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ NEBO $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
(+ SKRIPTA, KAP 10.2.5 A 10.2.6).

SHODNOST $g: u \mapsto Au + p$, KDE $p = 0$.

– POPIS SHODNOSTÍ NA $\mathbb{R}^3$

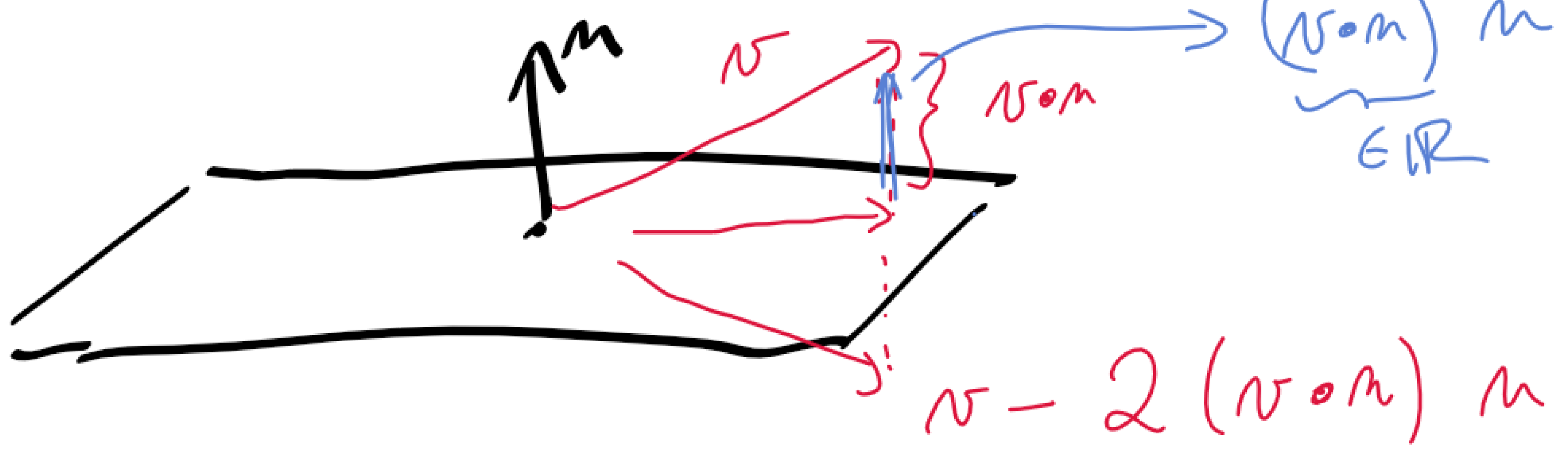
- POSUNUTÍ : $u \mapsto u + p$

- REFLEXE PODLE ROVINY $n^\perp = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : n \cdot x = 0 \}$

$V = n^\perp$

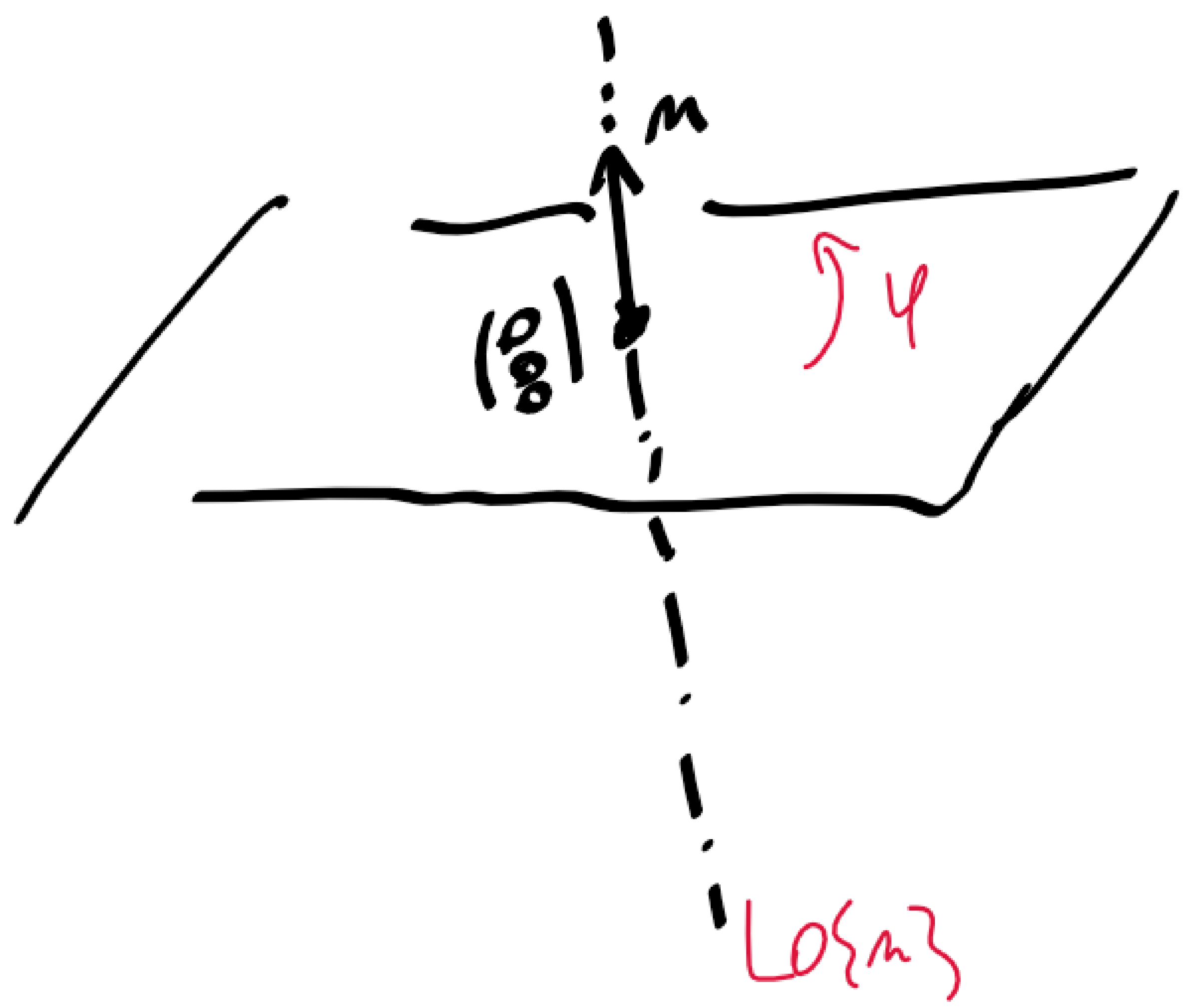
$\|n\| = 1$

n NORMÁLOVÝ VEKTOR



- POPIS ROTACE ??

$\|n\| = 1$



VEKTOROVÝ SOUČIN A JEHO VLASTNOSTI

DEF: JSOU-LI $u, v \in \mathbb{R}^3$, PAK **VEKTOROVÝ SOUČIN** u A v DEFINUJEME

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$(\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$

JAKO

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

POZN:

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

L:

1. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3: \quad (u+v) \times w = u \times w + v \times w$
2. $\forall u, w \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}: \quad (tu) \times w = t(u \times w)$
3. $\forall u, v \in \mathbb{R}^3: \quad u \times v = -(v \times u)$

VLASTNOSTI DETERMINANTU 2×2

4. $\forall u, v \in \mathbb{R}^3: \quad (u, v) \text{ LZ} \iff u \times v = 0$

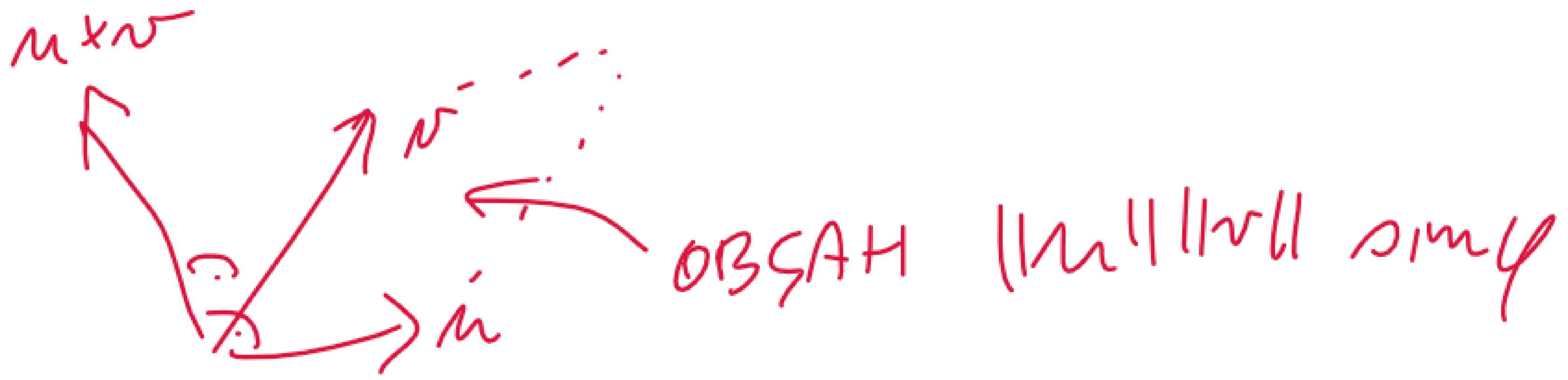
$u \times v = 0 \iff \operatorname{rank}(u|v) \leq 1$

5. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3: \quad (u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$

← ROZVOJ PODLE 3. SLOUPCE

SPECIÁLNĚ PRO $w = (u \times v)$ DOSTANEME $\|u \times v\|^2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & (u \times v)_1 \\ u_2 & v_2 & (u \times v)_2 \\ u_3 & v_3 & (u \times v)_3 \end{vmatrix}.$

- POZN.: • $u, v \in \mathbb{R}^3$ LN $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = (u, v, u\times v)$ JE KLADNĚ ORIENTOVANÁ BÁZE $\mathbb{R}^3$



• $u\times v \perp u, v$

- I: ① $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$: $\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u\bullet v)^2$

② $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$: $\|u\times v\| = \|u\|\cdot\|v\|\cdot|\sin\varphi|$

- DK: - DEFINOVALI JSME SI $\cos\varphi = \dfrac{(u\bullet v)}{\|u\|\|v\|}$

- MÁME-LI ①, PAK $\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\varphi = \|u\|^2\|v\|^2\sin^2\varphi$, TJ. DOSTANEME ②

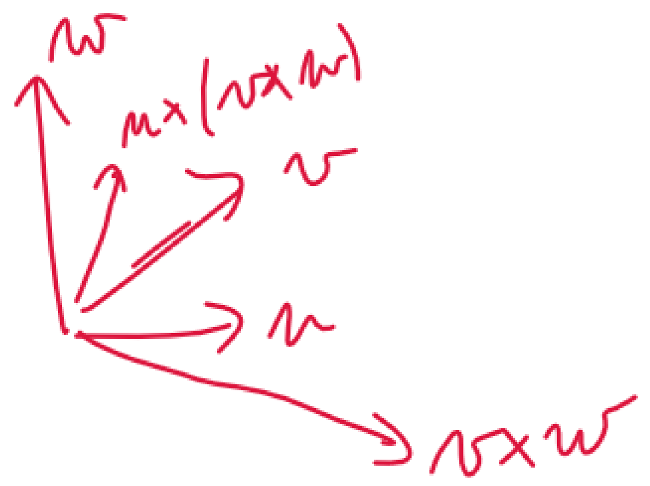
↗ (u, v) LZ $\Rightarrow$ OBĚ STRANY ① JSOU 0

↘ (u, v) LN, V TOM PŘÍPADĚ SE PODÍVÁME NA det GRAMOVY MATICE $(u, v, \underbrace{u\times v}_{w})$

$$\left(\|u\|^2\|v\|^2-(u\cdot v)^2\right)\underset{\neq 0}{\|u\times v\|^2} = \det\underbrace{\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u\bullet v & 0\\ u\bullet v & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u\times v\|^2\end{pmatrix}}_{B} = \det\underbrace{\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{pmatrix}}_{A^T}\cdot\det\underbrace{\begin{pmatrix}u_1&v_1&w_1\\u_2&v_2&w_2\\u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}}_{A} = \|u\times v\|^2\cdot\underset{\neq 0}{\|u\times v\|^2}$$

−L ([ŠÍR, LEMMÁTKO, STR. 8]):

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3 : \quad u \times (v \times w) = (u \cdot w)\, v + (u \cdot v)\, w$$



−Dk: − STAČÍ DOKÁZAT PRO $u = e_1, e_2, e_3$

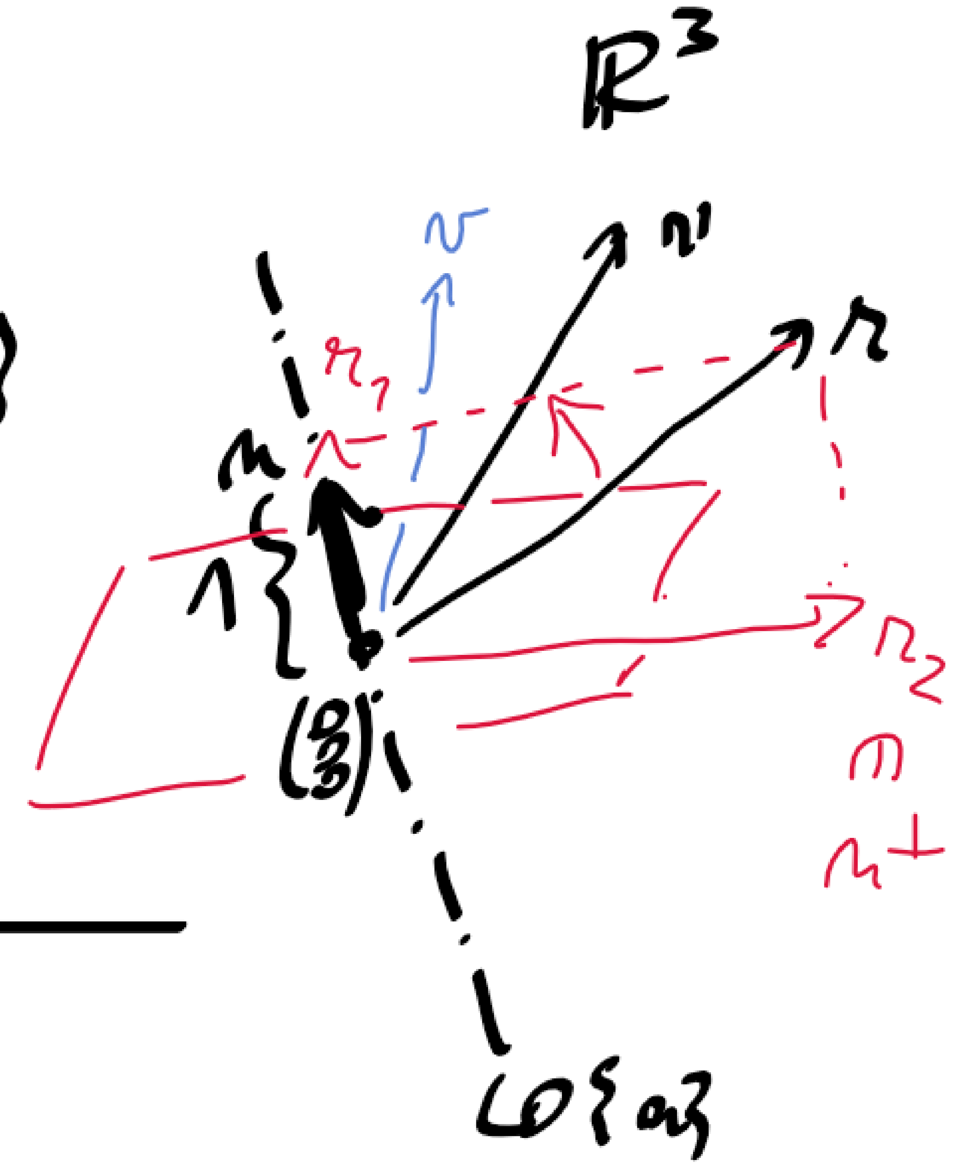
−PŘÍMO SPOČÍTÁME, ŽE

$$e_1 \times (v \times w) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 w_1 - v_1 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \end{pmatrix} = w_1 v - v_1 w$$
$$= (e_1 \cdot w)\, v - (e_1 \cdot v)\, w$$

−PODOBNĚ $u = e_2, e_3$.

– RODRIGUESOVA FORMULE

– V ([ŠiR, V1.12]): $n, r \in \mathbb{R}^3$, $\|n\|=1$, r' ROTACIJA r OKOLI Lin$\{n\}$ ZA φ.



$$r' = (1-\cos\varphi)(r\cdot n)\,n + (\cos\varphi)\,r + (\sin\varphi)(n\times r)$$

– Dk: $r' = r_1 + (\cos\varphi)\,r_2 + (\sin\varphi)\,v$

$$= \underbrace{(r\cdot n)}_{T8.61}\,n + \cos\varphi\,\underbrace{\big(r - (r\cdot n)\,n\big)}_{r_2} + \sin\varphi\,(n\times r) =$$

$$= (1-\cos\varphi)(r\cdot n)\,n + (\cos\varphi)\,r + (\sin\varphi)(n\times r)$$

□

$$v = n\times r = n\times(r_1+r_2) = \underbrace{n\times r_1}_{0} + n\times r_2 = n\times r_2$$

A $\quad \|v\| = \|n\|\,\|r_2\|\sin\frac{\pi}{2} = \|n\|\,\|r_2\| = \|r_2\|$

– POZN: – máme nekomutativní těleso kvaternionů

$$\mathbb{H} = \{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \; ji = -k, \quad jk = i, \; kj = -i, \quad ki = j, \; ik = -j$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] & j \arrow[d] \\ & k \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

– JE-LI $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$

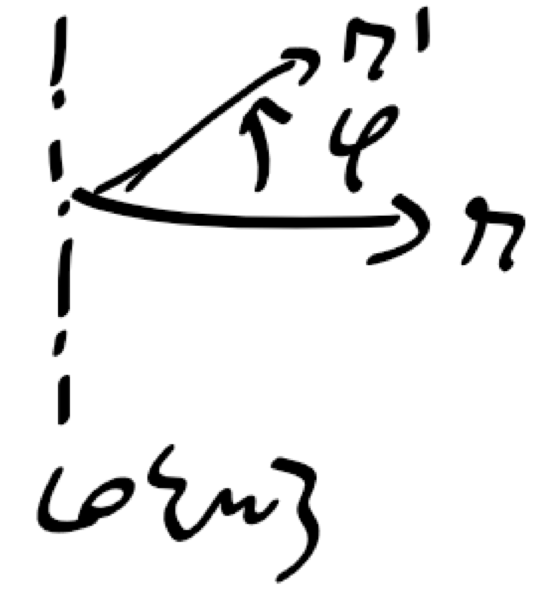
⇝ SDRUŽENÝ KVATERNION: $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

– PAK: $q \cdot \bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ⇝ $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ $(q \neq 0)$

– POINTA: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ⇝ $(v_1 i + v_2 j + v_3 k) \cdot (w_1 i + w_2 j + w_3 k) =$

$$= -v \circ w + (v \times w)_1 i + (v \times w)_2 j + (v \times w)_3 k$$

– V (ČSIR, 1.17)) : ZVOLME $r, n \in \mathbb{R}^3$, $\|n\| = 1$ |



PAK POLOŽÍME-LI

$$\tilde{r} = r_1 i + r_2 j + r_3 k$$

$$\tilde{r}' = r_1' i + r_2' j + r_3' k$$

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\left(n_1 i + n_2 j + n_3 k\right),$$

<u>PLATÍ</u>!

$$\tilde{r}' = \underbrace{q \cdot \tilde{r} \cdot \bar{q} = q \tilde{r} q^{-1}}_{\sim \mathbb{H}}$$