

Geometrie 1

Tento soubor obsahuje znění číslovaných položek (především definic a vět) jak byly předneseny v ZS 2025/26. Soubor také obsahuje hlavní argumenty důkazů. Spolu se zápisky z přednášek je tento seznam i hlavním studijním materiálem ke zkoušce. Co tento seznam **neobsahuje** jsou nejružnější motivace, vysvětlení, drobné detaily důkazů, zajímavosti, animace, ad-hoc příklady atd. Naopak zde budou koncem semestru přidány detailní požadavky na zkoušku.

Předmět Geometrie 1 přirozeně navazuje na Matematickou analýzu a zejména Lineární algebru. Skripta LA z prvního ročníku z roku 2023/24 jsem umístil na svoje stránky (abych tak zafixoval číslování definic a vět) a odkazují se na ně v tomto textu.

1 Shodná zobrazení

Cílem této kapitoly je studovat shodná zobrazení v rovině a v prostoru bez toho, že by se formálně definoval afinní prostor. Zároveň chceme zopakovat středoškolskou analytickou geometrii a co nejpřirozeněji na ni navázat.

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky

$$p : 3x + 4y - 7 = 0.$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Lemma 1.3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (ortogonální matice).

Důsledek 1.5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{X} + (\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Definice 1.6. Shodné zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice a $\vec{p}$ nějaký vektor z $\mathbb{R}^n$ nazýváme posunutí. Množina všech posunutí tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří tzv. ortogonální podgrupu označovanou $\mathbb{O}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin). Podgrupa $\mathbb{O}(n)$ tvořená přímými zobrazeními se značí buď $\mathbb{O}_+(n)$, nebo častěji $\mathbb{SO}(n)$ (speciální ortogonální grupa).

Věta 1.7. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Definice 1.8. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme jeho samodružnými body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f , jestliže platí $f(M) = M$, tedy zobrazení ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť).

Lemma 1.9. Přímka $\mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $LO\{\mathbf{v}\}$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem $\mathbf{v}$.

1.1 Shodnosti v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$

Věta 1.10. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
 - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
 - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1 . V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
 - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí.
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastním číslem -1 a
 - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
 - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

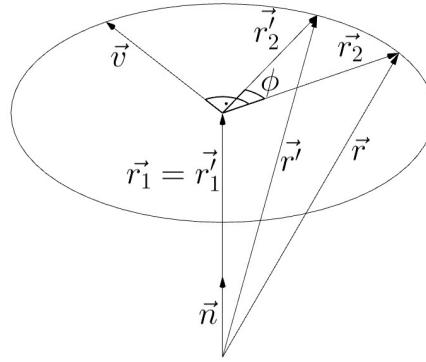
Zobrazení	Identita	Neidentické posunutí	Neidentické otočení	Osová souměrnost	Posunutá souměrnost
Samodružné body	všechny	-	střed otočení	osa souměrnosti	-
Samodružné směry	všechny	všechny	všechny (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	směr osy a kolmý na osu	směr osy a kolmý na osu
Samodružné přímky	všechny	všechny ve směru posunutí	všechny jdoucí středem (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	osa a přímky na ni kolmé	jedna přímka
Přímé/nepřímé	přímé	přímé	přímé	nepřímé	nepřímé

Připomeňte si pojem orientace a vektorové součinu z LA 7.6, LA 8.8 případně souvislost s determinantem LA celá kapitola 7.

Věta 1.11 (Rodriguesova formule). Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Otočením v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$ a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.



Definice 1.12. Připomeňme si z lineární algebry (LA, cvičení 3.5.5), že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované $\mathbb{H}$) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

Pro tato vnoření a jejich inverzy nebudeme zavádět žádné označení, z kontextu a z aplikovaných operací bude jasné, kdy zacházíme např. s vektorem a kdy s kvaternionem vektoru odpovídajícím. Například ve Větě 1.17 by na pravé straně bylo přesnější psát vektor vzniklý „odvnořením“ kvaternionu $q(0, \mathbf{r})\bar{q}$, což by ale zbytečně zaplevelovalo značení.

Lemma 1.13 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Definice 1.14. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Lemma 1.16. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

otočení kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $(3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Věta 1.19. Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze ji složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).

