

Geometrie 1

Tento soubor obsahuje znění číslovaných položek (především definic a vět) jak byly předneseny v ZS 2025/26. Soubor také obsahuje hlavní argumenty důkazů. Spolu se zápisky z přednášek je tento seznam i hlavním studijním materiálem ke zkoušce. Co tento seznam **neobsahuje** jsou nejružnější motivace, vysvětlení, drobné detaily důkazů, zajímavosti, animace, ad-hoc příklady atd. Naopak zde budou koncem semestru přidány detailní požadavky na zkoušku.

Předmět Geometrie 1 přirozeně navazuje na Matematickou analýzu a zejména Lineární algebru. Skripta LA z prvního ročníku z roku 2023/24 jsem umístil na svoje stránky (abych tak zafixoval číslování definic a vět) a odkazují se na ně v tomto textu.

1 Shodná zobrazení

Cílem této kapitoly je studovat shodná zobrazení v rovině a v prostoru bez toho, že by se formálně definoval afinní prostor. Zároveň chceme zopakovat středoškolskou analytickou geometrii a co nejpřirozeněji na ni navázat.

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky

$$p : 3x + 4y - 7 = 0.$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Lemma 1.3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Nechtě $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $\|g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))\| = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Im} f$, pak díky prostotě f existují jejich jednoznačně určené vzory $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$\|f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = \|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

□

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (ortogonální matice).

Důkaz. Připomeňte si unitární matice, srovnej LA 8.5. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T (\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{O}\| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j\| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé. (pozn. K témuž závěru bychom došli i aplikací polarizační identity z lineární algebry, která říká, že skalární součin lze vyjádřit pomocí normy tímto skalárním součinem indukované, LA Tvrzení 8.32.)

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, které je podle první části důkazu shodné a pro jeho invers platí $g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{X} - \mathbf{A}^T \mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i . Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz

$$h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))^T.$$

Pak platí

$$\|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{O})\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)\|^2 &= \|h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + \dots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \dots + (y_i - 1)^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i\|^2. \end{aligned}$$

V druhé rovnosti prvního a třetí druhého řádku jsme využili, že h je shodnost. Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že $(\mathbb{R}^n, \rho)$, kde $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. $\square$

Důsledek 1.5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{X} + (\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Definice 1.6. Shodné zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice a $\vec{p}$ nějaký vektor z $\mathbb{R}^n$ nazýváme posunutí. Množina všech posunutí tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří tzv. ortogonální podgrupu označovanou $\mathbb{O}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin). Podgrupa $\mathbb{O}(n)$ tvořená přímými zobrazeními se značí buď $\mathbb{O}_+(n)$, nebo častěji $\mathbb{SO}(n)$ (speciální ortogonální grupa).

Věta 1.7. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 1.8. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme jeho samodružnými body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f , jestliže platí $f(M) = M$, tedy zobrazení ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť).

Lemma 1.9. Přímka $\mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $LO\{\mathbf{v}\}$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem $\mathbf{v}$.

Důkaz. Nechť $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Vektor $\mathbf{v}$ je nenulový (jinak by $q = \mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ nebyla přímka). Označme $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{v}$.

Zobrazení f zobrazuje přímky na přímky. Přímka q je samodružná právě tehdy, když obrazy jejích dvou bodů $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ na ní leží, tedy existují různá čísla $\alpha_{\mathbf{Q}}$, $\alpha_{\mathbf{R}}$ taková, že

$$f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{Q}}\mathbf{v}, \quad f(\mathbf{R}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{R}}\mathbf{v}.$$

Je-li tomu tak, pak je zjevně $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ násobkem $\mathbf{v}$ a dále $\mathbf{A}\mathbf{v} = f(\mathbf{R}) - f(\mathbf{Q}) = (\alpha_{\mathbf{R}} - \alpha_{\mathbf{Q}})\mathbf{v}$ a tedy $LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružný směr.

Naopak, jestliže je $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ násobkem $\mathbf{v}$, tedy $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{Q}}\mathbf{v}$ leží na přímce q . Protože je navíc $\mathbf{v}$ vlastní, je $f(\mathbf{R}) = \mathbf{A}(\mathbf{Q} + \mathbf{v}) + \mathbf{p}$ rovněž na přímce q . $\square$

1.1 Shodnosti v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$

Věta 1.10. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
 - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
 - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1 . V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
 - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí.
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastním číslem -1 a
 - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
 - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Zobrazení	Identita	Neidentické posunutí	Neidentické otočení	Osová souměrnost	Posunutá souměrnost
Samodružné body	všechny	-	střed otočení	osa souměrnosti	-
Samodružné směry	všechny	všechny	všechny (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	směr osy a kolmý na osu	směr osy a kolmý na osu
Samodružné přímky	všechny	všechny ve směru posunutí	všechny jdoucí středem (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	osa a přímky na ni kolmé	jedna přímka
Přímé/nepřímé	přímé	přímé	přímé	nepřímé	nepřímé

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům $\mathbf{A}$. Rozlišíme dva případy:

- f je přímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos \alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné $\mathbf{p}$ a tedy f má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. Lze psát

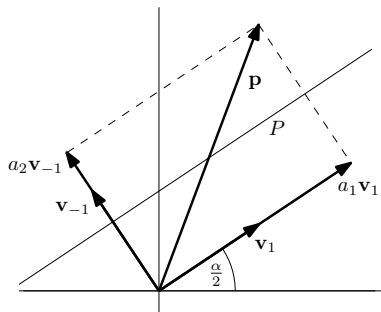
$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{AS} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

takže jde o otočení kolem $\mathbf{S}$. Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě $\mathbf{A}$ nemá žádné vlastní vektory (nad $\mathbb{R}$), tedy f nemá samodružné směry.

- f je nepřímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = -1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla 1 a -1 s příslušnými na sebe kolmými vlastními vektory $\mathbf{v}_1 = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$, $\mathbf{v}_{-1} = (-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2})$.



Označme $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1})$, což je ON báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbf{p} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_{-1}$ vyjádření vektoru posunutí v této bázi. Můžeme jistě psát

$$f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}\mathbf{X} + a_2\mathbf{v}_{-1}] + a_1\mathbf{v}_1 = f_2(f_1(\mathbf{X})),$$

kde $f_1(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + a_2\mathbf{v}_{-1}$ a $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + a_1\mathbf{v}_1$. Přímým výpočtem ověříme, že každý bod přímky $p(t) = \frac{a_2}{2}\mathbf{v}_{-1} + t\mathbf{v}_1$ je samodružným bodem zobrazení f_1 a jedná se tedy o osovou souměrnost podle této přímky. Zobrazení f_2 je ovšem posunutím ve směru této přímky, které pro $a_1 = 0$ degeneruje v identitu.

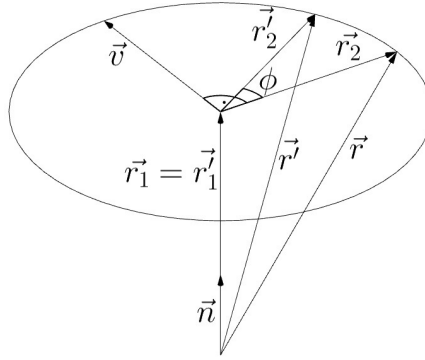
□

Připomeňte si pojem orientace a vektorové součinu z LA 7.6, LA 8.8 případně souvislost s determinantem LA celá kapitola 7.

Věta 1.11 (Rodriguesova formule). Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Otočením v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$ a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.



Důkaz. Rozložme $\mathbf{r}$ na složku $\mathbf{r}_1 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ (tj. projekci do směru $\mathbf{n}$) a složku $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ kolmou na $\mathbf{n}$. Označme $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_2$. Jelikož $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}_2$, platí

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_2\|.$$

Otočení kolem vektoru $\mathbf{n}$ o úhel ϕ zúžená na $LO\{\mathbf{r}_2, \mathbf{v}\} = LO\{\mathbf{n}\}^\perp$ je zřejmě také otočení o úhel ϕ . Jelikož $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v})$ je „násobkem“ „kladně orientované“ ortonormální báze tohoto prostoru, můžeme psát

$$\mathbf{r}'_2 = \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v}.$$

(Čárka vždy značí obraz v uvažovaném zobrazení.) Dále zřejmě $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$. Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 \\ &= \mathbf{r}_1 + \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

□

Definice 1.12. Připomeňme si z lineární algebry (LA, cvičení 3.5.5), že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované $\mathbb{H}$) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

Pro tato vnoření a jejich inverzy nebudeme zavádět žádné označení, z kontextu a z aplikovaných operací bude jasné, kdy zacházíme např. s vektorem a kdy s kvaternionem vektoru odpovídajícím. Například ve Větě 1.17 by na pravé straně bylo přesnější psát vektor vzniklý „odvnořením“ kvaternionu $q(0, \mathbf{r})\bar{q}$, což by ale zbytečně zaplevelovalo značení.

Lemma 1.13 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z rozepsání q_1 a q_2 pomocí čtyř složek.

Definice 1.14. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Důkaz. Snadno ověříme, že pro libovolné dva kvaterniony platí $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$. Multiplikativní invers jednotkového kvaternionu q je $\bar{q}$, protože $q\bar{q} = 1 = \bar{q}q$ a $\|\bar{q}\| = \|q\| = 1$. Dále jsou-li q_1, q_2 jednotkové kvaterniony, pak

$$\|q_1 q_2\| = \sqrt{(q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})} = \sqrt{q_1 (q_2 \bar{q}_2) \bar{q}_1} = \sqrt{q_1 \bar{q}_1} = 1,$$

tedy $q_1 q_2$ je jednotkový kvaternion. Jednotkové kvaterniony tak tvoří neprázdnou podmnožinu multiplikativní grupy všech nenulových kvaternionů uzavřenou na skládání a inverze, čili podgrupu.

Je-li $q = (s, \mathbf{v})$ jednotkový kvaternion a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, potom nutně

$$|s| = \sqrt{\|q\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2} < 1.$$

Jediná možná vyhovující volba $\alpha \in (0, \pi)$ je $\alpha = \arccos s$. Z toho plyne

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\|q\|^2 - s^2} = \sin \alpha,$$

tedy $q = (s, \mathbf{v}) = (\cos \alpha, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sin \alpha)$ a označíme $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Lemma 1.16. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Důkaz. Důkaz naleznete v Dodatku na konci skript a nebude se zkoušet.

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

otočení kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

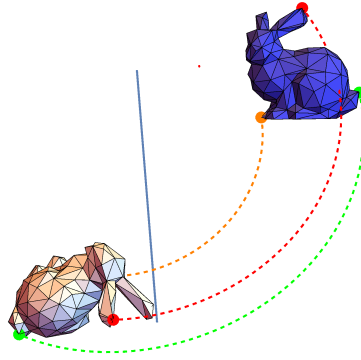
Důkaz. Označme $q = (s, \mathbf{v})$. S využitím Lemmat 1.13 a 1.16

$$\begin{aligned}
q\mathbf{r}\bar{q} &= (s, \mathbf{v})(0, \mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\
&= (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \times \mathbf{r} + s\mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\
&= (-(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})s + \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}}_0 + s\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \underbrace{-(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{v} - s\mathbf{r} \times \mathbf{v}}_{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + s(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + s^2\mathbf{r}) \\
&= (0, 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{r} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})) \\
&= (0, 2\sin^2 \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\mathbf{r} + 2\sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) \\
&= (1 - \cos 2\alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos(2\alpha)\mathbf{r} + \sin 2\alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Ovšem to je podle Rodriguesovy formule vektor vzniklý otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n}$ o úhel 2α v kladném směru. $\square$

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $(3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Věta 1.19. Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze ji složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).



Důkaz. Každé $f \in E_+(3)$ je tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je ortogonální a $\det \mathbf{A} = 1$. Matice $\mathbf{A}$ je unitární, její vlastní čísla nad $\mathbb{C}$ proto leží na jednotkové kružnici. Zároveň je reálná a stejně tak i koeficienty jejího charakteristického polynomu, tudíž je množina jejích vlastních čísel symetrická podle reálné osy komplexní roviny a musí proto mít tvar $\sigma(\mathbf{A}) = \{\pm 1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$, $\phi \in [0, \pi]$. Znaménko prvního vlastního čísla musí být

kladné, protože součin všech vlastních čísel je roven $\det \mathbf{A} = 1$. Příklad $\phi = 0$ vede na trojnásobné vlastní číslo 1, a protože unitární matice jsou diagonalizovatelné, znamená to, že $\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$. Tvzení pak zřejmě platí, neboť můžeme uvažovat otočení o nulový úhel kolem osy $\mathbf{p}$ složené s tímto posunutím.

Pokud $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_3$, je 1 jejím vlastním číslem s algebraickou a z diagonalizovatelnosti i geometrickou násobností 1, existuje tedy právě jeden vlastní směr s tímto vlastním číslem. Nechť $\mathbf{v}_1$ je jednotkový vlastní vektor s vlastním číslem 1 a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jeho doplnění do ortonormální báze $\mathbb{R}^3$. Označme $W = LO\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonální doplněk prostoru $LO\{\mathbf{v}_1\}$ a rozložme

$$\mathbf{p} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3.$$

Můžeme jistě psát

$$f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}\mathbf{X} + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3] + a_1 \mathbf{v}_1 = f_2(f_1(\mathbf{X})),$$

kde $f_1(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3$ a $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + a_1 \mathbf{v}_1$.

Asociovaný homomorfismus $f_{1,A}$ zachovává kolmost vektorů, zachovává tedy i podprostor W jakožto ortogonální doplněk vlastního směru $LO(\mathbf{v}_1)$. Zobrazení f_1 tedy zachovává množinu W také a je přímé. Navíc homomorfismus $f_{1,A}$ zúžený na W není roven identitě. Podle Věty 1.10 o klasifikaci shodností v rovině existuje právě jeden bod $\mathbf{S} = s_2 \mathbf{v}_2 + s_3 \mathbf{v}_3 \in W$, pro který platí $f_1(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$. Přímým výpočtem ověříme, že i všechny body přímky $p : \mathbf{S} + t\mathbf{v}_1$ jsou samodružnými body zobrazení f_1 . Jedná se tedy o otočení okolo osy p a zobrazení f_2 je zjevně posunutím v jejím směru.

Poznamenejme, že velikost úhlu otočení je možné určit z matice $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \operatorname{diag}(1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}) \mathbf{Q}^{-1}$ pomocí její stopy, protože $\operatorname{Tr} \mathbf{A} = 1 + 2 \cos \phi$. $\square$