

# Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání, verze 30. září 2024

Cílem cvičení je spřátelit se s kvaterniony a umět pomocí nich rotovat vektory v prostoru. Také se trochu seznámit se shodnostmi v prostoru a uvědomit si, jak jsou výpočetně náročnější oproti shodnostem v rovině.

## 2 Shodná zobrazení v prostoru

**Úloha 2.1.** Vypočítejte součin  $q_1q_2$  jednak přímo z definice a druhak geometricky pomocí formule s vektorovým a skalárním součinem. Rovněž k těmto kvaternionům nalezněte kvaterniony inverzní.

$$\begin{aligned}q_1 &= 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \\q_2 &= 1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

**Úloha 2.2.** Nalezněte otočení vektoru  $(0, 0, 1)$  kolem vektoru  $(1, 2, 2)$  o úhel  $\frac{2\pi}{3}$  v kladném směru. Pokuste se úlohy vyřešit jak pomocí Rodriguesovy formule tak pomocí kvaternionů.

**Úloha 2.3.** Vyjádřete středovou souměrnost v  $\mathbb{R}^3$  se středem  $[1, 2, 3]$ . Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

**Úloha 2.4.** Nalezněte vyjádření rovinové souměrnosti v  $\mathbb{R}^3$ , která zobrazuje bod  $[1, 0, -2]$  na bod  $[3, 2, 0]$ .

**Úloha 2.5.** Nalezněte vyjádření osové souměrnosti v prostoru podle přímky s parametrickým vyjádřením  $[1, 0, -1] + t(1, 2, 3)$ . Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

**Úloha 2.6.** Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3,\end{aligned}$$

popisují přímou shodnost  $\mathbb{R}^3$ . Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete je jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

**Úloha 2.7.** Nalezněte všechny jednotkové kvaterniony, které odpovídají rotaci, která převádí vektor  $(1, 0, 0)$  na vektor  $(0, 1, 0)$ .