

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 4, verze ze dne 17. října 2022

4 Diferenciální geometrie rovinných křivek

Příklady:

Úloha 4.1. Uvažujme orientovanou rovinnou křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t) = (t, t^3)$. V jejím bodě $t = 1$ vypočtete znaménkovou křivost, tečný a orientovaný normálový vektor, tečnou a normálovou přímku a oskulační kružnici. V nějaké reparametrizaci zachovávající orientaci ověřte, že znaménková křivost v odpovídajícím bodě zůstává stejná.

Úloha 4.2. Nalezněte přímou shodnost, která pro křivku z Úlohy 4.1 zobrazí její bod $\mathbf{c}(1)$ do počátku souřadnic a její tečný vektor v tomto bodě na vektor $(1, 0)$. Ověřte, že znaménková křivost zobrazené křivky v odpovídajícím bodě bude stejná.

Úloha 4.3. V obecném bodě vyjádřete znaménkovou křivost křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$. V bodě s extrémní křivostí sestrojte oskulační kružnici.

Úloha 4.4. Studujte znaménkovou křivost elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Jaká jsou její minima a maxima?

Úloha 4.5. Ukažte, že v okolí bodu $(1, 1)$ lze hladce parametrizovat implicitně zadanou křivku

$$x^4 - 2xy^3 + y^3 = 0$$

a v tomto bodě spočtete její znaménkovou křivost (znaménko se mění podle zvolené orientace).