

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Zadání

Cvičení 10, verze ze dne 25. listopadu 2024

10 Afinní a projektivní prostor

Cíle cvičení a DU:

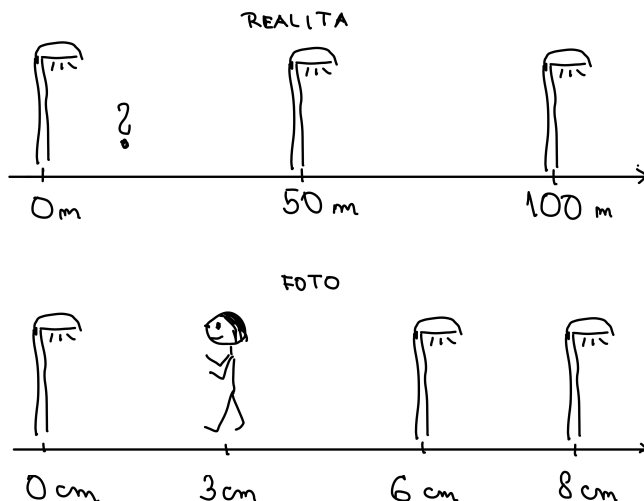
- Naučit se pracovat v projektivním rozšíření afinní roviny.
- Za DU je Úloha 10.6.

Příklady:

Úloha 10.1. V \mathbb{R}^2 jsou dány body $A = [1, 2]$, $B[3, 4]$ a přímka p parametrizací $p(t) = [-5, -11] + t(1, -2)$. Nalezněte nevlastní body přímek \overleftrightarrow{AB} a p a určete průsečík těchto přímek.

Úloha 10.2. V \mathbb{R}^2 jsou dány body $A = [1, 3]$, $B[-1, 7]$. Nalezněte na úsečce AB bod X tak, aby pro dělicí poměr platilo $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{4}$. Nalezněte nevlastní bod přímky \overleftrightarrow{AB} a označte si ho Y . Vypočtěte dvojpoměr (A, B, X, Y) .

Úloha 10.3. Na fotografii (kterou považujeme za projektivně zobrazenou realitu) rovné ulice vidíme tři pouliční lampy a jednoho chodce. Víme, že rozestup lamp v realitě je rovnoměrný, a to 50 metrů. Na fotografii je vzdálenost prvních dvou lamp 6 centimetrů a vzdálenost druhé a třetí lampy 2 centimetry. Chodec je na fotografii přesně uprostřed mezi první a druhou lampou. Jak je od první lampy vzdálen v realitě?



Úloha 10.4. Nalezněte projektivní transformaci projektivně rozšířené afinní přímky \mathbb{R} , která zobrazuje $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$ a $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}$. Ukažte, že zúžené na $[0, 1]$ je toto zobrazení difeomorfismem tohoto intervalu na sebe. Srovnejte s úlohou 3.1.(3).

Úloha 10.5. V \mathbb{R}^2 určete afinní typ kuželosečky $x^2 - 2xy + 4x - 6y + y^2 + 7 = 0$ a nelezňte tečnu jejím bodě $[1, 2]$.

Úloha 10.6. Je dána afinní kuželosečka \tilde{Q} s rovnicí

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0.$$

- a) Ukažte, že \tilde{Q} je regulární kuželosečka.
- b) Určete její afinní typ.
- c) Určete tečny k \tilde{Q} z bodu $[-1, -1]$.
- d) Nalezněte její střed a asymptoty \tilde{Q} , jestliže existují.
- e) Nalezněte její osy, vrcholy a délky poloos.
- f) Nalezněte nějakou parametrizaci \tilde{Q} a ukažte, že všechny vrcholy jsou body s nejmenší či největší znaménkovou křivostí.