Cvičení k přednášce Geometrie 1

Verze ze dne 19. září 2024

7 Afinní prostory

Cíle cvičení:

- Procvičit počítání se souřadnicemi afinního prostoru,
- naučit se pracovat s afinními kombinacemi a barycentrickou soustavou souřadnic.
- přecházet mezi různými popisy afinního podprostoru,
- procvičit určování vzájemné polohy a vzdálenosti afinních podprostorů.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Uvažujme dvě posloupnosti $S = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$ v $\mathbb{R}^2$.

(a) Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru $\mathbb{R}^2$,

(b) spočítejte souřadnice bodu $b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické souřadné soustavě a vzhledem k soustavě souřadnic S,

(c) najděte bod c, pro který $[c]_S = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$,

(d) pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,

(e) obecněji, pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Řešení. (a) Stačí ověřit, zda dvojice $M = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ a dvojice $N = (\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix})$ tvoří báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, což zjevně platí.

(b) Pro kanonickou souřadnou soustavou K s počátkem v bodě $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ a s kanonickou bází vektorového prostoru zaměření není co počítat, tedy $[b]_K = b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

Dále hledáme souřadnice vektoru $b - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi M, tedy řešíme soustavu s maticí $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{array}\right)$. Standardním postupem

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\1 & 1 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\0 & 1 & -3\end{array}\right).$$

snadno zjistíme $[b]_S = [\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}]_M = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

(c) Postupujeme přímo podle definice. Tedy $c = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

(d) Pro výpočet změny souřadnic použijeme tvrzení z přednášky, které říká, že

$$[a]_S = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S + [\mathrm{Id}]^N_M [a]_R.$$

Potřebujme tedy určit $[\mathrm{Id}]^N_M$ a souřadnice $[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}]_M = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$. Najdeme-li matici přechodu

$$[\mathrm{Id}]^N_M = [\mathrm{Id}]^{K_2}_M \cdot [\mathrm{Id}]^N_{K_2} = ([\mathrm{Id}]^M_{K_2})^{-1} \cdot [\mathrm{Id}]^N_{K_2} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix},$$

můžeme snadno dopočítat $[a]_S = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S + [\mathrm{Id}]^N_M[a]_R = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

(e) Máme

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = [\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}]_S + [\mathrm{Id}]^N_M[a]_R = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\-2+2x\end{pmatrix}.$$

□

Úloha 7.2. Mějme afinní prostor $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ a $b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

(a) Spočítejte afinní kombinaci bodů $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$,

(b) rozhodněte, zda je bod b afinní kombinací bodů $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ a pokud ano, spočítejte ji,

(c) ověřte, že je posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$ barycentrická soustava souřadnic a určete barycentrické souřadnice $[b]_B$ a $[\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}]_B$ (je to bod z B!).

(d) rozhodněte, zda body b a $c = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ leží v trojúhelníku s vrcholy B,

(e) spočítejte těžiště trojúhelníku B.

Řešení. (a) Přímočaře spočítáme kombinaci $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(b) Ptáme se, zda existují hodnoty x a y, pro které

$$b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = (1-x-y)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},$$

tedy řešíme vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = x(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) + y(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) = x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Počítáme soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2\\1 & 0 & 1\end{array}\right)$, jejíž řešení $x = 1$, $y = -3$ jsme spočítali v 7.1(b). Našli jsme afinní kombinaci $b = 3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$,

(c) Protože obsahuje posloupnost B 3 body, zbývá ověřit, že každý bod afinního prostoru dostaneme (jednoznačně) jako afinní kombinaci bodů posloupnosti B, což je (dle tvrzení z přednášky) ekvivalentní tomu, že je posloupnost vektorů

$$\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

lineárně nezávislá. To zřejmě platí, navíc jsme to ověřili už v 7.1.

Barycentrické souřadnice $(3, 1, -3)^T$ bodu b jsme určili v úloze (b) a barycentrické souřadnice $(0, 1, 0)^T$ jednoho z bodů $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ barycentrické souřadné soustavy B určíme bez počítání.

(d) Protože bod leží v trojúhelníku určeném body barycentrické souřadné soustavy B, právě když všechny jeho barycentrické souřadnice vzhledem k B leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, stačí nám tyto souřadnice zjistit. Pro bod b už je máme určeny v (c), tudíž vidíme, že b v trojúhelníku neleží.

Nyní podobně jako v (b) vyřešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & \frac{5}{2}-2\\ 1 & 0 & \frac{4}{3}-1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & \frac{1}{3}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{6}\end{array}\right),$$

odkud vidíme, že barycentrické souřadnice bodu c jsou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T$, z čehož plyne, že bod c uvnitř trojúhelníku B leží.

(e) Protože nalezení těžiště není ničím jiným než výpočtem afinní kombinace se všemi koeficienty stejnými, máme $t_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$. □

Úloha 7.3. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme přímky $P = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ a $Q = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

(a) Určete vzájemnou polohu přímek P a Q,

(b) určete úhel přímek přímky P a Q,

(c) najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou na obě přímky P a Q,

(d) spočítejte vzdálenost P a Q.

Řešení. (a) Afinní přímky P a Q zřejmě nejsou rovnoběžné, stačí nám tedy například zjistit, zda existuje řešení rovnice

$$\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní vektorové podmínce, zda $\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\}$. Snadno spočítáme, že nehomogenní soustava $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & 1 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 10\end{array}\right)$ nemá řešení, a proto jsou P a Q mimoběžky.

(b) Přímky svírají úhel φ daný směrem jejich zaměřeními $\mathbf{v}_p = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_q = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$:

$$\cos\varphi = \frac{|\,\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q\,|}{\|\,\mathbf{v}_p\,\| \cdot \|\,\mathbf{v}_q\,\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(c) Nejprve počítáme vektor kolmý na vektory $\mathbf{v}_p$ a $\mathbf{v}_q$ a budeme tak znát zaměření hledané přímky. Snadno zjistíme (například vyřešením homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$ tvořenou řádkovými vektory $\mathbf{v}_p^T$ a $\mathbf{v}_q^T$, že hledaným zaměřením je podprostor $\mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\}$. Nyní potřebujeme najít průsečíky hledané kolmé přímky s mimoběžkami P a Q, což lze zformulovat jako řešení rovnice

$$(\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}) - (\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}) = z\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\}.$$

Ta vede na nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 4 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 6\\ -1 & 1 & -3 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right),$$

jejíž jediné řešení je $x = -2$, $y = -1$ a $z = 1$. Všimněme si, že podmínka $z = 1$ říká, že se jednalo o mimoběžky (zjevně nejsou rovnoběžné a to, že se protínají je ekvivalentní podmínce $z = 0$). Tedy průsečík hledané kolmé příčky s přímkou

P je právě bod $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ a průsečík s přímkou Q je právě bod $\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$. Hledanou kolmou příčku můžeme napsat ve tvaru $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\}$.

(d) Už jsme našli průsečíky P a Q s kolmou příčkou, nejkratší vzdálenost přímek P a Q je přitom rovna právě vzdálenosti těchto dvou průsečíků. Navíc z vektorové rovnice úlohy (c) vidíme, že tato vzdálenost je rovna právě velikosti vektoru $z\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$. Tedy vzdálenost P a Q je $\|\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\| = \sqrt{11}$. □

Úloha 7.4. V afinním prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s vektorovým prostorem $\mathbb{Z}_5^4$ uvažujme tři podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}\},\quad D_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\},\quad D_3 = \{a \in A|\ \begin{pmatrix}1&0&0&2\\3&0&0&2\end{pmatrix}\cdot a = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\}.$$

(a) Najděte soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic afinních prostorů D_1, D_2 a D_3.

(b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3,

(c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2,

(d) určete podprostory D_2 a D_3 jako afinní kombinace bodů.

Řešení. (a) Nejprve najdeme jeden bod podprostoru a potom bázi příslušného vektorového prostoru.

Pro D_1 si můžeme vzít například jeho bod $a = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ a poté spočítat vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}$. Protože jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ zřejmě lineárně nezávislé, dostáváme souřadnou soustavu $S_1 = (a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}\right)$, proto posloupnost $B_1 = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic afinního prostoru D_1.

Pro prostor D_2 není třeba nic počítat, abychom dostali

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{a} \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic prostoru D_2.

Pro prostor D_3 je třeba najít jedno řešení $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ nehomogenní soustavy a bázi řešení homogenní soustavy $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ s maticí $\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&4\\3&0&0&2&3\end{array}\right)$. Nyní máme $S_3 = \left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ a dopočítáme $B_3 = \left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu podprostoru D_3.

Nalezené souřadné soustavy využijeme pro zodpovězení úloh (b), (c) a (d).

(b) Tím, že už jsme pro dané podprostory našli soustavu souřadnic, zbývá jen sepsat

$$D_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}\}, \quad D_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\}.$$

(c) Využijeme parametrický popis prostoru D_1 a najdeme takovou matici A_1, že množina všech řešení homogenní soustavy s maticí A_1 bude rovna $\mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}4\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\3\end{pmatrix}\}$, tedy potřebujeme opět vyřešit homogenní soustavu rovnic s maticí $\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 2\\0 & 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Bázi řešení tvoří například vektory $(3,0,1,0)^T, (3,3,0,1)^T$, které seřadíme do řádků hledané matice A_1. Nyní zbývá spočítat $\mathbf{b}_1 = A_1(2,3,2,1)^T = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Zjistili jsme, že bod x leží v podprostoru D_1 právě tehdy, když je x řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & 0\\3 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Protože máme prostoru D_2 dán parametricky, postupujeme stejně jako u hledání rovnicového popisu D_1. Nejprve najdeme bázi řešení jediné (homogenní) lineární rovnice s maticí $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ a tu sepíšeme do řádků matice $A_2 = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 1 & 0\\4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Nyní dopočítáme vektor pravých stran $\mathbf{b}_2 = A_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 1 & 0\\4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$ Zjistili jsme, že D_2 tvoří právě množina všech řešení soustavy lineárních rovnic s maticí $\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 1 & 0 & 0 & 4\\3 & 0 & 1 & 0 & 4\\4 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$.

(d) Tím, že jsme v (a) nalezli barycentrickou soustavu souřadnic, úlohu už jsme vyřešili, stačí totiž vzít její body, tedy:

$$D_2 = \mathrm{AO}\{B_2\} = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\2\end{pmatrix}\}, \quad D_3 = \mathrm{AO}\{B_3\} = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\}.$$

□

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.5. Uvažujme posloupnost bodů $B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ a bod $b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ v afinním prostoru nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$.

(a) Ověřte, že je B barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru a že body B tvoří (nedegenerovaný) čtyřstěn,

(b) spočítejte barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k barycentrické soustavě souřadnic B a

(c) najděte bod c s barycentrickými souřadnicemi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})^T$ vzhledem k soustavě B,

(d) určete barycentrické souřadnice bodu b vzhledem k soustavě $B' = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ (využijte podobnost s B),

(e) rozhodněte, zda bod b či c leží ve čtyřstěnu B.

Úloha 7.6. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\2\\4\\4\end{pmatrix}\},$$

kde a je pevné reálné číslo a D_2 je řešením soustavy (s jedinou rovnicí)

$$(2, 3, 4, 1) \cdot x = 10.$$

Ukažte, že D_2 je nadrovina a určete hodnotu a tak, aby D_1 a D_2 byly rovnoběžné.

Úloha 7.7. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \mathrm{AO}\{\begin{pmatrix}4\\-4\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\9\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\7\\-1\end{pmatrix}\}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix}1\\-12\\9\\9\end{pmatrix} + \mathrm{LO}\{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\-4\end{pmatrix}\}.$$

Pro oba podprostory určete jejich dimenzi a nalezněte jejich rovnicové vyjádření. Určete jejich vzájemnou polohu.

Řešení doplňujících úloh:

5. (b) $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, (c) $c = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}17\\6\\7\end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, (e) b neleží a c leží ve čtyřstěnu B.
6. Nadrovina v $\mathbb{R}^4$ je podle definice libovolný podprostor dimenze 3 což množina řešení splňuje podle. Rovnoběžnost nastane pouze pro $a = -8$.