Zkouška Geometrie 1

vzor

Na známku *dobře* je třeba splnit minimální počty bodů pro každou úlohu. Na známku *velmi dobře* je třeba splnit minimální počty a celkem získat alespoň 60 bodů. Na známku *výborně* je třeba splnit minimální počty a celkem získat alespoň 70 bodů.

1. Početní část *(celkem 40 bodů, minimálně je třeba získat 22 bodů)*

   (a) Je dána parametrizovaná křivka

   $$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1}{5}\,t^5 + t^2 - 2\,t, -\frac{1}{2}\,t^4 + \frac{2}{3}\,t^3 + t^2, \frac{4}{3}\,t^3 - t^2\right), \quad t \in (0,2).$$

   V bodě $t = 1$ nalezněte její křivost, torzi, Frenetův repér a rektifikační rovinu.

   (b) Uvažujme dvě posloupnosti $S = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$ v $\mathbb{R}^2$.

   i. Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru $\mathbb{R}^2$,

   ii. najděte bod c, pro který $[c]_S = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$,

   iii. pro bod a afinního prostoru najděte $[a]_S$, jestliže $[a]_R = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,

   (c) Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

   $$\int_{\mathbf{c}} (a - y)dx + xdy,$$

   kde $\mathbf{c}(t)$ je cykloida $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in (0, 2\pi)$.

   (d) V $\mathbb{R}^2$ určete afinní typ, kuželosečky $x^2 - 2xy + 4x - 6y + y^2 + 7 = 0$. Nalezněte její střed a asymptoty pokud existují a nalezněte tečnu jejím bodě $[1, 2]$.

2. Základní definice *(celkem 10 bodů, minimálně je třeba získat 8 bodů)*

   (a) Definujte shodné zobrazení.

   (b) Definujte křivkový integrál 2. druhu.

   (c) Definujte afinní prostor.

3. Věty a důkazy *(celkem 30 bodů, minimálně je třeba získat 15 bodů)*

   (a) Formulujte a dokažte Frenetovy vzorce pro prostorovou křivku.

   (b) Definujte afinní kombinaci bodů a dokažte její korektnost.

   (c) Formulujte a dokažte větu o tom, jaký tvar má libovolná přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$.