Diferenciální geometrie – vzorová písemka

K úspěšnému napsání písemky je potřeba získat aspoň 9 bodů.

1. Je dána křivka $c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Spočítejte její délku na intervalu $[0, 2\pi]$. Najděte parametrizaci obloukem na intervalu $(0, \pi/2)$.

(3 body)

2. Křivka je zadána jako graf funkce $y = \sin 2x$.

a) Najděte Frenetův repér ve všech bodech.

b) Spočítejte křivost ve všech bodech. Kde je kladná?

c) Najděte střed křivosti ve všech bodech, kde je definován.

d) Napište parametrizaci oskulační kružnice v bodě $[\pi/4, 1]$.

(9 bodů)

Výsledky vzorové písemky si můžete ověřit na další straně.

Další úlohy k procvičení

1. Je dána cykloida $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Spočítejte její délku a najděte parametrizaci obloukem.

2. Je dána prostorová křivka $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4\cos\frac{t}{2})$, $t \in [0, 2\pi]$. Spočítejte její délku a najděte parametrizaci obloukem.

3. Je dána řetězovka, která je grafem funkce $y = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Najděte Frenetův repér ve všech bodech.

b) Spočítejte křivost ve všech bodech. Kde je maximální?

4. Je dána rovinná křivka $c(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$, $t \in (0, \infty)$. Spočítejte Frenetův repér a křivost ve všech bodech. Napište parametrizaci evoluty. Pro $t = \pi$ najděte poloměr a střed křivosti a napište parametrizaci oskulační kružnice.

5. Je dána prostorová křivka $c(t) = (\frac{1}{5}t^5 + t^2 - 2t, -\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + t^2, \frac{4}{3}t^3 - t^2)$. Spočítejte její Frenetův repér pro $t = 1$.

6. Je dána prostorová křivka $c(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Spočítejte její Frenetův repér ve všech bodech.

Výsledky vzorové písemky

1. Délka křivky je 6. Volíme-li např. $t_0 = \frac{\pi}{4}$, pak parametrizace obloukem vyjde

$$d(s) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{3}s\right)\right) \\ \sin^3\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{3}s\right)\right) \end{pmatrix}, \quad s \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

2. Frenetův repér:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2(2t)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\cos^2(2t)}} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Křivost

$$\kappa(t) = \frac{-4\sin(2t)}{(1 + 4\cos^2(2t))^{3/2}}$$

je kladná, právě když $t \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Střed křivosti

$$S(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(2t) \end{pmatrix} - \frac{1 + 4\cos^2(2t)}{4\sin(2t)} \begin{pmatrix} -2\cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

je definován pro všechna $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$.

Parametrizace oskulační kružnice v bodě $[\pi/4, 1]$ je

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cos t \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$