Diferenciální geometrie – vzorová písemka

K úspěšnému napsání písemky je potřeba získat aspoň 9 bodů.

1. V rovině je dáno zobrazení $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Rozhodněte, zda je konformní, případně izometrické.

(3 body)

2. Je dán helikoid s parametrizací

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, cu) + v(-\cos u, -\sin u, 0), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

kde $c > 0$ je parametr. Ve všech bodech plochy vypočítejte první a druhou základní formu, hlavní křivosti, hlavní směry, Gaussovu a střední křivost.

(9 bodů)

Výsledky vzorové písemky si můžete ověřit na další straně.

Další úlohy k procvičení

1. Je dána přímková plocha

$$f(u, v) = c(u) + vc'(u), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

kde $c(u) = (\cos u, \sin u, u)$. Ve všech bodech plochy vypočítejte první a druhou základní formu, hlavní křivosti, hlavní směry, Gaussovu a střední křivost.

2. Jsou dány plochy

$$f_1(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi),$$

$$f_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

Zobrazení F zobrazuje libovolný bod $f_1(u, v)$ na první ploše do bodu $f_2(\sinh u, v)$ na druhé ploše. Rozhodněte, zda F je konformní, případně izometrické.

Výsledky vzorové písemky

1. Označíme-li zadané zobrazení F, pak první základní formy f_1 (rovina) a $F \circ f_1$ jsou

$$\{g^1_{ij}(u,v)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{g^2_{ij}(u,v)\} = \begin{pmatrix} e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix}.$$

Zobrazení F tedy není izometrie, ale je konformní.

2. První a druhá základní forma:

$$\{g_{ij}(u,v)\} = \begin{pmatrix} c^2 + (v-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{h_{ij}(u,v)\} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{\sqrt{c^2+(v-1)^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{c^2+(v-1)^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Hlavní křivosti v bodě (u,v):

$$\kappa_1 = \frac{c}{c^2 + (v-1)^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{c}{c^2 + (v-1)^2}$$

Hlavní směry příslušné ke κ_1:

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2\left(c^2 + (v-1)^2\right)}} \begin{pmatrix} (v-1)\sin u \\ (1-v)\cos u \\ c \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hlavní směry příslušné ke κ_2:

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2\left(c^2 + (v-1)^2\right)}} \begin{pmatrix} (v-1)\sin u \\ (1-v)\cos u \\ c \end{pmatrix} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussova a střední křivost v bodě (u,v):

$$K = -\frac{c^2}{\left(c^2 + (v-1)^2\right)^2}, \quad H = 0$$