Geodetické křivky

def: Nechť $f: U \to \mathbb{R}^3$ je regulární plocha, $c = f\circ\varphi$ je regulární křivka na ploše. Řekneme, že c je geodetická křivka (geodetika), pokud $\forall s$ je $c''(s)$ násobkem $n(\varphi(s))$ (tj. $c''(s)$ je kolmý k ploše v bodě $f(\varphi(s))$).

Pozn.: víme, že $\|c'\| = \text{konst.} \iff \forall s \;\; c'(s)\cdot c''(s) = 0$

c je geodetika $\Rightarrow \|c'\| = \text{konst.}$

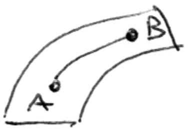
motivace:

1) Trajektorie tělesa na ploše, na které působí pouze síla kolmá k povrchu, která je udržuje na ploše, je geodetika.

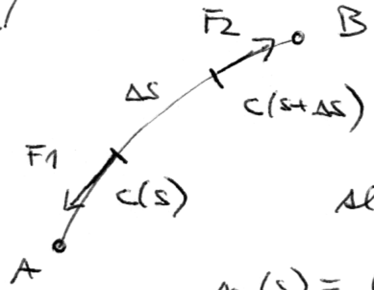
$$\underbrace{c''(s)}_{\text{zrychlení}} = a = \frac{F}{m}$$

2) Geodetika je „nejrovnější" křivka na ploše – zrychlení tělesa, které se pohybuje po geodetice, má nulovou tečnou složku (těleso nezatáčí).

3) Hledání nejkratší spojnice dvou bodů na ploše



nejkratší spojnice = provázek natažený mezi body A, B
= křivka $c = f\circ\varphi$, BÚNO par. obloukem



napínací síly: $F_1 = -k\,c'(s)$

$F_2 = k\,c'(s+\Delta s)$

tlak provázku na plochu v bodě $c(s)$:

$$p(s) = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{F_1+F_2}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{k\,c'(s+\Delta s) - k\,c'(s)}{\Delta s} = k\,c''(s)$$

Plocha působí v každém bodě provázku tlakem ve směru normály $n(\varphi(s))$.

Provázek v klidu $\Rightarrow$ tlaky v rovnováze $\Rightarrow n(\varphi(s)) \parallel k\,c''(s)$
$\Rightarrow c$ je geodetika

Věta: Je-li c nejkratší spojnice dvou bodů na ploše a $\|c'\| = \text{konst.}$, pak c je geodetika.

(bez důkazu)

Př f = rovina ϱ

$c = f \circ \varphi$, ... $\forall t \quad c''(t) \in \varrho$, $n(\varphi(t)) \perp \varrho$

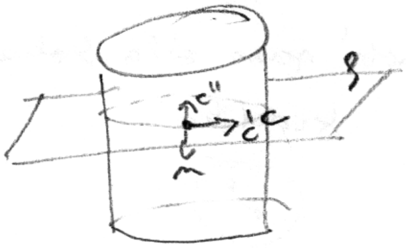
c je geodetika $\iff \forall t \quad c''(t) = 0 \implies c(t) = at + b$

... c je přímka

Věta Nechť $c = f \circ \varphi$ je průnikem roviny ϱ a plochy f, $\|c'\| = \text{konst}$. Pak c je geodetika $\iff \forall t \quad n(\varphi(t)) \in \varrho$.

Dk víme $\forall t$

$$\left.\begin{array}{c} c''(t) \perp c'(t) \\ n(\varphi(t)) \perp c'(t) \\ c''(t) \in \varrho \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} c''(t) \parallel n(\varphi(t)) \\ \Updownarrow \\ n(\varphi(t)) \in \varrho . \end{array}$$



Př každá hlavní kružnice na sféře je geodetika.

- ne každá geodetika je nejkratší spojnice

- může existovat nekonečně mnoho geodetik spojujících 2 body

Žádné další geodetiky na sféře nejsou - plyne z násl. 2 vět.

Věta $c = f \circ \varphi$ je geodetika $\iff \forall k \in \{1,2\} \quad \forall t$

$$\varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(\varphi(t))\, \varphi_i'(t) \varphi_j'(t) = 0 .$$

Dk

$$c(t) = f(\varphi(t))$$

$$c'(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\varphi(t))\, \varphi_i'(t)$$

$$c''(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\varphi(t))\, \varphi_i''(t) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(\varphi(t))\, \varphi_i'(t)\, \varphi_j'(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_k}(\varphi(t))\, \varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \left[\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(\varphi(t)) \frac{\partial f}{\partial u_k}(\varphi(t)) + h_{ij}(\varphi(t))\, n(\varphi(t)) \right] \varphi_i'(t)\, \varphi_j'(t)$$

$c''(t) \parallel n(\varphi(t)) \iff$ koef. u $\frac{\partial f}{\partial u_k}$ jsou nuly:

$$\iff \varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(\varphi(t))\, \varphi_i'(t)\, \varphi_j'(t) = 0 \quad \forall k \in \{1,2\}$$

Věta| $f: U \to \mathbb{R}^3$ regulární, $(u_0,v_0)\in U$, $a = a_1 \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) + a_2 \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)$, $\|a\| \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ právě jedna geodetika $c = f\circ\varphi$ taková, že $c(0) = f(u_0,v_0)$, $c'(0) = a$.

$c'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t))\varphi_2'(t)$

Dk| hledáme řešení soustavy

$$\varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k(\varphi(t))\,\varphi_i'(t)\,\varphi_j'(t) = 0, \qquad \varphi(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \varphi'(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

→ lze převést na soustavu rovnic 1. řádu

$$\psi_k(t) = \varphi_k'(t) \qquad k \in \{1,2\}$$

$$\psi_k'(t) = -\sum \Gamma_{ij}^k(\varphi(t))\,\psi_i(t)\,\psi_j(t), \qquad k\in\{1,2\}$$

$$\varphi_1(0) = u_0, \quad \varphi_2(0) = v_0, \quad \psi_1(0) = a_1, \quad \psi_2(0) = a_2$$

Použij větu o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy

$$x'(t) = F(x(t),t), \qquad x(0) = x_0.$$

Př| geodetiky na válci $f(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \\ u \end{pmatrix}$

Víme: $\forall i,j,k$ $\quad \Gamma_{ij}^k(u,v) = \sum_{l=1}^{2} b_{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_l}$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r\sin v \\ r\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -r\cos v \\ -r\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \{b_{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^k = 0, \quad \Gamma_{12}^k = 0, \quad \Gamma_{21}^k = 0$$

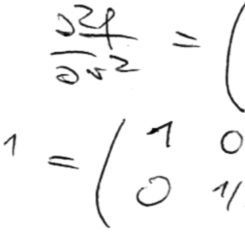
$$\Gamma_{22}^1 = b_{11}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}}_{=0} + \underbrace{b_{12}}_{=0}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \underbrace{b_{21}}_{=0}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + b_{22}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}_{=0} = 0$$

dif. rovnice: $\varphi_1''(t) = 0$, $\varphi_2''(t) = 0$

$\Rightarrow$ $\varphi_1(t) = \alpha t + \beta$ $\qquad \varphi_2(t) = \gamma t + \delta$

$$c(t) = f(\varphi(t)) = \begin{pmatrix} r\cos(\gamma t+\delta) \\ r\sin(\gamma t+\delta) \\ \alpha t+\beta \end{pmatrix}$$



$\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ přímka

$\gamma \neq 0$, $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ kružnice

$\gamma \neq 0$, $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ šroubovice

Geodetiky na válci lze najít také pomocí násl. věty:

<u>Věta</u> Izometrie zachovávají geodetiky.

<u>Dk</u> 1. plocha f, 2. plocha $F \circ f$, F izometrie
$\Rightarrow$ stejné 1. zákl. formy $\Rightarrow$ stejné Γ_{ij}^{k}

geodetiky na 1. ploše: $c = f \circ \varphi$, kde

$$\varphi_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(\varphi(t))\,\varphi_i'(t)\,\varphi_j'(t) = 0 \qquad k \in \{1,2\}$$

geodetiky na 2. ploše: $d = (F \circ f) \circ \varphi$, stejné dif. rovnice

- geodetiky na kulové ploše